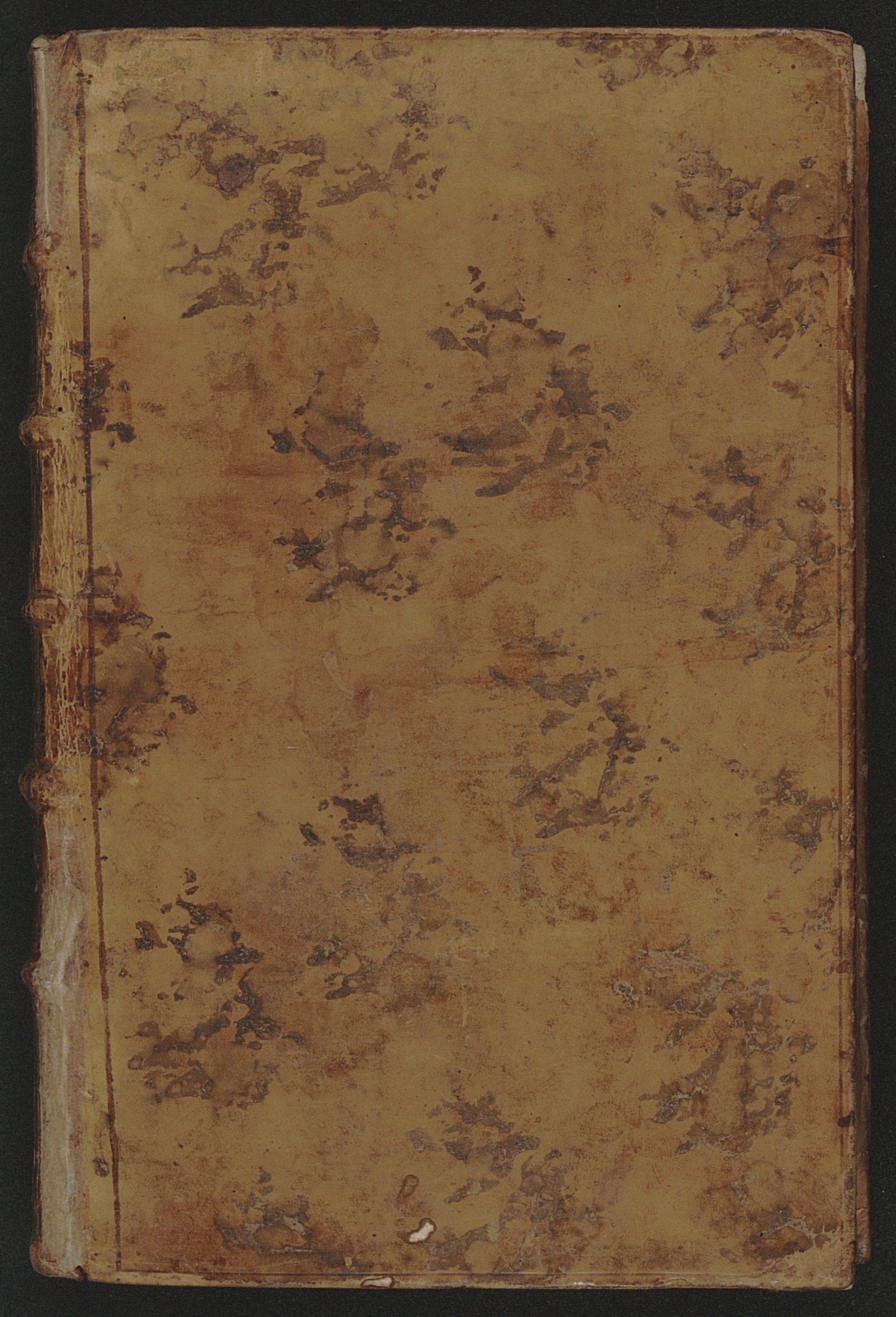
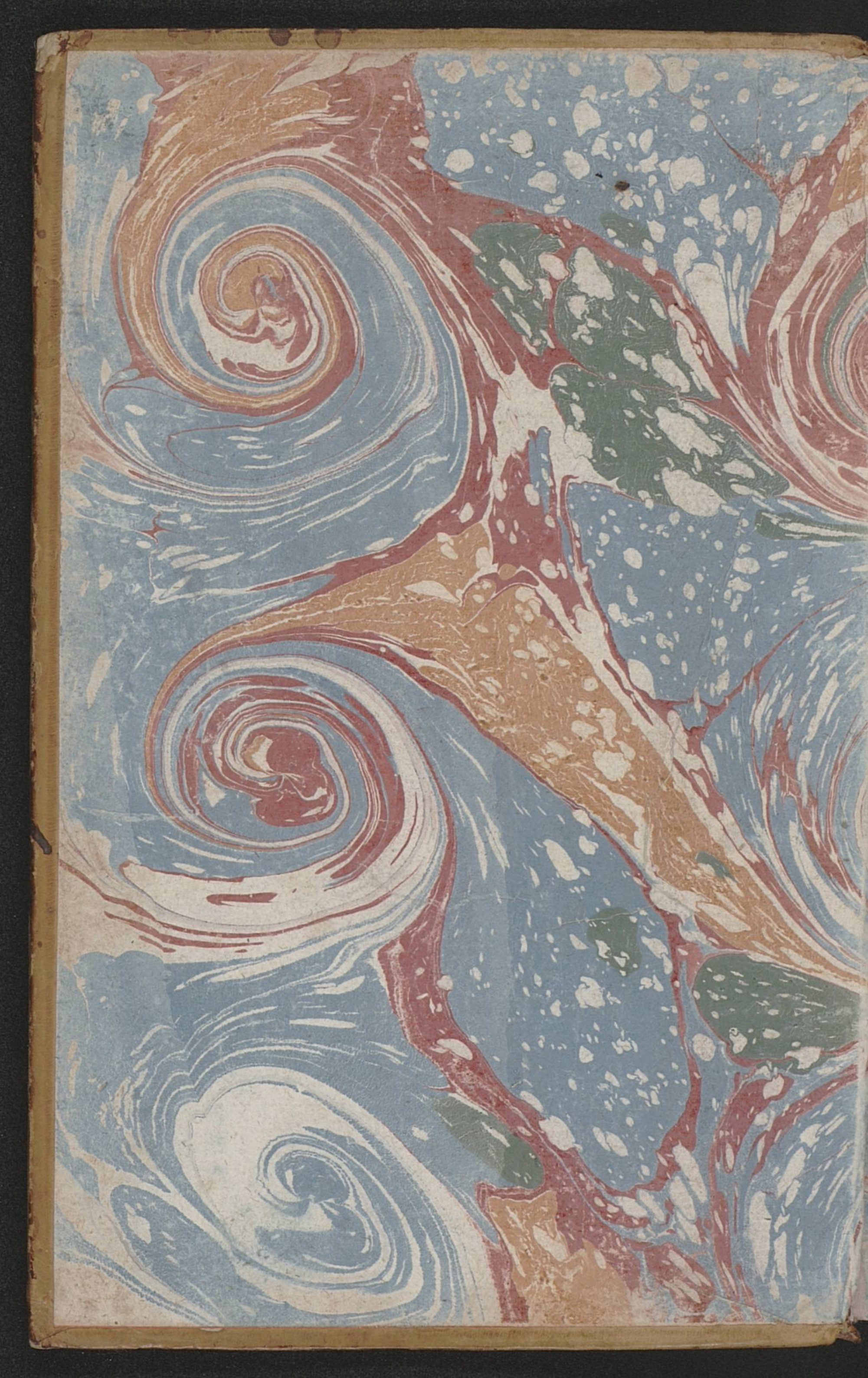
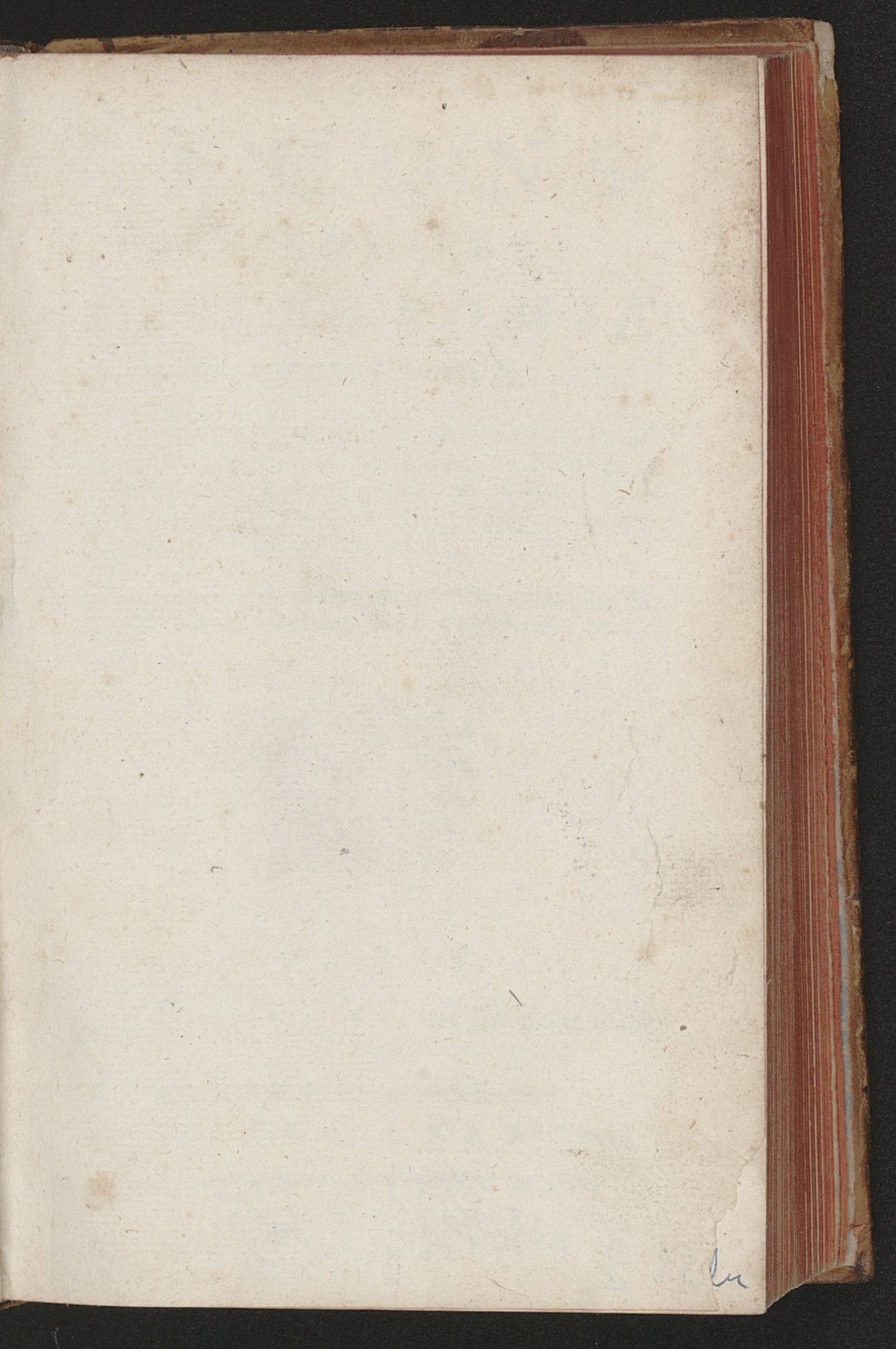






Montpellier 23 april 1581. 6.ll 12/.

RS



LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'ASTRONOMIE GÉOMÉTRIQUE ET PHYSIQUE.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Petersbourg, de Berlin & de Stockholm; des Sociétés Royales de Londres & de Gottingue, de l'Institut de Bologne; Professeur de Mathématiques au College Mazarin.*

Quatrieme Edition, augmentée de plusieurs notes, par M. DE LA LANDE, Professeur Royal d'Astronomie, &c.

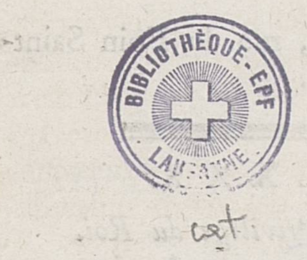


A PARIS,

Chez la Veuve DESAINT, rue du Foin Saint-Jacques.

M. DCC. LXXX. [1780]

Avec Approbation, & Privilége du Roi.


BIBLIOTHÈQUE-EPF
LAUSANNE



PRÉFACE

DE L'EDITEUR.

LEs Leçons d'Aſtronomie de M. de la Caille parurent pour la premiere fois en 1746, à Paris, chez Guerin & Delatour, en 355 pages; elles furent augmentées & réimprimées en 1755; enfin l'Auteur en donna une troiſieme Edition en 1761, à laquelle il n'a rien ajouté de plus, étant mort le 21 Mars 1762.

On peut voir l'éloge de cet habile Aſtronome dans les Mém. de l'Acad. pour 1762, dans le *Cœlum auſtrale Stelliferum*, publié en 1763, & où le P. Brotier a donné le Catalogue de tous ſes ouvrages, dans le *Journal Hiſtorique du Voyage au Cap de Bonne-Eſpérance*, publié par M. l'Abbé Carlier, à Paris, chez Guillyn 1763, où j'ai donné des détails aſſez conſidérables ſur tout ce qui concerne M. de la Caille; enfin dans les éloges faits par M. Bailly, à Paris, chez Delalain 1770.

On donne actuellement au Public l'Edition de 1761, qui manquoit depuis long-temps; mais reſpectant l'ouvrage de M. de la Caille, & le traitant comme un ancien dont le texte eſt ſacré, je n'y ai rien changé, pas même les choſes qui m'ont paru défectueuſes; je me ſuis contenté de les marquer dans des notes: j'ai indiqué de la même maniere les choſes qui ont été perfectionnées par les recherches & les obſervations nouvelles des Aſtronomes de-

puis 1761, & j'ai renvoyé aux ſources que l'on peut conſulter ſur ces différens objets. Enfin j'ai cru que quelques notes hiſtoriques ajouteroient de l'intérêt à la lecture d'un ouvrage qui eſt d'ailleurs ſi bien fait, mais je les ai rendues très-courtes pour ne point m'écarter du plan que l'Auteur avoit formé. Il pourroit arriver qu'il y eut quelques autres défectuoſités dans cet ouvrage : en général cette Edition eſt conforme à celle de 1761, & je ne l'ai pas examinée avec aſſez de peine pour en garantir tous les détails. M. le Chevalier d'Angos, Officier au Régiment de Navare, & Aſtronome habile, avoit préparé une édition de cet ouvrage, dans lequel les corrections & les additions néceſſaires pour en faire un livre véritablement élémentaire devoient doubler l'ouvrage, & en faire 2 vol. in-8°. Le Public jouira probablement de ce travail. Mais en attendant on a cru devoir ſatisfaire l'impatience de ceux qui déſiroient d'avoir l'ouvrage de la Caille, tel que lui-même l'avoit donné, & qu'on ne pouvoit plus ſe procurer. Cet ouvrage eſt à la vérité bien ſuccinct ; mais j'y ſuppléerai dans les notes par l'indication fréquente de tous les livres où l'on peut puiſer de plus grands détails.

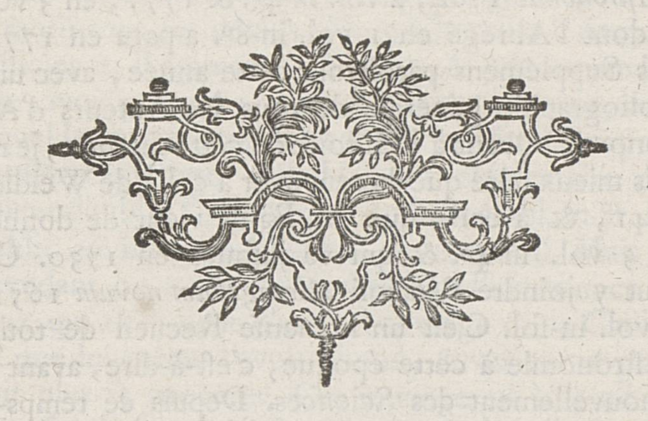
Le projet de M. le Chevalier d'Angos eſt celui que j'avois formé moi-même en 1762 : je voulois prendre pour texte le livre de la Caille, & le rendre plus élémentaire en y donnant plus d'étendue. Mais voyant dès la premiere page que l'Auteur ſuppoſoit un obſervateur placé dans le ſoleil, & qu'il faudroit une introduction aſſez longue pour en faire ſentir la néceſſité au Lecteur, je changeai de pro-

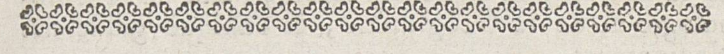
jet, & j'entrepris de faire un nouveau Traité, dans lequel je ſuppoſai l'obſervateur ſans aucune connoiſſance & ſans aucun ſecours, jettant les yeux ſur la ſphere céleſte, & cherchant à ſe rendre raiſon de ce qu'il voyoit; je ne le tranſporte au centre du ſoleil qu'après lui avoir montré la néceſſité de ce déplacement, par les ſeules obſervations faites à la ſurface de la terre.

C'eſt l'objet du livre que j'ai donné ſous le titre d'*Aſtronomie* 1764, 2 vol. in-4°. & 1771, en 3 vol. & dont l'Abrégé en 1 vol. in-8°. a paru en 1774. Les Supplémens paroîtront cette année, avec une Bibliographie générale de tous les Auteurs d'Aſtronomie. Quant à l'Hiſtoire de cette ſcience, je ne puis mieux faire que de renvoyer à celle de Weidler 1741, & à celle que M. Bailly vient de donner en 3 vol. in-4°. & qui va juſques en 1730. On peut y joindre Riccioli *Almageſtum novum* 1651, 2 vol. in-fol. C'eſt un immenſe Recueil de toute l'Aſtronomie à cette époque, c'eſt-à-dire, avant le renouvellement des Sciences. Depuis ce temps-là les Mémoires de l'Académie des Sciences & les Tranſactions Philoſophiques de la Société Royale de Londres, les Mémoires de Pétersbourg & de Berlin, &c. contiennent ſur-tout des recherches multipliées ſur toutes les parties de cette ſcience.

Quant à l'état actuel de l'Aſtronomie & des différens obſervatoires, & des recherches des différens Aſtronomes, on peut conſulter le *Recueil pour les Aſtronomes* & les *Nouvelles Littéraires*, par M. J. Bernoulli de Berlin, qui ſe

trouvent chez le même Libraire. Ces indications ſuffiſent pour guider ceux qui n'ayant vu d'autre Livre d'Aſtronomie que celui-ci, voudroient cependant aller plus loin.





AVERTISSEMENT.

L'ORDRE admirable des Aſtres, leurs mouvements ſi différents, le brillant des Etoiles, la profuſion avec laquelle la voûte céleſte en eſt parſemée dans une étendue immenſe, l'éclat du Soleil, ſes éclipſes, celles de la Lune, ſes phaſes, l'apparition & les phénomenes extraordinaires des Cometes, en général les ſcenes ſi remplies & ſi variées de ce grand Tableau mouvant, que le ciel offre à nos yeux, ont intéreſſé la curioſité des hommes de tous les temps & de tous les pays. Auſſi n'y a-t-il gueres d'hiſtoire plus ſinguliere que celle des préjugés que la vue de tant de merveilles a fait naître, des efforts prodigieux qu'on a faits pour en expliquer la ſtructure, & des ſuccès avec leſquels on en a repréſenté les mouvements, même ſans avoir approché de deviner le jeu des reſſorts ſecrets qui animent la machine céleſte. La certitude que nous avons aujourd'hui que tout s'exécute en vertu de deux forces ſeules aſſujetties à des loix fort ſimples, a fait diſparoître tout le merveilleux de l'aſſemblage de tant de pieces que les Anciens avoient cru néceſſaires; mais loin de diminuer par-là notre admiration, elle la porte de plus en plus au-delà de toute expreſſion, à meſure que nous approfondiſſons la nature de ces forces, que nous en analyſons les effets, que nous les combinons, & que nous comparons aux obſervations les réſultats de nos calculs.

La vue de ce ſpectacle ſi magnifique, & ces calculs ſi capables d'occuper entiérement les plus grands génies, ne ſeroient après tout qu'un pur amuſement, s'ils ne nous portoient ſans ceſſe à louer la grandeur & la ſageſſe de Dieu, à lui marquer notre reconnoiſſance, & ſi les Hommes n'avoient ſu en tirer parti pour le bien de la Société. L'Aſtronomie, en effet, eſt l'arbitre

de la diſtribution civile des temps, l'ame de la Chronologie & de la Géographie, & l'unique guide des Navigateurs.

L'Aſtronomie a fait des progrès étonnants depuis près de deux ſiecles; mais ſur-tout depuis l'invention des Lunettes, & celle des Horloges à Pendules, & par la protection particuliere que les Princes de l'Europe lui ont accordée. On ne peut nier que nos Rois ne ſe ſoient extrêmement diſtingués dans cette derniere partie, & qu'ils n'ayent été parfaitement ſecondés par les François. Et ſi l'Univers n'eſt pas redevable à la France d'avoir produit le grand génie qui a mis en évidence d'une maniere ſi ſublime les véritables loix que ſuivent tous les Corps céleſtes, on ne peut lui refuſer l'avantage d'avoir fourni ces Obſervations célebres, ſans leſquelles ces mêmes Loix que le fameux Képler avoit devinées, & ſur leſquelles il avoit fondé toutes ſes Théories, ſeroient peut-être encore miſes au nombre des ſavantes chimeres; ou leur conformité avec ce qui ſe paſſe dans le Ciel, ſeroit regardée comme l'effet d'un heureux hazard, qui pourroit ſe trouver démenti par la premiere Planete qu'on viendroit à découvrir dans la ſuite.

Les progrès de l'Aſtronomie ſont devenus plus rapides que jamais depuis environ une trentaine d'années, que l'on s'eſt appliqué à faire des obſervations avec une préciſion extraordinaire, & que la Phyſique céleſte de Newton a été enfin reçue dans tout le monde ſavant. La méthode de Newton ayant aboli cet uſage établi de tout temps parmi les Aſtronomes, que toute hypotheſe qui *ſauvoit les apparences* étoit admiſſible; & nous ayant appris à réduire toutes nos recherches, à l'analyſe des forces dont nous avons parlé, pluſieurs grands Géometres s'y ſont appliqués avec un ſuccès étonnant; ils ont expliqué & démontré les loix de toutes les inégalités qui avoient été apperçues dans le ciel; ils en ont prévu & démêlé un grand nombre d'autres, qui par leur petiteſſe & leur complication, échappoient

aux Obſervateurs les plus exacts ; en un mot, ils ont formé une Science preſque toute nouvelle, qui prend encore tous les jours de nouveaux degrés de perfection. Mais autant que ces recherches ſont délicates & profondes, autant eſt-il difficile d'en faire uſage, ſi l'on n'a déja une connoiſſance aſſez étendue des Mouvements céleſtes, de leurs calculs, & des Principes phyſiques qui ſervent de fondements aux nouvelles Théories.

Les Leçons contenues dans ce Livre, pourront ſervir d'introduction à la lecture des ſavants Ouvrages qui ont paru en grand nombre ſur différentes parties de l'Aſtronomie. Je les ai écrites principalement pour remplir le temps de mes exercices au College Mazarin, & parce que nous n'avions pas d'Eléments d'Aſtronomie, où le Géométrique & le Phyſique fuſſent joints enſemble avec quelque ordre. J'ai renfermé dans celui-ci tout ce qu'il y a de plus curieux dans l'Aſtronomie moderne, & j'ai tâché de l'expoſer de ſorte que la lecture inſpirât un eſprit de recherche, l'envie d'approfondir davantage, de voir par ſoi-même, & de calculer.

Ces Leçons ayant été faites pour être expliquées, je n'ai pas dû m'étendre en longs diſcours ; & comme les Matieres étoient fort abondantes, j'ai reſſerré quelques Démonſtrations. J'ai fait cependant mon poſſible pour éviter l'obſcurité, qui eſt preſque inſéparable de tout ce qui eſt abſtrait, & écrit d'un ſtyle concis. Pour cet effet j'ai appliqué des Exemples aux principales méthodes d'Obſervations & de Calculs ; j'ai mis en plus petit caractere, pour ne pas interrompre le diſcours, des Lemmes, des Théories particulieres, & des Remarques qui ſervent à éclaircir les ſujets que je traite, & qui épargnent aux Lecteurs la peine d'aller chercher ailleurs des principes étrangers à l'Aſtronomie, dont elle fait cependant quelque uſage conſidérable.

Puiſque ce Livre eſt deſtiné à mettre au fait des découvertes anciennes & modernes, & des meilleures méthodes qu'on doive ſuivre dans la pratique de l'Aſtronomie, on ſent bien que le fond ne peut être qu'un

extrait de ce que les plus estimés des Géometres & des Astronomes ont écrit sur ce sujet; de sorte qu'on ne doit attendre de moi, que l'ordre & le choix des Matieres. J'espere cependant que ceux qui savent ce que contiennent les Livres Elémentaires d'Astronomie publiés jusques ici, ne trouveront pas que celui-ci en soit une pure compilation. A la réserve de l'explication physique des mouvements de la Lune, dont le fond est en partie de s'Gravesande, tout le reste n'est autre chose que ce que j'ai pu mettre à la portée de ceux qui entendent les Eléments de Mathématiques que j'enseigne; je ne l'ai rédigé que sur les connoissances que j'ai acquises, tant par mes réflexions que par mes observations, depuis vingt-cinq ans que je fais mon unique occupation de l'Astronomie.

Parmi les Méthodes qu'on trouvera dans ce Livre, plusieurs sont fondées sur les *fausses positions*; ce qui les rend indirectes, & leur ôte cet air d'élégance qui plaît tant aux Géometres. Mais comme ces méthodes sont moins compliquées, plus intelligibles, & plus faciles dans la pratique, elles sont d'un très-grand secours dans l'Astronomie; & même lorsqu'elles vont au but par un chemin sûr & abrégé, elles sont préférables aux Méthodes directes, qui supposent souvent dans les Observations, une précision à laquelle il est impossible d'atteindre, & qui par-là deviennent inutiles dans la pratique.

Les citations qu'on trouve ici entre deux parentheses, si ce sont des chiffres seuls, sont relatives aux numeros de ces Leçons d'Astronomie : si ces chiffres sont précédés du mot abrégé *Trig.* elles renvoyent à quelque numéro du Traité préliminaire de Trigonométrie sphérique; s'ils sont précédés du mot abrégé *Elem.* elles renvoyent à quelque numéro des Eléments d'Algebre & de Géométrie que j'explique tous les ans, & aux Editions qui en ont été faites depuis 1747.

(*) Les deux Editions données ensuite par M. l'Abbé Marie, en 1770 & 1778 sont différentes, étant fort augmentées.

EXTRAIT des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 20 Août 1746.

MESSIEURS BOUGUER & MARALDI, qui avoient été nommés pour examiner les *Leçons d'Aſtronomie* de M. L'ABBÉ DE LA CAILLE, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion : en foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, ce 21 Août 1746.

GRANDJEAN DE FOUCHY, *Secretaire perpétuel de l'Acad. Roy. des Sciences.*

PRIVILÉGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénechaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien amés LES MEMBRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, nous ont fait expoſer qu'ils auroient beſoin de nos Lettres de Privilége pour l'impreſſion de leurs Ouvrages : A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Expoſans, Nous leur avons permis & permettons par ces Préſentes, de faire imprimer par tel Imprimeur qu'ils voudront choiſir, toutes les Recherches ou Obſervations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la compoſent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & jugé qu'ils ſont dignes de l'impreſſion, en tels volumes, forme, marge, caracteres, conjointement ou ſéparément, & autant de fois que bon leur ſemblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes, ſans toutefois qu'à l'occaſion des Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés il en puiſſe être imprimé d'autres qui ne ſoient pas de ladite Académie : Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance : comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter, leſdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit deſdits Expoſans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Expoſans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts. A la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément aux Réglemens de la Librairie, qu'avant de les expoſer en vente, les manuſcrits ou imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages ſeront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Garde des Sceaux de France, le Sieur Hue de Miroménil : & qu'il en ſera enſuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France,

le Sieur de Maupeou, & un dans celle dudit Sieur Hue de Miroménil; le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir lesdits Exposans & leurs ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Présentes, qui sera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée: & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Secretaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires. CAR tel est notre plaisir. DONNE à Paris le premier jour du mois de Juillet, l'an de grace mil sept cent soixante-dixhuit & de notre Regne le cinquieme. Par le Roi en son Conseil.

Signé, LE BEGUE.

Registré sur le Registre XX. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n°. 1477, fol. 582, conformément au Réglement de 1723, qui fait défenses, art. 4, à toutes personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres, pour les vendre, soit qu'ils s'en disent les Auteurs, ou autrement; & à la charge de fournir à la susd. Chambre huit Exemplaires de chacun prescrits par l'art. 108. du même Réglement. A Paris, le 20 Août 1778.

Signé, A. M. LOTTIN l'aîné, Syndic.



LEÇONS



LEÇONS ÉLÉMENTAIRES *D'ASTRONOMIE* GÉOMÉTRIQUE ET PHYSIQUE.

TRAITÉ PRELIMINAIRE *De la Trigonométrie Sphérique.*

ARTICLE PREMIER.

Définitions & notions de la Trigonométrie Sphérique.

1. LA Trigonométrie ſphérique eſt la ſcience du calcul des triangles formés ſur la ſurface d'un globe, par trois arcs de grand cercle.

Les petits cercles de la ſphere n'entrent pas dans le calcul de la Trigonométrie, parce qu'ils ne ſont pas d'un même rayon comme les grands cercles.

2. Si par le centre de la ſphere on conçoit un diametre élevé perpendiculairement au plan d'un grand cercle quelconque, ce diametre s'appelle l'*axe* de ce grand cercle, & ſes deux extrêmités s'appellent *les poles* de ce même grand cercle.

3. D'où il ſuit I°, que *depuis le pole d'un grand cercle juſqu'à un point quelconque de ſa circonférence, il y a toujours un arc de 90° de diſtance, en la meſurant ſur la ſurface de la ſphere.*

4. II°, Qu'*étant donné ſur une ſphere la circonférence d'un*

grand cercle, on en peut trouver les poles, en ſe ſervant d'un compas dont les jambes ſont recourbées en-dedans, (& que pour cette raiſon on appelle *Compas ſphérique.*) Car ayant écarté les pointes de ce compas, de ſorte qu'elles embraſſent préciſément le quart de la circonférence de ce grand cercle, il en faut poſer une ſur un point quelconque de cette circonférence, & avec l'autre pointe il faut décrire de part & d'autre un arc ſur la ſurface de la ſphere; il faut enſuite poſer la premiere pointe ſur un autre point de la circonférence, & avec l'autre pointe d'écrire de part & d'autre un nouvel arc; & les deux points d'interſection des quatre arcs décrits, donneront les deux poles du grand cercle donné, puiſque ce ſeront deux points oppoſés éloignés chacun de 90° de ce grand cercle.

5. Réciproquement *étant donné un des poles d'un grand cercle quelconque, pour décrire ce grand cercle ſur la ſurface de la ſphere*, il faut ouvrir le compas ſphérique, en ſorte que ſes pointes embraſſent préciſément le quart de la circonférence d'un des grands cercles de cette ſphere, ou d'un autre cercle quelconque décrit ſur un plan, mais dont le diametre ſoit égal à celui de la ſphere; & du pole donné comme centre, il faut décrire ſur la ſurface de la ſphere un cercle, qui ſera le grand cercle demandé.

6. III°. Que *c'eſt la même choſe de décrire un grand cercle, ou un arc quelconque de grand cercle, par le moyen de ſon pole, que ſi on le décrivoit en poſant une pointe de compas ordinaire au centre de la ſphere, & en ouvrant l'autre de la quantité du demi-diametre de la ſphere.* Ou plus généralement; *pour décrire ſur une ſphere un cercle ou un arc de cercle quelconque, on peut poſer la pointe fixe d'un compas ſur un point quelconque A pris dans l'axe de ce cercle.* Car alors on regarde ce cercle comme la baſe d'un cône droit, dont le point A eſt le ſommet, lequel par conſéquent eſt à égale diſtance de tous les points de la circonférence de ce cercle.

7. IV°, Que *chaque grand cercle de la ſphere a ſes deux poles particuliers*, & qu'*ainſi un point ne peut être un pole commun à pluſieurs grands cercles.*

8. THEOREME I. *Deux grands cercles quelconques décrits ſur la ſurface d'une ſphere, ſe coupent réciproquement en deux également.*

9. Car l'interſection de leurs plans eſt une droite qui paſſe par le centre de la ſphere; c'eſt donc un diametre commun à ces deux cercles. Or chaque diametre coupe ſon cercle en deux également.

10. Il ſuit de là, que *deux arcs de grands cercles moindres que de 180 degrés, ne peuvent, par leur rencontre, renfermer un eſpace ſur la ſurface de la ſphere.* Car s'ils ſe rencontrent par une de leurs extrêmités en y formant un angle, ils ne ſe peuvent plus rencontrer par l'autre extrêmité, qu'à la diſtance de 180°.

11. Définition. *La meſure d'un angle ſphérique eſt la même que celle de l'angle d'inclinaiſon des deux plans des grands cercles, dont l'interſection forme cet angle ſphérique.*

12. D'où il ſuit, I°. que *l'arc* FE *d'un grand cercle décrit du ſommet* B *d'un angle ſphérique quelconque* EBF (fig. 1) *comme pole, eſt la meſure de cet angle ſphérique.* Et en général *un arc quelconque* f e *décrit du ſommet*, B, *& intercepté entre les côtés* BF, BE *d'un angle ſphérique quelconque* FBE, *eſt la meſure de cet angle.* Car ſoit AEBCA le plan d'un demi-cercle, & AFBCA le plan de l'autre dont l'interſection commune forme l'angle ſphérique FBE : 1°, Il eſt clair (Elem. 630) que ſi du centre C on éleve ſur le plan AEBCA le rayon CE perpendiculaire à l'interſection AB, & ſur le plan AFBCA le rayon CF auſſi perpendiculaire à AB, l'angle FCE eſt égal à l'inclinaiſon des deux plans, & l'arc FE décrit du centre C, eſt la meſure de cette inclinaiſon : or (6) cet arc auroit pu être décrit de même du pole B; donc le point B eſt le pole de l'arc de grand cercle qui meſure l'angle ſphérique FBE. 2°, Si d'un autre point *c* quelconque pris ſur l'interſection AB, on éleve dans chaque plan les deux droites *c e*, *c f* perpendiculaires à cette interſection, elles ſeront dans un plan perpendiculaire à AB, & par conſéquent dans le plan d'un petit cercle parallele au plan du grand cercle dont B eſt le pole; AB ſera un axe commun à ces deux cercles : leur angle *e c f*, (& ſa meſure l'arc *f e* décrit du centre *c*) ſera auſſi égal à l'inclinaiſon des plans des deux demi-cercles (Elem. 630.) Or (6) l'arc *f e* peut ſe décrire du point B pris dans l'axe AB; donc un arc *f e*

quelconque décrit du ſommet B d'un angle ſphérique & intercepté entre ſes côtés EB, FB, eſt la meſure de cet angle.

13. II°, Que *ſi on prolonge les arcs qui forment un angle ſphérique quelconque* FBE, *juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent de nouveau en* A, *l'angle* FAE *eſt égal à l'angle* FBE, *& les prolongements de ces arcs en ſont les ſuppléments*. Car deux arcs ne pouvant ſe rencontrer de nouveau qu'à la diſtance de 180°, les arcs AFB, AEB ſont de 180°. Or B étant le pole de l'arc FE qui meſure l'angle FBE (12), cet arc FE eſt éloigné de 90° des points B & A; donc le point A eſt auſſi le pole de l'arc FE; donc l'arc FE meſure également les deux angles ſphériques FBE, FAE.

14. III°, *Que le point* F, *pris à la diſtance de 90° de l'interſection d'un cercle avec un autre, eſt le point où ce premier cercle s'écarte de l'autre le plus qu'il eſt poſſible, & réciproquement.*

15. IV°, *Les deux angles ſphériques oppoſés au ſommet, & formés par l'interſection de deux arcs, ſont égaux entr'eux.* Parce que (Elem. 632) l'inclinaiſon de deux plans eſt la même de part & d'autre de leur interſection.

16. V°, *Si un arc de cercle aboutiſſant ſur un autre arc y forme deux angles, l'un eſt toujours ſupplément de l'autre* (Elem. 631).

17. VI°, On peut conſidérer un triangle ſphérique ABC (fig. 8) comme la baſe d'une eſpece de pyramide ABCD, dont le ſommet D eſt au centre de la ſphere, & dont les faces CDB, CDA, ADB, ſont des ſecteurs terminés par les arcs BC, AC, AB, & par les rayons CD, AD, BD. Alors on voit que chaque angle du triangle ſphérique eſt égal à l'angle de l'inclinaiſon de ces faces, & chaque côté eſt égal à l'angle du ſecteur qu'il termine.

18. THEOR. II. *L'arc de grand cercle intercepté entre les deux poles de deux grands cercles, eſt égal à l'arc qui meſure l'inclinaiſon de ces deux cercles, ou l'angle ſphérique qu'ils forment par leur interſection.*

19. Car puiſque l'axe de chaque grand cercle eſt perpendiculaire à ſon plan, & paſſe par le centre de la ſphere, les plans de deux grands cercles ne peuvent être confondus,

que leurs axes ne le ſoient auſſi ; ils ne peuvent s'incliner l'un ſur l'autre que leurs axes ne s'inclinent d'autant ; donc l'angle des axes de deux grands cercles eſt égal à l'angle de l'inclinaiſon de leurs plans ; or l'angle de deux axes eſt meſuré ſur la ſphere par l'arc de grand cercle compris entre leurs extrêmités, c'eſt-à-dire, entre les poles de ces grands cercles : donc l'arc compris entre les poles de deux grands cercles, meſure l'angle ſphérique formé par leur interſection.

20. COROLLAIRE I. *Si un angle ſphérique eſt droit, l'arc qui forme un des côtés de cet angle paſſe par le pole de l'arc qui forme l'autre côté, & réciproquement.* Car ſi l'angle FBE eſt droit, (fig. 1) l'arc FE eſt de 90° ; donc le point E eſt éloigné de 90° de l'arc AFB ; donc il en eſt le pole : de même le point F eſt le pole de l'arc AEB.

21. II. *Pour abaiſſer d'un point donné un arc perpendiculaire à un arc donné*, il faut décrire un arc de grand cercle qui paſſe par le point donné, & par le pole de cet arc donné.

22. III. *Deux ou pluſieurs arcs qui ſont perpendiculaires à un autre arc, s'entrecoupent tous à ſon pole, ou à 90° de diſtance de cet arc : & réciproquement un arc qui coupe deux ou pluſieurs autres arcs à 90° de diſtance de leur interſection, les coupe tous perpendiculairement.*

ARTICLE II.

Propriétés générales des Triangles Sphériques.

23. THEOR. III. *SI des trois angles* A, B, C, (fig. 2) *d'un triangle ſphérique comme poles, on décrit trois arcs de cercle*, FE, FD, DE, *qui forment un nouveau triangle ſphérique* DEF, *chaque côté de ce nouveau triangle eſt le ſupplément de l'angle qui eſt ſon pole, & chaque angle de ce même triangle eſt le ſupplément du côté du triangle* ABC *qui lui eſt oppoſé.*

24. DEM. Puiſque A eſt le pole de l'arc FGHE, la diſtance des points A, E, eſt de 90° ; & puiſque C eſt le pole de l'arc DNME, la diſtance des points C, E, eſt de 90°.

Donc E eſt le pole de l'arc NACG. On prouve de même que F eſt le pole de l'arc IABH, & D le pole de l'arc MBCL.

25. Cela poſé, I°, l'arc FI eſt de 90° (3) auſſi-bien que DL; donc DL + FI = 180°, ou DL + FL + LI = 180°, ou DF + LI = 180°. Donc (Elem. 427) DF eſt le ſupplément de LI qui eſt la partie commune des quarts de cercle, DL, FI. Or cet arc LI ayant B pour pole, eſt la meſure de l'angle ABC: donc le côté DF eſt le ſupplément de l'angle ABC. On démontre de même que GH meſure de l'angle A eſt le ſupplément de l'arc FE, & que NM meſure de l'angle C, eſt le ſupplément de l'arc DE. II°, les arcs BI, AH étant chacun de 90°, leur partie commune AB eſt le ſupplément de l'arc total IABH, qui eſt la meſure de l'angle IFH. Donc le côté AB eſt le ſupplément de l'angle F. De même AC eſt le ſupplément de l'angle E, & BC le ſupplément de l'angle D.

26. COROLL. Si on joint deux angles correſpondants quelconques A, D par un arc de grand cercle AD, (lequel étant prolongé en P deviendra un arc perpendiculaire tiré de A ſur le côté oppoſé BC): ſi de plus on prolonge les arcs CA, FD juſqu'au point de concours K, on aura quatre triangles DAI, NAD, KAI, KND rectangles en I, N, dont les angles & les côtés ſeront les compléments des angles & des côtés du triangle ABC, ou bien ils leur ſeront égaux. Ainſi les côtés IA, ID ſont compléments de AB & de B, & l'hypoténuſe AD eſt complément de l'arc perpendiculaire AP. De même AN, DN ſont compléments de AC & de C: l'angle NDK eſt égal au côté BC, & l'angle DKN eſt complément de l'arc BQ tiré perpendiculairement de l'angle B ſur le côté oppoſé AC, à cauſe des points B, E qui ſont les poles des cercles dont DK, NK ſont des arcs (18). On peut dire la même choſe des arcs BA & DE, ou des arcs CB & FE prolongés juſqu'à un de leurs deux points de rencontre. Ces triangles rectangles peuvent ſervir au calcul du triangle obliquangle ABC.

27. THEOR. IV. *La ſomme de deux côtés quelconque d'un triangle ſphérique, eſt plus grande que le troiſieme côté.* Ce qui ſe démontre de la même maniere que dans les triangles rectilignes (Elem. 494).

28. THEOR. V. *Un côté quelconque de triangle ſphérique eſt toujours plus petit qu'un demi-cercle.*

29. DEM. Un triangle ſphérique eſt toujours formé par deux arcs de cercles, qui s'étant coupés, ſont rencontrés par un troiſieme arc avant que de ſe rejoindre : or ils ſe ſeroient rejoints à la diſtance de 180° (10) ; donc aucun d'eux ne peut être un arc de 180°.

30. THEOR. VI. *La ſomme des trois côtés d'un triangle ſphérique, eſt toujours moindre que de 360°.*

31. DEM. Soit le triangle ABC (fig. 3), ayant prolongé deux côtés quelconques AB, AC, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent en D, les arcs ACD, ABD, ſont chacun de 180°. Or (27) DC + DB eſt plus grand que BC : ſi on ajoute de part & d'autre AC + AB, on aura AC + AB + DC + DB, plus grand que BC + AC + AB, c'eſt-à-dire, que les deux demi-cercles ACD, ABD, ſont enſemble plus grands que la ſomme des trois côtés AC, AB, BC.

32. THEOR. VII. *La ſomme des trois angles d'un triangle ſphérique, eſt toujours plus grande que de 180°, & moindre que de 540°, ou que de ſix angles droits*, puiſqu'un angle ne peut aller juſqu'à 180°.

33. DEM. La ſomme des trois angles du triangle ABC (fig. 2) & des trois côtés du triangle DEF, fait trois fois 180° ou 540° (23) : mais la ſomme des trois côtés du triangle DEF, eſt moindre que de deux fois 180° (30). Donc la ſomme des trois angles du triangle ABC, eſt plus grande que de 180°.

34. COROLL. I. *Un triangle ſphérique peut avoir trois angles droits, & même trois angles obtus.*

35. COROLL. II. *Etant donnés deux angles d'un triangle ſphérique, on ne peut pas en conclure immédiatement le troiſieme.*

36. REMARQUE. Plus les arcs qui forment les côtés d'un triangle ſphérique ont de degrés, plus la ſomme des angles excede 180°. Car alors le triangle ſphérique s'éloigne d'autant plus d'être rectiligne.

37. THEOR. VIII. *Deux triangles ſphériques ſont égaux, 1°, ſi les trois côtés de l'un ſont égaux aux trois côtés homologues*

de l'autre, chacun à chacun. 2°, *S'ils ont deux côtés homologues égaux qui renferment un angle égal.* 3°, *S'ils ont deux angles homologues égaux qui comprennent un côté égal.* 4°, *Si les trois angles de l'un ſont égaux aux trois angles de l'autre chacun à chacun.*

38. La démonſtration des trois premiers cas eſt préciſément la même que pour les triangles rectilignes (Elem. 506 & ſuiv.) On trouvera plus bas celle du quatrieme cas, au n° 161.

39. THEOR. IX. *Dans tout triangle iſoſcele* ABC (fig. 4) *les deux angles* B, C, *oppoſés aux côtés égaux* AC, AB, *ſont égaux : & ſi un triangle a deux angles* B, C *égaux, les deux côtés oppoſés* AC, AB, *ſont égaux.*

40. DEM. I°, Ayant pris ſur AB & AC les arcs égaux AE, AD, & tiré les arcs BD, CE, il eſt clair (37) que les triangles ABD, AEC, ſont égaux, ayant les côtés égaux AE, AD, & AB, AC, qui renferment l'angle commun A; donc BD = EC. Donc les deux triangles EBC, BDC, qui ont deux côtés homologues égaux, ſavoir, BD = EC, & EB = DC, & le côté commun BC, ſont égaux entr'eux; donc l'angle B = C.

41. II°, Je dis que ſi l'angle B = C, le côté AC = AB. Car ayant pris CD = BE, & tiré B D, C E, les triangles BDC, BCE ſont égaux (37), ayant chacun un angle égal renfermé entre un côté commun BC & les côtés égaux BE, CD : donc, 1°, BD = EC; 2°, l'angle DBC = ECB, & par conſéquent l'angle DBA = ECA; 3°, l'angle BDC = BEC, & par conſéquent leurs ſuppléments BDA = CEA; donc les triangles BDA, CEA ſont égaux, puiſqu'ils ont outre un angle commun A, des angles égaux qui comprennent les côtés égaux BD, CE; donc AD = AE; donc AD + DC = AE + EB. Donc AC = AB.

42. COROLL. *Le triangle dont les trois angles ſont égaux, eſt équilatéral, & réciproquement* : mais le nombre de degrés de chaque angle dépend de celui des côtés égaux, & n'eſt pas conſtant comme dans les triangles rectilignes : ſeulement chaque angle eſt de plus de 60 degrés (31), & quand les trois côtés ſont de 90 degrés chacun, chaque an-

gle est aussi de 90° : quand les trois côtés excédent 90 degrés, chaque angle est de plus de 90°.

43. THEOR. X. *Dans tout triangle sphérique* ABC (fig. 5) *le plus grand côté* BC *est opposé au plus grand angle* A, *&* *le plus petit côté* AB *au plus petit angle* C.

44. DEM. Faites l'angle BAD = ABD, alors (39) AD = BD, donc le côté BC = AD + DC. Or (27) AD + DC est plus grand que AC. Donc BC côté opposé au plus grand angle A, est plus grand que AC côté opposé à un angle moindre B, &c.

ARTICLE III.

Formules Trigonométriques.

45. LA plupart des Regles de Calculs Astronomiques étant fondées sur les propriétés des sinus & tangentes : voici les formules qui expriment celles dont on fait le plus d'usage (*a*).

46. Pour abréger, *s* ou *sin* exprimera le sinus, *cos* le cosinus, *tang* la tangente, & *cot* la cotangente ; R ou 1, le rayon ou sinus total.

47. Dans toutes ces formules A & B désignent deux arcs de cercle ou deux angles quelconques dont le plus grand est A ; on les suppose tous deux moindres que de 90 degrés : en sorte que tant que les angles ou les arcs auxquels on appliquera ces formules seront moindres que de 90°, il n'y aura rien à changer dans les signes de ces formules : mais lorsque l'un des deux excédera 90°, il faudra changer le signe de son cosinus, de sa tangente & de sa cotangente. Car en considérant la suite de ces lignes dans un cercle divisé en ses 360 degrés, on voit I. Que depuis 0° jusqu'à 180° les sinus sont situés de même par rapport au diametre qui joint ces deux points; qu'ils croissent depuis 0 jusqu'à 1, qui est leur *maximum* qu'ils atteignent à 90°, puis décroissent jusqu'à 0° qu'ils atteignent à 180°; qu'alors ils prennent une situation opposée

---

Notes de l'Editeur.

(*a*) Ce sont les Géometres sur-tout qui dans l'Analyse des problêmes rélatifs aux arcs célestes ont besoin de ces formules ; la connoissance de l'Astronomie & la pratique de cette science n'exigent que les analogies de l'Article IV & VI, n°. 94 & suiv. 175 & suiv. pour résoudre les triangles sphériques ; & il est même inutile de les retenir par cœur. Ainsi après avoir lu les premieres pages de la Trigonométrie Sphérique, on peut très-bien passer à la premiere Section, ou à l'Astronomie solaire. C'est la raison qui m'a fait placer à la fin de mon *Astronomie* tout ce qui regarde la Trigonométrie sphérique, trop capable de rebuter ceux qui commencent l'Astronomie.

croissant jusqu'à 1 à 270°, puis décroissant jusqu'à 0 à 360°. Ils ne changent donc de signe qu'aux passages par les points de 0° & 180°. II, Les cosinus, au contraire, sont dans leur *maximum* aux points 0° & 180°, & deviennent 0, puis changent de situation dans les points de 90° & de 270°. III, Si on compte les tangentes sur une même droite infiniment prolongée de part & d'autre depuis le point 0°, & les cotangentes sur une même droite infiniment prolongée de part & d'autre du point de 90°, alors on voit aisément qu'elles doivent changer de signe à chaque passage par les points 0°, 90°, 180°, 270°, 360° dans lesquels elles se trouvent = 0, ou = ∞.

48. On a supposé ici R = 1; ce qui a fait supprimer le sinus total presque par-tout; mais il est aisé de le faire entrer dans telle formule qu'on voudra, soit en le mettant, ou son quarré, ou son cube, pour coefficient, ou pour dénominateur à un terme quelconque.

Formules.

49. I. $\pm s\frac{1}{2}A = \pm cos\frac{1}{2}suppl\,A$: de même $\pm t\frac{1}{2}A = \pm cot\frac{1}{2}suppl\,A$.

50. II. $sA = cos\,A \times tang\,A = \frac{cos\,A}{cot\,A} = \frac{tang\,A}{sec\,A}$.

51. III. $Cos\,A = sA \times cot\,A = \frac{sA}{tang\,A} = \frac{s\,2\,A}{2\,sA} = R^2 - 2s^2\frac{1}{2}A$.

52. IV. $Tang\,A = \frac{sA}{cos\,A} = \frac{R^2}{cot\,A} = sA \times sec\,A$.

53. V. $Cot\,A = \frac{cos\,A}{sA} = \frac{R^2}{tang\,A}$.

54. VI. $Cot\,A \times tang\,A = R^2$.

55. VII. $\frac{1}{2}s\,2\,A = cos\,A \times sA = \frac{s^2\,A}{tang\,A} = s^2\,A \times cot\,A$

56. VIII. $R \pm cos\,A = 2\,cos^2\,\frac{1}{2}A = \frac{sA}{tang\,\frac{1}{2}A}$

57. IX. $R - cos\,A = 2\,s^2\,\frac{1}{2}A = sA \times tang\,\frac{1}{2}A$

58. X. $\frac{R - cos\,A}{R + cos\,A} = tang^2\,\frac{1}{2}A$, ou bien $\frac{R + cos\,A}{R - cos\,A} = cot^2\,\frac{1}{2}A$

59. XI. $\frac{R + tang\,A}{R - tang\,A} = \frac{R}{tang\,(45° - A)} = tang\,(A + 45°)$. Et si A excede 45°, on a, $\frac{tang\,A + R}{tang\,A - R} = \frac{R}{tang\,(A - 45°)}$

60. XII. $\frac{cos\,A - sA}{cos\,A + sA} = tang\,(45° - A)$. Et si A excede 45°, $\frac{sA - cos\,A}{sA + cos\,A} = tang\,(A - 45°.)$

61. XIII. $\frac{sA}{R + cos\,A} = \frac{R - cos\,A}{sA} = tang\,\frac{1}{2}A$

62. XIV. $\int(A \pm B) = \int A \times cos\int B \pm \int B \times cos\int A$

63. XV. $cos\int(A \pm B) = cos\int A \times cos\int B \mp \int A \times \int B$

64. XVI. $\dfrac{\int(A + B)}{\int(A - B)} = \dfrac{tang\ A + tang\ B}{tang\ A - tang\ B}$.

65. XVII. $\dfrac{cos\int(A + B)}{cos\int(A - B)} = \dfrac{cot\ A - tang\ B}{cot\ A + tang\ B} = \dfrac{cot\ B - tang\ A}{cot\ B + tang\ A}$.

66. XVIII. $\int A + \int B = 2 \times \int(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cos\int(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$

67. XIX. $\int A - \int B = 2 \times cos\int(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \int(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$

68. XX. $cos\int A + cos\int B = 2 \times cos\int(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cos\int(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$

69. XXI. $cos\int B - cos\int A = 2 \times \int(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \int(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$

70. XXII. $\dfrac{\int A + \int B}{\int A - \int B}\ tang(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cot(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = \dfrac{tang(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)}{tang(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$.

71. XXIII. $\dfrac{\int A + \int B}{cos\int A + cos\int B} = tang(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$

72. XXIV. $\dfrac{\int A + \int B}{cos\int B - cos\int A} = cot(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$

73. XXV. $\dfrac{\int A - \int B}{cos\int A + cos\int B} = tang(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$

74. XXVI. $\dfrac{\int A - \int B}{cos\int B - cos\int A} = cot(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$

75. XXVII. $\dfrac{cos\int B - cos\int A}{cos\int B + cos\int A} = tang(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times tang(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = \dfrac{tang(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)}{cot(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)}$.

76. XXVIII. $\int A \times \int B = \frac{1}{2}cos\int(A - B) - \frac{1}{2}cos\int(A + B)$.

77. XXIX. $\int A \times cos\int B = \frac{1}{2}\int(A + B) + \frac{1}{2}\int(A - B)$.

78. XXX. $cos\int A \times \int B = \frac{1}{2}\int(A + B) - \frac{1}{2}\int(A - B)$.

79. XXXI. $cos\int A \times cos\int B = \frac{1}{2}cos\int(A + B) + \frac{1}{2}cos\int(A - B)$.

Démonſtrations.

80. La formule I, eſt évidente en conſidérant que ſi A = 40°, le ſinus & la tangente de ſon ſupplément 140 ſont négatifs. Mais ſi on prend les moitiés 20 & 70 ce ſont des arcs compléments les uns des autres, & moindres que de 90 degrés.

81. Les formules II, III, IV, V, VI & XIV, ſont démontrées dans les Eléments pour la Trigonométrie rectiligne.

82. Dans la fig. 11 à l'inſpection de laquelle on voit le nom & la valeur des lignes, les triangles rectangles ſemblables APK, PCD donnent AP : PK : : PC ou 2 PK : PD $= \dfrac{2PK^2}{AP}$. C'eſt la formule VIII.

83. Les triangles ICD, APK donnent AP : AK : : IC ou 2AK : ID $= \dfrac{2AK^2}{AP}$. C'eſt la premiere partie de la formule IX.

84. Les triangles ICD, PIH, PCD donnent CD : ID : : PI : IH ou 2A*h*; c'eſt-à-dire, $\int A : R - cos\int A : : 2R : 2tang\frac{1}{2}A$: ce qui donne la

seconde partie de la formule IX. On a de même PD : CD : : PI : IH ou $R + cos\,A : s\,A :: 2R : 2\,tang\,\frac{1}{2}A$. Ce qui donne la seconde partie de la formule VIII, & les formules XIII & X.

85. Puisque (Elem. 740) $cos^2 = R^2 - s^2$, on a (62) ...... $cos\,(A \pm B)^2 = R^2 - \frac{(s\,A \times cos\,B \mp cos\,A \times s\,B)^2}{R^2} = \ldots\ldots$ $\frac{R^4 - s^2 A \times cos^2 B - cos^2 A \times s^2 B \mp 2\,s\,A \times cos\,A \times s\,B \times cos\,B}{R^2}$. Or $R^2 = s^2 A + cos^2 A$, & $R^2 = s^2 B + cos^2 B$; donc $R^4 = s^2 A \times s^2 B + cos^2 A \times s^2 B + s^2 A \times cos^2 B + cos^2 A \times cos^2 B$: substituant donc cette valeur à la place de R^4, & réduisant, puis extrayant les racines, on a la formule XV.

86. De la formule XIV on conclud que $s\,(A + B) : s\,(A - B) :: s\,A \times cos\,B + cos\,A \times s\,B : s\,A \times cos\,B - cos\,A \times s\,B$; divisant cette seconde raison par $cos\,A \times cos\,B$, on a : : $\frac{s\,A \times cos\,B}{cos\,A \times cos\,B} + \frac{cos\,A \times s\,B}{cos\,A \times cos\,B} : \frac{s\,A \times cos\,B}{cos\,A \times cos\,B} - \frac{cos\,A \times s\,B}{cos\,A \times cos\,B}$. Réduisant & mettant $tang = \frac{s}{cos.}$, elle se réduit à : : $tang\,A + tang\,B : tang\,A - tang\,B$: c'est la formule XVI. Et par un même raisonnement on déduira la formule XVII de la formule XV.

87. Dans la fig. 12 soit KR le plus petit arc que nous avons appellé B, & KD le plus grand appellé A; ayant abaissé sur DE la perpendiculaire RH, la construction fait voir que l'arc $RG = A + B$, $DR = A - B$, $IG = s\,A + s\,B$, $IH = cos\,A + cos\,B$, $ID = s\,A - s\,B$, $IR = cos\,B - cos\,A$. Ayant divisé en deux également les arcs RG, DR aux points S, P, & fait passer par R la tangente LM, la construction fait voir que $RM = tang\,(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, $RL = tang\,(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$, $ST = s\,(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, $CT = cos\,(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$, $RQ = s\,(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$, $CQ = cos\,(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$; enfin $HG = 2\,cos\,(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$, car l'arc $HV = RK = GSK - DR$, l'arc $VGK = 180^o$; donc l'arc $GVH = HV + VGK - GSK = GSK - DR + 180^o - GSK = 180^o - DR$: donc la corde $HG = 2\,s\,(90^o - \frac{1}{2}DR) = 2\,cos\,(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

88. Cela posé, les triangles rectangles CST, CRM, DIR, HIG, sont semblables, aussi bien que IGR, IDH, CRL. On a donc

ID : IR : : CR : RM. C'est la formule XXVI.
ID : IG : : RL : RM. C'est la formule XXII.
IH : IG : : CR : RM. C'est la formule XXIII.
IG : IR : : CR : RL. D'où on tire la formule XXIV.
IH : ID : : CR : RL. D'où suit la formule XXV.
IG : HG : : ST : CS. D'où suit la formule XVIII.
DI : DR : : CT : CS. D'où suit la formule XIX.
HI : HG : : CT : CS. D'où suit la formule XX.
RI : DR : : ST : CS. D'où suit la formule XXI.

89. La formule XXVII se tire aisément des formules XXIII & XXIV.

qui donnent $\frac{cos\,B + cos\,A}{sA + sB} : \frac{cos\,B - cos\,A}{sA + sB} :: cot(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : tang(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$; ôtant donc de la premiere raison le dénominateur $sA + sB$, & mettant la proportion en équation, on a la formule XXVII.

90. La formule XII se tire de la formule XXVII en supposant $B = 90° - A$, ce qui donne $\frac{1}{2}B = 45° - \frac{1}{2}A$ & $cos\,B = sA$, $sB = cos\,A$: la proportion $cos\,B + cos\,A : cos\,B - cos\,A :: cot\,(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : tang\,(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ devient $sA + cos\,A : sA - cos\,A :: cot\,45°$ ou $R : tang\,(\frac{1}{2}A - 45° + \frac{1}{2}A)$ ou $tang\,(A - 45°)$.

91. La formule XI se tire de la formule XII. Car puisque $\frac{cos\,A + sA}{cos\,A - sA} = \frac{R}{tang\,(45° - A)}$, on a $cos\,A + sA = cos\,A \times \frac{R}{tang\,(45° - A)} - sA \times \frac{R}{tang\,(45° - A)}$ divisant tout par $cos\,A$, réduisant, & mettant $R = \frac{cos\,A}{cos\,A}$, & $tang\,A = \frac{sA}{cos\,A}$, on a $R + tang\,A = \frac{R}{tang\,(45° - A)} - \frac{tang\,A}{tang\,(45° - A)}$, d'où on tire la formule XI.

92. La formule XXVIII se tire de la formule XV, qui donne $cos\,(A + B) = cos\,A \times cos\,B - sA \times sB$; & $cos\,(A - B) = cos\,A \times cos\,B + sA \times sB$, d'où on tire $2sA \times sB = cos\,(A - B) - cos\,(A + B)$, & par conséquent $sA \times sB = \frac{1}{2}\,cos\,(A - B) - \frac{1}{2}\,cos\,(A + B)$.

93. Les formules XXIX, XXX & XXXI se déduisent précisément de même des formules XIV & XV ; & la formule VII de la formule XXX, en faisant $B = A$.

ARTICLE IV.

Analogies pour le calcul des Triangles Sphériques rectangles.

94. POUR résoudre par le calcul toutes sortes de triangles sphériques rectangles, il faut poser A à l'angle droit, B & C indifféremment aux deux autres angles, puis faire les analogies indiquées dans la Table suivante.



TABLE pour la solution de tous les cas possibles des Triangles sphériques ABC, *rectangles en* A.

	Etant donnés	trouver	ANALOGIES.	Cas auxquels ce qu'on cherche est moindre que de 90°.
95		BC	R : *cos* AB : : *cos* AC : *cos* BC.	si AB & AC sont de même espece
96	AB, AC	B	R : *sin* AB : : *cot* AC : *cot* B.	si AC est moindre que de 90°.
97		C	R : *cot* AB : : *sin* AC : *cot* C.	si AB est moindre que de 90°.
98		AC	*Cos* AB : R : : *cos* BC : *cos* AC.	si BC & AB sont de même espece
99	AB, BC	B	R : *tang* AB : : *cot* BC : *cos* B.	si BC & AB sont de même espece
100		C	*Sin* BC : *sin* AB : : R : *sin* C.	si AB est moindre que de 90°.
101		AC	R : *sin* AB : : *tang* B : *tang* AC.	si B est moindre que de 90°.
102	AB, B	BC	R : *cot* AB : : *cos* B : *cot* BC.	si AB & B sont de même espece
103		C	R : *cos* AB : : *sin* B : *cos* C.	si AB est moindre que de 90°.
104		AC	R : *tang* AB : : *cot* C : *sin* AC.	douteux.
105	AB, C	BC	*Sin* C : *sin* AB : : R : *sin* BC.	douteux.
106		B	*Cos* AB : *cos* C : : R : *sin* B.	douteux.
107		AB	*Cos* AC : *cos* BC : : R : *cos* AB.	si BC & AC sont de même espece
108	AC, BC	B	*Sin* BC : *sin* AC : : R : *sin* B.	si AC est moindre que de 90°.
109		C	R : *tang* AC : : *cot* BC : *cos* C.	si AC & AB sont de même espece
110		AB	R : *tang* AC : : *cot* B : *sin* AB.	douteux.
111	AC, B	BC	*Sin* B : *sin* AC : : R : *sin* BC.	douteux.
112		C	*Cos* AC : *cos* B : : R : *sin* C.	douteux.
113		AB	R : *sin* AC : : *tang* C : *tang* AB.	si C est moindre que de 90°.
114	AC, C	BC	R : *cot* AC : : *cos* C : *cot* BC.	si AC & C sont de même espece.
115		B	R : *cos* AC : : *sin* C : *cos* B.	si AC est moindre que de 90°.
116		AB	R : *tang* BC : : *cos* B : *tang* AB.	si BC & B sont de même espece.
117	BC, B	AC	R : *sin* BC : : *sin* B : *sin* AC.	si B est moindre que de 90°.
118		C	R : *cos* BC : : *tang* B : *cot* C	si BC est moindre que de 90°.
119		AB	R : *sin* BC : : *sin* C : *sin* AB	si C est moindre que de 90°.
120	BC, C	AC	R : *tang* BC : : *cos* C : *tang* AC	si BC & C sont de même espece.
121		B	R : *cos* BC : : *tang* C : *cot* B.	si BC & C sont de même espece.
122		AB	*Sin* B : *cos* C : : R : *cos* AB.	si C est moindre que de 90°.
123	B, C	AC	*Sin* C : *cos* B : : R : *cos* AC.	si B est moindre que de 90°.
124		BC	R : *cot* B : : *cot* C : *cos* BC	si B & C sont de même espece.

Remarques sur l'usage de cette Table.

125. L'usage de cette Table est facile à comprendre, il suffit d'en expliquer la premiere ligne. Elle exprime qu'*étant donnés les deux côtés* AB *&* AC d'un triangle sphérique rectangle en A, *pour en trouver l'hypoténuse* BC, *il faut faire cette analogie : comme le rayon est au sinus de complément du côté* AB ; *ainsi le sinus de complément du côté* AC, *est au sinus de complément de l'hypoténuse* BC. Mais parce que les sinus, cosinus, tangentes & cotangentes, n'appartiennent pas plus à des arcs moindres que de

90° qu'à leurs suppléments (Elem. 727), on a marqué dans la cinquieme colonne, que *ce qu'on cherche*, c'est-à-dire, BC dans cet exemple, *est moindre que de* 90°, *si* AB & AC *sont tous deux de la même espece*, c'est-à-dire, *ou tous deux plus grands ou tous deux plus petits que de* 90°. Et les cas qui sont marqués *douteux*, sont ceux auxquels les données ne suffisent pas pour déterminer si ce qu'on cherche est plus grand ou plus petit que de 90°.

Démonstrations des Analogies précédentes.

126. THEOR. XI. *Dans le triangle rectangle* ABC (*fig.* 7) *si on prolonge les côtés* BC *en* G, AC *en* I, BA *en* D, *de sorte que* CG, CI, BD *soient de* 90°, *si ensuite du pole* B *on décrit l'arc* HED, *en sorte que* EH *soit de* 90°; *& de* C *comme pole l'arc* HIG; *par cette construction on forme deux triangles rectangles* CEF, HIF, *dont les parties sont égales à celles du triangle* ABC, *ou bien elles en sont les compléments.*

127. DEM. Car I°, B étant le pole de FED, il suit que BE & BD sont des arcs de 90° perpendiculaires sur FED : les arcs FED, FCA étant perpendiculaires sur BAD, ils sont aussi de 90°, & leur point F est le pole de BAD ; donc le triangle FCE est rectangle en E; son angle F mesuré par AD est égal au complément du côté BA ; le côté FE est le complément de (ED mesure de) l'angle B; l'hypoténuse FC est le complément de CA, & le côté CE est le complément de BC.

128. II°, L'arc HE étant de 90° & perpendiculaire sur CEG, le point H en est le pole (20), & l'arc HIG est aussi de 90° (3). Les arcs CI, CG, étant aussi de 90°, sont perpendiculaires sur HIG; donc le triangle HIF est rectangle en I, son côté HI est complément (de IG mesure) de l'angle BCA, son côté IF = CA, (puisque CA, IF ont CF pour complément commun) son hypoténuse HF est égale à l'angle ABC par la même raison; son angle FHI est égal à l'hypoténuse BC, & son angle HFI est égal au complément du côté AB.

129. THEOR. XII. *Dans tout triangle rectangle on a toujours cette analogie : comme le rayon est au sinus de l'hypoténuse; ainsi le sinus d'un des angles obliques, est au sinus du côté opposé.*

130. DEM. Soit le triangle sphérique ABC (fig. 8) rectangle en A, & formé par les trois plans ou secteurs DCB, DBA, DAC. D'un point F quelconque pris dans l'intersection DA des plans perpendiculaires DBA, DCA, élevez-lui la perpendiculaire FG, & par les points F, G, faites passer un plan GFE perpendiculaire à l'intersection DB des plans DCB, DBA, & l'angle FEG sera la mesure (Elem. 630) de l'inclinaison de ces plans ou de l'angle sphérique ABC. Cela posé dans le triangle EFG rectangle en F (à cause de GF perpendiculaire au plan DAB), on a (Elem. 747) FG : GE : : *sin* FEG : R. Et dans

le triangle FDG rectangle en F, on a de même GD : FG : : R : *sin* GDF. Donc (Elem. 307) FG × GD : GE × FG : : *sin* FEG × R : R × *sin* GDF. Et en divisant la premiere raison par FG, & la seconde par R (Elem. 296) on a GD : GE : : *sin* FEG : *sin* GDF. Or dans le triangle DEG rectangle en E, on a GD : GE : : R : *sin* GDE. Donc R : *sin* GDE : : *sin* FEG : *sin* GDF. C'est-à-dire, le rayon est au sinus de l'hypoténuse BC, comme le sinus de l'angle ABC, est au sinus du côté opposé AC.

131. COROLL. I. Cette analogie est celle du N. 117 : & en prenant C pour l'angle oblique, c'est celle du N. 119. En la renversant on a celles des NN. 108 & 111; & en renversant celle du N. 119, on a celles des NN. 100 & 105.

132. II. Dans le triangle rectangle FCE (fig. 7) suivant ce théorême on a R : *sin* FC : : *sin* CFE : *sin* CE, & en substituant les quantités équivalentes du triangle ABC, on a (126) R : *cos* AC : : *cos* AB : *cos* BC. C'est l'analogie du N. 95; & en renversant on a celles des NN. 98 & 107.

133. III. Dans ce même triangle FCE on a encore R : *sin* FC : : *sin* C : *sin* FE. Ou en substituant, R : *cos* AC : : *sin* C : *cos* B. C'est celle du N. 115; en renversant on a celles des NN. 112 & 123.

134. IV. Dans le triangle HIF on a R : *sin* HF : : *sin* F : *sin* HI, & en substituant, R : *sin* B : : *cos* AB : *cos* C. C'est celle du N. 103. En renversant on a celles des NN. 106 & 122.

135. THEOR. XIII. *Dans tout triangle rectangle on a : Comme le rayon est au sinus d'un des côtés; ainsi la tangente d'un des angles obliques, est à la tangente du côté opposé.*

136. DEM. Tout restant comme dans la démonstration précédente, dans le triangle FED (fig. 8) rectangle en E, on a (Elem. 747) FE : FD : : *sin* FDE : R. Et dans le triangle GFD rectangle en F, on a (Elem. 748) FD : FG : : R : *tang* FDG. Donc FE × FD : FD × FG : : *sin* FDE × R : R × *tang* FDG, ou FE : FG : : *sin* FDE : *tang* FDG. Or dans le triangle FGE rectangle en F, on a FE : FG : : R : *tang* FEG. Donc R : *tang* FEG : : *sin* FDE : *tang* FDG. C'est-à-dire, le rayon est à la tangente de l'angle ABC, comme le sinus du côté AB est à la tangente du côté AC.

137. COROLLAIRE. 1°. Cette analogie est celle du N. 101 : & en prenant l'angle C pour l'angle oblique; on a celle du N. 113.

138. 2°. En renversant celle du N. 101, on a *tang* B : R : : *tang* AC : *sin* AB; mais (Elem. 737) *tang* B : R : : R : *cot* B. Donc R : *cot* B : : *tang* AC : *sin* AB. Et c'est celle du N. 110.

139. 3°. En renversant celle du N. 113, on a *tang* C : R : : *tang* AB : *sin* AC. Mais (Elem. 737) *tang* C : R : : R : *cot* C. Donc R : *cot* C : : *tang* AB : *sin* AC. C'est celle du N. 104.

140. 4°. Dans le triangle FCE (fig. 7) on a selon ce théorême, R : *sin* FE : : *tang* F : *tang* CE : & en substituant (126) R : *cos* B : : *cot* AB : *cot* BC : & c'est l'analogie des NN. 102 & 114.

141. 5°. Dans le même triangle FCE, on a encore R : *sin* CE : :

tang

tang C : *tang* FE ; & en substituant R : *cos* BC : : *tang* C : *cot* B ; c'est celle des nos 121 & 118.

142. 6°. Dans le triangle HIF on a aussi R : *sin* HI : : *tang* H : *tang* IF ; & en substituant R : *cos* C : : *tang* B C : *tang* AC. C'est celle des nos 120 & 116.

143. 7°. Dans le même triangle HIF, on a encore R : *sin* IF : : *tang* F : *tang* HI. Et en substituant R : *sin* AC : : *cot* AB : *cot* C. C'est celles des nos 97 & 96.

144. 8°. En renversant l'analogie du N. 102, on a *cot* AB : R : : *cot* BC : *cos* B. Or (Elem. 737) *cot* AB : R : : R : *tang* AB. Donc R : *tang* A B : : *cot* BC : *cos* B C'est celle du N. 99.

145. 9°. En renversant celle du N. 121, on a *tang* C : R : : *cot* B : *cos* BC. Or *tang* C : R : : R : *cot* C. Donc R : *cot* C : : *cot* B : *cos* BC. C'est celle du N. 124.

146. 10°. Enfin en renversant celle du N. 120, on a *tang* BC : R : : *tang* AC : *cos* C. Or *tang* BC : R : : R : *cot* BC. Donc R : *cot* BC : : *tang* AC : *cos* C. C'est celle du N. 109.

Démonstrations des rapports de grandeur que les angles & les côtés ont entr'eux, & qui sont exprimés dans la Table à côté de chaque analogie.

147. THEOR. XIV. *Chacun des deux angles obliques d'un triangle rectangle, est de même espece que son côté opposé*, c'est-à-dire, moindre que de 90°, si le côté opposé est moindre que de 90° ; & plus grand que de 90°, si le côté est plus grand que de 90°.

148. DEM. Dans le triangle ABC (fig. 9.) rectangle en A, je dis que si AB est moindre que de 90°, l'angle ACB est aigu. Prolongez A B en D, en sorte que AD soit de 90°. Alors D est le pole de l'arc AC, & ayant joint DC, l'angle ACD est droit ; donc l'angle ACB étoit aigu.

149. On voit de même que si AB étoit de 90°, l'angle opposé ACB seroit droit ; & que si dans le triangle ACD le côté AD étoit de plus de 90°, en prenant AB de 90°, & joignant CB, l'angle ACB seroit droit, & par conséquent l'angle ACD obtus.

150. THEOR. XV. *Si les deux côtés d'un triangle rectangle sont de même espece, l'hypoténuse est moindre que de 90° : & s'ils sont de différente espece, l'hypoténuse est plus grande que de 90°.*

151. DEM. Je dis, 1°, que dans le triangle rectangle ABC (fig. 7) si les côtés BA, AC sont moindres que de 90°, l'hypoténuse BC l'est aussi.

152. Car ayant prolongé ces côtés en BD, AF, en sorte que BD, AF soient de 90°, il est clair que B est le pole d'un grand cercle DF qui passe par D, & qui ne peut rencontrer l'arc AC que dans son prolongement vers F, & hors du triangle ABC ; donc BE est un arc de 90°, & par conséquent BC est moindre que de 90°.

153. Je dis, 2°, que si les côtés AB, AC (fig. 3) du triangle ABC rectangle en A, sont tous deux plus grands que de 90°, l'hypoténuse BC est moindre que de 90°. Car ayant prolongé AB & AC jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en D, on a un triangle DBC rectangle en D (15) & qui a l'hypoténuse BC commune avec le triangle ABC. Or les côtés BD, CD sont moindres que de 90°, puisque ce sont les suppléments des arcs, AB, AC. Donc suivant le premier cas, l'hypoténuse BC doit être moindre que de 90°.

154. Je dis, 3°, que si dans le triangle rectangle ABC (fig. 10) le côté AB est plus grand que de 90°, & le côté AC plus petit, l'hypoténuse BC est plus grande que de 90°. Car ayant prolongé AC jusqu'à 90° en F, à cause de l'angle droit A, le point F est le pole du côté AB. Ayant donc pris BD de 90°, & joint FD, il est clair que B est le pole de cet arc FD; donc BE est un arc de 90°. Donc BC est plus grand que de 90°.

155. COROLL. I. Puisque (147) les angles obliques sont de même espece que leurs côtés opposés, il suit que *dans un triangle rectangle si les deux angles obliques sont de même espece, l'hypoténuse est moindre que de 90°; s'ils sont de différente espece, elle est plus grande.*

156. II. Réciproquement *si l'hypoténuse d'un triangle rectangle est moindre que de 90°, les angles obliques & les côtés sont de même espece; mais si elle est plus grande, les angles & les côtés sont de différente espece.*

157. III. *Dans un triangle rectangle si l'hypoténuse & un côté sont de même espece, l'autre côté & son angle opposé sont moindres que de 90°; mais si l'hypoténuse & un côt sont de différente espece, l'autre ôté & son angle opposé sont plus grands que de 90°.*

158. REMARQUE. Les cas douteux sont très-rares dans le calcul Astronomique, où l'on n'emploie dans les triangles rectangles, que des arcs moindres de 90°, parce que quand on a des arcs plus grands, on prend leurs suppléments en les supposant prolongés jusqu'à la demi-circonférence. Comme si dans la figure 3 on avoit à calculer le triangle ABC, pour éviter les embarras, on calculeroit le triangle BCD, où tous les côtés sont moindres que de 90°, aussi-bien que tous les angles, excepté D, & où tout étant connu, tout devient connu dans le triangle ABC.



ARTICLE V.

Théorie du calcul des Triangles obliquangles.

159. THEOR. XVI. DANS *un triangle ſphérique quelconque* ABC (fig. 16) *on a toujours : Comme le ſinus d'un angle* A *eſt au ſinus de ſon côté oppoſé* BC; *ainſi le ſinus d'un autre angle* B, *eſt au ſinus de ſon côté oppoſé* AC.

160. DEM. Car ayant abaiſſé de l'angle C la perpendiculaire CD, le triangle ABC eſt diviſé en deux triangles rectangles ACD, BCD; donc (129) R : *ſin* AC : : *ſin* A : *ſin* CD; & R : *ſin* BC : : *ſin* B : *ſin* CD. Donc (Elem. 300) R × *ſin* CD = *ſin* AC × *ſin* A = *ſin* BC × *ſin* B. Donc (Elem. 302) *ſin* A : *ſin* BC : : *ſin* B : *ſin* AC.

161. COROLL. *Si ſur une même ſphere les trois angles de deux triangles ſont égaux chacun à chacun, les trois côtés le ſont auſſi, & les deux triangles ſont égaux, & réciproquement.* Car les angles égaux & les arcs égaux, ont les mêmes ſinus.

162. THEOR. XVII. *Si un triangle quelconque* ABC *eſt partagé en deux triangles rectangles* ACD, BCD, *par un arc perpendiculaire, qui partant d'un angle* C, *diviſe le côté oppoſé* BA *en deux ſegments* AD, BD. . . . . .

163. Je dis, 1°. Que *les ſinus des ſegments* AD, BD *ſont réciproquement proportionnels aux tangentes des angles adjacents* A & B; *ou directement comme leurs cotangentes.* Car dans le triangle rectangle ADC on a (101) R : *ſin* AD : : *tang* A : *tang* CD; & dans le triangle rectangle BCD on a de même R : *ſin* DB : : *tang* B : *tang* CD. Donc R × *tang* CD = *ſin* AD × *tang* A = *ſin* DB × *tang* B. Donc *ſin* AD : *ſin* DB : : *tang* B : *tang* A : : *cot* A : *cot* B (Elem. 737).

164. Je dis 2°, *que les coſinus des mêmes ſegments ſont proportionnels aux coſinus des côtés adjacents* AC, BC.

165. Car dans les triangles rectangles ADC, BCD on a (95) R : *coſ* DC : : *coſ* AD : *coſ* AC, & R : *coſ* DC : : *coſ* DB : *coſ* BC. Donc *coſ* AD : *coſ* AC : : *coſ* DB : *coſ* BC.

166. Je dis, 3°, *que les coſinus des deux angles* BCD, DCA, *ſont comme les cotangentes des côtés* BC, AC, *ou réciproquement comme leurs tangentes.*

167. Car dans les triangles rectangles ADC, BCD, on a (114) R : *cot* DC : : *coſ* BCD : *cot* BC, & R : *cot* DC : : *coſ* DCA : *cot* AC. Donc *coſ* BCD : *coſ* DCA : : *cot* BC : *cot* AC : : *tang* AC : *tang* BC.

168. Je dis, 4°, *que les ſinus de ces deux angles* BCD, DCA *ſont comme les coſinus des angles* B & A.

169. Car (115) on a R : *coſ* DC : : *ſin* DCA : *coſ* A, & R : *coſ* DC : : *ſin* BCD : *coſ* B. Donc *ſin* BCD : *ſin* DCA : : *coſ* B : *coſ* A.

170. THEOR. XVIII. *En tout triangle ſphérique* ABC (fig. 4) *on a*

cette formule, $\cos A = \frac{cof\,BC - cof\,AC \times cof\,AB}{f\,AC \times f\,AB}$.

171. Car, 1°, ayant abaissé l'arc perpendiculaire BD, dans le triangle rectangle ABD on a (120) R : *tang* AB : : *cof* A : *tang* AD. Donc *tang* AD = *tang* AB × *cof* A. Or (50) *f* AD = *cof* AD × *tang* AD; donc *f* AD = *cof* AD × *tang* AB × *cof* A. 2°, Dans le triangle ABC on a (164) *cof* DC : *cof* AD : : *cof* BC : *cof* AB. Donc *cof* DC × *cof* AB = *cof* BC × *cof* AD. Mais *cof* DC = *cof* (AC − AD) = (63) *cof* AC × *cof* AD + *f* AC × *f* AD, ou à cause de la valeur de *f* AD trouvée plus haut, *cof* DC = *cof* AC × *cof* AD + *f* AC × *cof* AD × *tang* AB × *cof* A. Donc en substituant cette valeur de *cof* DC, on a *cof* AC × *cof* AD × *cof* AB + *f* AC × *cof* AD × *tang* AB × *cof* A × *cof* AB = *cof* BC × *cof* AD. Otant *cof* AD, & mettant *f* AB à la place de *tang* AB × *cof* AB (50), on a *cof* AC × *cof* AB + *f* AC × *cof* A × *f* AB = *cof* BC, d'où on tirera la valeur de *cof* A, qui est dans la formule proposée.

172. THEOREME XIX. *En tout triangle sphérique* ABC *on a cette analogie* : $f\,AB \times f\,AC : f(\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AC) \times f(\frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC) : : R^2 : f^2 \frac{1}{2}A$.

173. Car en faisant R = 1, on a (57) $2 f^2 \frac{1}{2} A = 1 - cof\,A = \frac{f\,AB \times f\,AC}{f\,AB \times f\,AC} - \frac{cof\,BC + cof\,AB \times cof\,AC}{f\,AB \times f\,AC}$ $(170) = \frac{f\,AB \times f\,AC + cof\,AB \times cof\,AC - cof\,BC}{f\,AB \times f\,AC}$ $= (63)\ \frac{cof\,(AB - AC) - cof\,BC}{f\,AB \times f\,AC}$. Donc (69) $2\,fin^2 \frac{1}{2} A = \frac{2 f(\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AC) \times f(\frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC)}{f\,AB \times f\,AC}$. D'où, ôtant les coefficients constants 2, on tire l'analogie proposée.

174. REMARQUE. Puisque ces deux théorêmes sont généraux, il est clair qu'en transposant les lettres qui sont aux angles du triangle ABC, on construira facilement des formules, pour les autres angles du même triangle; ou même étant donnés les trois angles, on pourra trouver les côtés, à l'aide du théorême III. (Voyez N° 216).

ARTICLE VI.

Solution de tous les cas possibles des Triangles obliquangles.

175. ON peut proposer douze problêmes pour résoudre les triangles obliquangles, parmi lesquels il y en a huit qui demandent qu'on réduise le triangle donné en deux triangles rectangles, par le moyen d'un arc perpendiculaire : or cet arc peut tomber en-dedans ou en-dehors

du triangle; il faut donc examiner dans quels cas il doit tomber en-dedans, & quand il doit tomber en-dehors.

176. Theor. XX. *L'arc perpendiculaire* CD *mené d'un angle* C *d'un triangle sphérique sur le côté opposé* AB, *tombe en-dedans du triangle* (*fig.* 16) *si les deux autres angles* A *&* B *sont de même espece, & en-dehors* (*fig.* 14 *&* 15) *si* A *&* B *sont de différente espece.*

177. Dem. Je dis, 1°, que si la perpendiculaire CD (fig. 16) tombe en-dedans du triangle, les angles A & B sont de même espece. Car dans le triangle CAD rectangle en D, l'angle A est (147) de même espece que son côté opposé CD; par la même raison l'angle B est de même espece que CD; donc quand la perpendiculaire tombe en-dedans, les angles sont de même espece.

178. Je dis, 2°, que quand la perpendiculaire CD (fig. 14 & 15) tombe en-dehors, les angles CBA, BAC sont de différente espece. Car (148) dans le triangle rectangle CDB, l'angle B est de même espece que CD; & dans le triangle rectangle CAD, l'angle CAD est de même espece que CD; donc les angles CBD & CAD sont de même espece; donc (fig. 15) l'angle CBD & le supplément de CAD, c'est-à-dire, l'angle CAB, sont de différente espece, & (fig. 14) l'angle CAD & le supplément de l'angle CBD, c'est-à-dire, CBA, sont de différente espece.

179. Theor. XXI. *Si les deux plus petits côtés* AC, CB, *d'un triangle* ABC *sont de même espece, l'arc perpendiculaire* CD *mené de* C *sur la base* AB, *tombera en-dedans du triangle* (Fig. 13).

180. Dem. Sur AB prenez AF = AC, & BE = BC, menez CF, CE, & par A & B, abaissez-y les perpendiculaires AH, BG. Alors dans les triangles rectangles FAH, EGB, les côtés FH, GE sont nécessairement moindres que de 90°, étant la moitié de CF, & CE. Maintenant si on suppose AC & BC, ou leurs égales AF, BE moindres que de 90°, alors ces hypoténuses sont de même espece que les côtés FH, GE; donc les angles AFH, BEG sont aigus (197), & par conséquent de même espece que les côtés AC, BC; donc la perpendiculaire CD tombera sur EF (176). Et si on suppose AF, BE plus grands que de 90°, alors ces hypoténuses sont de différente espece que les côtés FH, GE; donc (157) les angles AFH, BEG sont obtus, & par conséquent de même espece que les côtés AD, BC : donc la perpendiculaire CD tombera encore sur EF.

181. Probleme I. *Etant donnés deux angles, & un côté opposé à l'un des deux, trouver le côté opposé à l'autre.*

Mettez A à l'angle dont le côté opposé est connu, B à l'autre angle donné, & C au troisieme, & faites cette analogie (159).

Sin A : *sin* B : : *sin* BC : *sin* AC.

182. Le côté AC peut être plus ou moins grand que

de 90°, & il n'eſt pas déterminé par les donnés ſeuls.

183. PROBL. II. *Etant donnés deux angles & un côté oppoſé, trouver le troiſieme angle.*

184. Mettez A à l'angle oppoſé au côté connu, B à l'autre angle connu, & C au troiſieme qu'on cherche. Abaiſſez de C un arc perpendiculaire ſur AB, & faites ces deux analogies.

R : *coſ*BC : : *tang*B : *cot* BCD. (118)
*Coſ*B : *coſ*BAC : : *ſin* BCD : *ſin* ACD. (168).

185. Alors ſi A & B ſont de même eſpece, la ſomme des angles BCD, ACD ſera égale à l'angle C cherché; mais ſi A & B ſont de différente eſpece, la différence des angles BCD, ACD, donne l'angle C.

186. PROBL. III. *Etant donnés deux angles & un côté oppoſé, trouver le côté compris entre les deux angles.*

187. Mettez A à l'angle oppoſé au côté donné, B à l'autre angle connu, & C au troiſieme, duquel abaiſſez la perpendiculaire CD, & faites ces deux analogies.

R : *coſ*B : : *tang* BC : *tang* BD. (116)
tang A : *tang*B : : *ſin*BD : *ſin* AD. (162).

188. Si A & B ſont de même eſpece, BD + AD = AB; mais ſi A & B ſont de différente eſpece, la différence entre BD & AD, donne AB.

189. PROBL. IV. *Etant donnés deux angles & le côté compris, connoître un des deux autres côtés.*

190. Mettez B à l'angle oppoſé au côté cherché, C à l'autre angle donné, & A au troiſieme : menez de l'angle donné C au côté oppoſé l'arc perpendiculaire CD, & faites d'abord cette analogie :

R : *coſ*BC : : *tang* B : *cot* BCD. (118).

191. Prenez la ſomme ou la différence de l'angle BCD, & de l'angle donné BCA, ſelon la poſition de la perpendiculaire, & vous aurez l'angle ACD. Faites enſuite,

*Coſ*BCD : *coſ* ACD : : *cot* BC : *cot* AC (166).

192. Alors ſi l'angle ACD eſt de même eſpece que l'angle B, le côté AC eſt moindre que de 90°. Si

ACD & B ſont de différente eſpece, AC eſt plus grand que de 90°.

193. PROBL. V. *Etant donnés deux angles & le côté compris, connoître le troiſieme angle.*

194. Mettez B & C aux deux angles connus, & A à celui qu'on cherche : abaiſſez de C la perpendiculaire CD, & faites d'abord,

R : *coſ* BC : : *tang* B : *cot* BCD (118).

195. Prenez la ſomme ou la différence des angles BCD & BCA, ſelon la poſition de la perpendiculaire, & vous aurez ACD. Faites enſuite. . . . .

ſin BCD : *ſin* ACD : : *coſ* B : *coſ* A (168).

196. Alors ſi l'angle BCD eſt moindre que l'angle connu BCA, l'angle cherché A eſt de même eſpece que l'angle connu B. Si BCD eſt plus grand que BCA, alors A & B ſont de différente eſpece (176).

197. PROBL. VI. *Etant donnés deux côtés & un angle oppoſé, trouver l'angle oppoſé à l'autre côté.*

198. Mettez A à l'angle connu, B à l'angle formé par les deux côtés connus, & C au troiſieme; faites enſuite,

ſin BC : *ſin* : AB : : *ſin* A : *ſin* C (159).

199. L'angle C peut être aigu ou obtus, & il n'eſt pas déterminé par les données ſeules.

200. PROBL. VII. *Etant donnés deux côtés & un angle oppoſé, trouver le troiſieme côté.*

201. Mettez B à l'angle donné, C à l'angle oppoſé au côté cherché, & A au troiſieme angle. Abaiſſez de C l'arc perpendiculaire CD, & faites,

R : *tang* BC : : *coſ* B : *tang* BD (116)
coſ BC : *coſ* AC : : *coſ* BD : *coſ* AD (164).

202. Alors ſi BC & AC ſont de même eſpece, BD + AD = AB (179); ſinon AB eſt égal à la différence entre BD & AD.

203. PROBL. VIII. *Etant donnés deux côtés & un angle oppoſé, trouver l'angle compris par ces deux côtés.*

204. Mettez B à l'angle donné, C à l'angle cherché,

& A au troisieme : de l'angle cherché C, abaissez la perpendiculaire CD, & faites,

R : *cos* BC : : *tang* B : *cot* BCD (118)
tang AC : *tang* BC : : *cos* BCD : *cos* ACD (166).

205. Alors AC & BC sont de même espece, BCD + ACD = C, sinon l'angle cherché C est égal à la différence des angles trouvés BCD, ACD.

206. PROBL. IX. *Etant donnés deux côtés & l'angle compris, connoître un des deux autres angles.*

207. Mettez B à l'angle donné, A à l'angle cherché, & C au troisieme. Abaissez de C la perpendiculaire CD, & faites. . . . .

R : *tang* BC : : *cos* B : *tang* BD (116).

208. Prenez la somme ou la différence de BD & AB, selon le côté où tombe la perpendiculaire, & vous aurez AD : faites ensuite . . . .

sin AD : *sin* BD : : *tang* B : *tang* A (162).

209. Selon que AB est plus ou moins grand que BD, l'angle A est de même ou de différente espece que l'angle B.

210. PROBL. X. *Etant donnés deux côtés & l'angle compris, trouver le troisieme côté.*

211. Mettez B à l'angle connu, que BC soit le plus petit côté connu, & BA le plus grand : abaissez de C la perpendiculaire CD, qui tombera presque toujours en-dedans du triangle, sur-tout lorsque l'angle B sera aigu, & faites. . . . .

R : *tang* BC : : *cos* B : *tang* BD (116).

212. Otez BD de BA, (ou si la perpendiculaire tomboit en-dehors du côté de B, il faudroit ajouter BD & BA ; & si cette perpendiculaire tomboit en-dehors du côté de A, il faudroit ôter BA de BD,) & vous aurez AD ; faites donc. . . .

Cosin BD : *cos* AD : : *cos* BC : *cos* AC (164).

213. Selon que AD est de même ou de différente espece

que CD, ou que l'angle A; le côté AC eſt plus ou moins grand que de 90°.

214. PROBL. XI. *Etant donnés les trois côtés d'un triangle, en trouver un angle.*

215. Mettez A à l'angle cherché, B & C aux deux autres, & faites cette analogie (172) :

Comme le produit des ſinus des côtés AB, AC,
Eſt au produit des ſinus des deux excès de la moitié de la ſomme des trois côtés ſur chacun des côtés AB, AC;
Ainſi le quarré du rayon,
Et au quarré du ſinus de la moitié de l'angle A.

216. PROBL. XII. *Etant donnés les trois angles, trouver un côté quelconque.*

217. Que BC ſoit le côté cherché, A ſoit à l'angle oppoſé, faites cette analogie (174) :

Comme le produit des ſinus des angles B & C,
Eſt au produit des coſinus des deux excès de la moitié de la ſomme des trois angles ſur chacun des deux angles B, C;
Ainſi le quarré du rayon,
Eſt au quarré du coſinus de la moitié du côté BC.

218. REMARQUE. On peut conſidérer un triangle rectiligne comme un triangle ſphérique dont tous les côtés ſont des arcs ſi petits, qu'ils ne différent pas de la ligne droite, & qui ſont par conſéquent confondus avec leurs ſinus & leurs tangentes. On pourra donc appliquer à la Trigonométrie rectiligne toutes les analogies de la Trigonométrie ſphérique, ou il n'entrera pas de coſinus ni de cotangentes; en mettant ſeulement le mot de *côté* à la place de ceux de *ſinus du côté* ou *tangente du côté*. Ainſi, par exemple, les trois côtés d'un triangle rectiligne étant donnés, on peut trouver un des angles par cette analogie du problême XI.

Comme le produit des deux côtés qui renferment l'angle cherché,
Eſt au produit des deux excès de la moitié de la ſomme des trois côtés ſur chacun de ces deux côtés,

Ainsi le quarré du rayon,
Est au quarré du sinus de la moitié de l'angle cherché.

ARTICLE VII.

Différentes formules de Trigonométrie Sphérique.

219. Quoique par les analogies précédentes on ait la solution de tous les problêmes possibles de Trigonométrie sphérique, il est cependant fort utile de trouver les mêmes solutions sous les formes les plus différentes & les plus variées. Leur principal usage est de servir à faire des substitutions dans les recherches algébriques des regles de calculs astronomiques : il en arrive souvent, comme on le verra dans la suite, qu'on rend ces regles fort simples & fort élégantes. Je ne m'arrêterai pas à démontrer ici toutes les formules qui suivent : elles le sont pour la plupart dans les articles précédents, les autres s'en déduisent très-facilement. (*b*) J'indiquerai seulement en général les cas où l'on en fait le plus d'usage.

220. Dans toutes ces formules on suppose les angles & les côtés d'un triangle sphérique moindres que de 90 degrés : & par conséquent s'il s'en trouve de plus grands, il faut avoir égard, pour la combinaison des signes, à la remarque faite dans l'Article III. nº 47.

I.

Dans un triangle sphérique ABC rectangle en A, on a toujours. . .

221. $s\,B = \frac{cos\,C}{cos\,AB} = \frac{s\,AC}{s\,BC}$.

222. $tang\,B = \frac{cot\,C}{cos\,BC} = \frac{tang\,AC}{s\,AB}$.

223. $cos\,B = cot\,BC \times tang\,AB = s\,C \times cos\,AC = \frac{1}{2} s(C + AC) + \frac{1}{2} s(C - AC)$.

224. $cot\,B = tang\,C \times cos\,BC = cot\,AC \times s\,AB$.

225. $s\,C = \frac{cos\,B}{cos\,AC} = \frac{s\,AB}{s\,BC}$.

226. $tang.\,C = \frac{cot\,B}{cos\,BC} = \frac{tang\,AB}{s\,AC}$.

227. $cos\,C = s\,B \times cos\,AB = cot\,BC \times tang\,AC = \frac{1}{2} s(B + AB) + \frac{1}{2} s(B - AB)$.

228. $cot\,C = tang\,B \times cos\,BC = s\,AC \times cot\,AB$.

(*b*) Les démonstrations des formules suivantes se trouvent dans mon *Astronomie*, & dans les *principes d'Astronomie sphérique*, ou Traité de Trigonométrie sphérique, par M. Mauduit, 1765 in-8º.

229. $\text{ſ}AB = \textit{cot}\,B \times \textit{tang}\,AC = \text{ſ}C \times \text{ſ}BC = \frac{1}{2}\,\textit{coſ}(C - BC) - \frac{1}{2}\,\textit{coſ}(C + BC).$

230. $\textit{tang}\,AB = \textit{coſ}\,B \times \textit{tang}\,BC = \textit{tang}\,C \times \text{ſ}AC.$

231. $\textit{coſ}\,AB = \frac{\textit{coſ}\,BC}{\textit{coſ}\,AC} = \frac{\textit{coſ}\,C}{\text{ſ}B}.$

232. $\textit{cot}\,AB = \frac{\textit{cot}\,BC}{\textit{coſ}\,B} = \frac{\textit{cot}\,C}{\text{ſ}AC}.$

233. $\text{ſ}AC = \textit{cot}\,C \times \textit{tang}\,AB = \text{ſ}B \times \text{ſ}BC = \frac{1}{2}\,\textit{coſ}(B - BC) - \frac{1}{2}\,\textit{coſ}(B + BC).$

234. $\textit{tang}\,AC = \textit{tang}\,B \times \text{ſ}AB = \textit{coſ}\,C \times \textit{tang}\,BC.$

235. $\textit{coſ}\,AC = \frac{\textit{coſ}\,B}{\text{ſ}C} = \frac{\textit{coſ}\,BC}{\textit{coſ}\,AB}.$

236. $\textit{cot}\,AC = \frac{\textit{cot}\,B}{\text{ſ}AB} = \frac{\textit{coſ}\,BC}{\textit{coſ}\,C}.$

237. $\text{ſ}BC = \frac{\text{ſ}AB}{\text{ſ}C} = \frac{\text{ſ}AC}{\text{ſ}B}.$

238. $\textit{tang}\,BC = \frac{\textit{tang}\,AC}{\textit{coſ}\,C} = \frac{\textit{tang}\,AB}{\textit{coſ}\,B}.$

239. $\textit{coſ}\,BC = \textit{coſ}\,AC \times \textit{coſ}\,AB = \textit{cot}\,C \times \textit{cot}\,B = \frac{1}{2}\,\textit{coſ}(AC + AB) + \frac{1}{2}\,\textit{coſ}(AC - AB).$

240. $\textit{cot}\,BC = \textit{coſ}\,C \times \textit{cot}\,AC = \textit{coſ}\,B \times \textit{cot}\,AB.$

241. REM. I. Si l'un des côtés d'un triangle obliquangle eſt de 90°, on déſignera ce côté par A, les deux autres par B & C, les angles par BC, AC, AB, comme étant formés par la rencontre des arcs B & C, A & C, A & B : & les formules précédentes ſerviront à le réſoudre.

242. REM. II. On voit que le calcul des dernieres expreſſions des formules n° 223, 227, 229, 233, 239, ſe peut faire par de ſimples additions & ſouſtractions, ſans le ſecours des logarithmes : mais elles ſuppoſent que l'angle ou l'arc énoncé le premier eſt plus grand que le ſecond. Par exemple, dans la formule du n° 223 on ſuppoſe C plus grand que AC : ſi c'étoit le contraire, il ſuffiroit de renverſer l'ordre des termes dans ces formules, & de mettre dans celle-ci $\frac{1}{2}\text{ſ}(AC + C) + \frac{1}{2}\text{ſ}(AC - C)$.

II.

Dans un triangle ſphérique quelconque ABC, on a toujours....

243. $\text{ſ}A = \frac{\text{ſ}BC \times \text{ſ}C}{\text{ſ}AB} = \frac{\text{ſ}BC \times \text{ſ}B}{\text{ſ}AC}.$

244. $\text{ſ}B = \frac{\text{ſ}AC \times \text{ſ}A}{\text{ſ}BC} = \frac{\text{ſ}AC \times \text{ſ}C}{\text{ſ}AB}.$

245. $\text{ſ}C = \frac{\text{ſ}AB \times \text{ſ}B}{\text{ſ}AC} = \frac{\text{ſ}AB \times \text{ſ}A}{\text{ſ}BC}.$

246. $\text{ſ}AB = \frac{\text{ſ}BC \times \text{ſ}C}{\text{ſ}A} = \frac{\text{ſ}AC \times \text{ſ}C}{\text{ſ}B}.$

247. $\text{ſ}AC = \frac{\text{ſ}AB \times \text{ſ}B}{\text{ſ}C} = \frac{\text{ſ}BC \times \text{ſ}B}{\text{ſ}A}.$

248. $\int BC = \frac{\int AC \times \int A}{\int B} = \frac{\int AB \times \int A}{\int C}$.

249. $co\int A = \frac{co\int BC - co\int AC \times co\int AB}{\int AC \times \int AB} = co\int BC \times \int B \times \int C - co\int B \times co\int C$.

250. $co\int B = \frac{co\int AC - co\int AB \times co\int BC}{\int AB \times \int BC} = co\int AC \times \int C \times \int A - co\int C \times co\int A$.

251. $co\int C = \frac{co\int AB - co\int AC \times co\int BC}{\int AC \times \int BC} = co\int AB \times \int A \times \int B - co\int A \times co\int B$.

252. $co\int AB = \int AC \times \int BC \times co\int C + co\int AC \times co\int BC = \frac{co\int C + co\int A \times co\int B}{\int A \times \int B}$.

253. $co\int AC = co\int B \times \int AB \times \int BC + co\int AB \times co\int BC = \frac{co\int B + co\int C \times co\int A}{\int C \times \int A}$.

254. $co\int BC = co\int A \times \int AC \times \int AB + co\int AB \times co\int AC = \frac{co\int A + co\int B \times co\int C}{\int B \times \int C}$.

255. $tang\, A = \frac{\int B}{cot BC \times \int AB - co\int B \times co\int AB} = \frac{\int C}{cot BC \times \int AC - co\int AC \times co\int C}$.

256. $tang\, B = \frac{\int C}{cot AC \times \int BC - co\int C \times co\int BC} = \frac{\int A}{cot AC \times \int AB - co\int AB \times co\int A}$.

257. $tang\, C = \frac{\int B}{cot AB \times \int BC - co\int B \times co\int BC} = \frac{\int A}{cot AB \times \int AC - co\int AC \times co\int A}$.

258. $tang\, AB = \frac{\int BC}{cot C \times \int B + co\int B \times co\int BC} = \frac{\int AC}{cot C \times \int A + co\int AC \times co\int A}$.

259. $tang\, AC = \frac{\int BC}{cot B \times \int C + co\int C \times co\int BC} = \frac{\int AB}{cot B \times \int A + co\int AB \times co\int A}$.

260. $tang\, BC = \frac{\int AC}{co\int AC \times co\int C - \int C \times cot A} = \frac{\int AB}{co\int B \times co\int AB - \int B \times cot A}$.

261. $cot\, A = \frac{cot BC \times \int AB}{\int B} - co\int AB \times cot B = \frac{cot BC \times \int AC}{\int C} - co\int AC \times cot C$.

262. $cot\, B = \frac{cot AC \times \int BC}{\int C} - co\int BC \times cot C = \frac{cot AC \times \int AB}{\int A} - co\int AB \times cot A$.

263. $cot\, C = \frac{cot AB \times \int AC}{\int A} - co\int AC \times cot A = \frac{cot AB \times \int BC}{\int B} - co\int BC \times cot B$.

264. $cot\, AB = \frac{cot C \times \int B}{\int BC} + co\int B \times cot BC = \frac{\int A \times cot C}{\int AC} + cot AC \times co\int A$.

265. $cot\, AC = \frac{cot B \times \int C}{\int BC} + co\int C \times cot BC = \frac{cot B \times \int A}{\int AB} + cot AB \times co\int A$.

266. $cot\, BC = \frac{cot A \times \int C}{\int AC} + co\int C \times cot AC = \frac{cot A \times \int B}{\int AB} + cot AB \times co\int B$.

III.

267. Dans un triangle ſphérique ABC où A eſt plus grand que B, ou bien BC plus grand que AC, on a toujours (*c*). . . . .

$$268.\ tang\tfrac{1}{2}AB = \frac{\text{ſ}(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)\times tang(\tfrac{1}{2}BC-\tfrac{1}{2}AC)}{\text{ſ}(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B)} = \frac{co\text{ſ}(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}B)\times tang(\tfrac{1}{2}BC+\tfrac{1}{2}AC)}{co\text{ſ}(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B)}.$$

$$269.\ cot\tfrac{1}{2}C = \frac{\text{ſ}(\tfrac{1}{2}BC+\tfrac{1}{2}AC)\times tang(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}B)}{\text{ſ}(\tfrac{1}{2}BC-\tfrac{1}{2}AC)}.$$

Si AB eſt plus grand que AC. . . . . .

$$270.\ cot\tfrac{1}{2}A = \frac{tang(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}B)\times \text{ſ}(\tfrac{1}{2}AB+\tfrac{1}{2}AC)}{\text{ſ}(\tfrac{1}{2}AB-\tfrac{1}{2}AC)} = \frac{tang(\tfrac{1}{2}C+\tfrac{1}{2}B)\times co\text{ſ}(\tfrac{1}{2}AB+\tfrac{1}{2}AC)}{co\text{ſ}(\tfrac{1}{2}AB-\tfrac{1}{2}AC}.$$

271. REMARQUE. Un des uſages de la premiere & de la troiſieme de ces formules, eſt pour réſoudre ces deux problêmes : étant donnés A, B & AB, trouver BC & AC; car par la premiere partie de la premiere formule on peut trouver la différence de BC à AC, & leur ſomme par la ſeconde partie : on trouve de même par la troiſieme formule la ſomme & la différence de B & de C, étant donnés AB, AC & A.

IV.

Analogies différentielles (d).

Dans un triangle ſphérique quelconque ABC,

272. I. L'angle A & ſon côté adjacent AC étant conſtants. . . . . :

273. $d\,AB : d\,BC :: R : co\text{ſ}B :: \text{ſ}AB\times\text{ſ}BC : R\times co\text{ſ}AC - co\text{ſ}AB\times co\text{ſ}BC :: R : co\text{ſ}AC\times\text{ſ}C\times\text{ſ}A - co\text{ſ}C\times co\text{ſ}A.$

274. Si $A = 90°$. . . . . . . :: $tang\,BC : tang\,AB$.

275. Si $B = 90°$. . . . . . . :: $R : co\text{ſ}\,d\,AB :: co\text{ſ}\,d\,BC : co\text{ſ}\,CD$ (*e*).

276. $d\,AB : d\,B :: tang\,BC : \text{ſ}B :: tang\,BC\times\text{ſ}BC : \text{ſ}AC\times\text{ſ}A.$

277. $d\,AB : d\,C :: \text{ſ}BC : \text{ſ}B :: \text{ſ}^2BC : \text{ſ}AC\times\text{ſ}A :: \text{ſ}AC\times\text{ſ}A : \text{ſ}^2B :: \text{ſ}BC\times\text{ſ}AB : \text{ſ}C\times\text{ſ}AC :: \text{ſ}A\times\text{ſ}^2AB : \text{ſ}AC\times\text{ſ}^2C.$

278. Si $B = 90°$. . . . . $cot\,d\,AB : cot\,d\,C :: R : \text{ſ}BC$ (*f*).

279. $d\,BC : d\,B :: tang\,BC : tang\,B.$

280. Si $B = 90°$. . . . $\text{ſ}(BC + d\,BC) : R :: \text{ſ}BC : \text{ſ}(B + d\,B)$ (*g*).

(*c*) Les articles 268 & ſuiv. ſont démontrés dans M. Mauduit, art. 180 & 182.

(*d*) Ces analogies ſont démontrées dans M. Mauduit, & dans le XXIIIme livre de mon *Aſtronomie*.

(*e*) Si les quantités ſont infiniment petites le *coſ d* AB eſt égal à R, ainſi ces proportions ne peuvent ſervir à rien.

(*f*) Le premier rapport ne conclud rien, le ſecond doit être renverſé, ſBC : R.

(*g*) On ne voit pas ce que veulent dire des quantités infiniment petites ajoutées avec des quantités finies; d'ailleurs *tang* B étant infinie il n'y a plus de rapport à employer.

281. $dBC : dC :: ſBC : tang B :: ſA \times ſAC : tang B \times ſB :: ſ^2 BC \times cot AC$ $ſBC \times cosſ BC \times cosſ C : R^2 \times ſC$.

282. Si $BC = 90°$. . . . . . $tang\ d\ BC : ſd\ C :: R : cot\ B$ (*h*).

283. $dB : dC :: cosſ BC : R :: cosſ A + cosſ B \times cosſ C : ſB \times ſC :: cosſ A \times ſAC \times ſAB + cosſ AC \times ſAB : R$ (*i*).

284. Si $A = 90°$. . . . . . :: $cot\ C : tang\ B$.

285. Si $B = 90°$. . . . . . :: $ſd\ B : ſd\ C :: cosſ BC : R$ (*k*).

286. II. L'angle A & ſon côté oppoſé BC étant conſtants. . . . . .

287. $dAB : dAC :: cosſ C : cosſ B :: cosſ AB \times ſAB - cosſ AC \times cosſ BC \times ſAB : cosſ AC \times ſAC - cosſ AB \times cosſ BC \times ſAC$.

288. $dAB : dB :: R \times ſAB : tang\ C \times cosſ AC :: tang AC \times cosſ C : R \times ſB :: tang AC \times ſAB : tang\ C \times ſAC :: tang AC \times cosſ BC - ſAC \times cosſ AB : ſB \times ſAC \times ſAB$ (*l*).

289. $dAB : dC :: tang\ AB : tang\ C$.

290. Si $A = 90°$. . . . . . :: $ſAC : R$.

291. Si $B = 90°$. . . . . . :: $cot\ dAB : cot\ dC :: R : ſBC$ (*f*).

292. $dAC : dB :: tang\ AC : tang\ B$.

293. Si $A = 90°$. . . . . . :: $ſAB : R$.

294. Si $B = 90°$. . . . . . :: $cot\ dAC : cot\ dB :: R : ſAB$ (*k*).

295. $dAC : dC :: R \times ſAC : tang B \times cosſ AB :: tang AB \times cosſ B : R \times ſC$.

296. Si $A = 90°$. . . . . . :: $\frac{1}{2} ſ^2 AC : R$ (*m*).

297. $dB : dC :: cosſ AC : cosſ AB :: cosſ B \times tang AB \times ſBC + cosſ BC : R$.

298. III. Les deux côtés AB, AC étant conſtants. . . . . . .

299. $dA : dB :: ſBC \times R : ſAC \times cosſ C :: R \times ſA : ſB \times cosſ C :: ſBC \times tang C : ſAC \times ſC :: tang\ C \times ſA : ſB \times ſC :: ſBC \times tang C : ſB \times ſAB :: ſ^2 BC : cosſ AB - cosſ AC \times cosſ BC :: ſAB \times ſA : ſAC \times \frac{1}{2} ſ^2 C :: R : ſ^2 B \times cosſ AB - ſB \times cosſ B \times cot A :: R : cosſ AB - ſAB \times cosſ B \times cot BC$.

300. $dA : dC :: ſBC \times R : ſAB \times cosſ B :: R \times ſA : ſC \times cosſ B :: ſBC \times tang B : ſAB \times ſB :: tang B \times ſBC : ſAC \times ſC :: tang\ B \times ſA : ſC \times ſB :: ſ^2 BC : cosſ AC - cosſ AB \times cosſ BC$.

301. $dA : dBC :: R : ſAC \times ſC :: R : ſAB \times ſB :: R \times ſBC \times ſC : ſA \times ſB \times ſ^2 AB$.

302. $dB : dBC :: cot\ C : ſBC :: R \times cosſ C : ſA \times ſAB :: R : tang C \times$

(*h*) Le premier rapport ne conclud rien, le ſecond doit être R : *tang* B.

(*i*) Il faut *cosſ* AB : R.

(*k*) Le premier rapport ne conclud rien ; le ſecond n'a pas lieu dans les deux Nos.

(*l*) Le dernier rapport eſt différent dans mon Aſtronomie, (3793) & le traducteur anglois de M. Mauduit a abandonné ſon Auteur qui eſt conforme à celui ci ; je crois donc qu'il faut lire ainſi le dernier rapport : : *tang* AC × *cosſ* AB -- ſAC × *cosſ* BC : ſB × ſ AC × ſBC.

(*m*) Au-lieu de R il faut *cot* C. V. M. Bernoulli, *Recueil pour les Aſtronomes*, T. I, *pag.* 66.

$\mathit{f}BC :: cot\,C \times \mathit{f}B : \mathit{f}A \times \mathit{f}AC :: R : \frac{cot\,AB}{\mathit{f}B} - \frac{cot\,BC}{tang\,B}$ (*n*) : : $cot\,AB - cof\,B \times cot\,BC : \mathit{f}\,B :: cof\,AB \times \mathit{f}B - cot\,A \times cof\,B : \mathit{f}AB$.

303. Si $AC = 90°$. . . . . . : : $tang\,BC : \mathit{f}^2\,B \times tang\,B$ (*o*).

304. $d\,BC : d\,C :: \mathit{f}BC : cot\,B :: \mathit{f}A \times \mathit{f}AC : R \times cof\,B :: \mathit{f}BC \times tang\,B : R :: \mathit{f}A \times \mathit{f}AB : cot\,B \times \mathit{f}C :: R : \frac{cot\,AC}{\mathit{f}C} - \frac{cot\,BC}{tang\,C} :: \mathit{f}AC : cof\,AC \times \mathit{f}C - cof\,C \times cot\,A$.

305. Si $AB = 90°$. . . . . . : : $\mathit{f}^2\,C \times tang\,C : tang\,BC$ (*o*).

306. $d\,B : d\,C :: tang\,B : tang\,C :: \mathit{f}AC \times cof\,C : \mathit{f}AB \times cof\,B :: \mathit{f}B \times cof\,C : \mathit{f}C \times cof\,B$.

307. IV. Les deux angles A & B étant conftants. . . . .

308. $d\,AB : d\,AC :: R \times \mathit{f}C : \mathit{f}B \times cof\,BC :: R \times \mathit{f}AB : \mathit{f}AC \times cof\,BC$.

309. $d\,AB : d\,BC :: R \times \mathit{f}C : \mathit{f}A \times cof\,AC :: R \times \mathit{f}AB : \mathit{f}BC \times cof\,AC$.

310. Si $A = 90°$. . . . . . : : $\mathit{f}C : cof\,AC :: \mathit{f}B \times \mathit{f}AB : \frac{1}{2}R \times \mathit{f}^2\,AC$.

311. $d\,AB : d\,C :: R : \mathit{f}B \times \mathit{f}BC :: R : \mathit{f}A \times \mathit{f}AC$.

312. Si $A = 90°$. . . . . . : : $R : \mathit{f}AC$.

313. $d\,AC : d\,BC :: tang\,AC : tang\,BC$.

314. Si $A = 90°$. . . . . . : : $cof\,C : R$.

315. $d\,AC : d\,C :: cot\,BC : \mathit{f}C :: R \times cof\,BC : \mathit{f}AB \times \mathit{f}A$.

316. $d\,BC : d\,C :: cot\,AC : \mathit{f}C :: R \times cof\,AC : \mathit{f}AB \times \mathit{f}B$.

Explication & ufages de ces formules.

317. Dans un triangle fphérique on confidere fix parties, trois angles & trois côtés : ces formules différentielles font les expreffions des rapports fuivant lefquels trois de fix parties d'un triangle fphérique doivent varier par quelque léger changement déterminé dans une quatrieme partie, en fuppofant que les deux autres reftent *conftantes* ou ne changent pas.

318. Par exemple, dans un triangle quelconque ABC (fig. 6) fi on fuppofe que l'angle A & fon côté adjacent AC reftant les mêmes, le côté AB vienne à être allongé d'une petite quantité repréfentée par BD : alors l'anle ACB deviendra ACD, l'angle ABC deviendra ADC, & le côté BC deviendra CD. Par les formules précédentes on peut calculer toutes ces variations d'autant plus exactement, que la variation primitive BD aura été plus petite. Comme fi on vouloit calculer l'allongement de CB pour devenir CD, dans la premiere analogie (273) on trouve que la variation de AB (on exprime ici chaque variation par la lettre *d* qui fignifie *différence* ou *differentielle*) eft à la variation de BC, comme le finus total eft au cofinus de l'angle B.

(*n*) Il faut renverfer ce rapport, & mettre R au conféquent.

(*o*) Ces deux formules n'ont pas lieu, à moins qu'on ne mette $\mathit{f}^2\,BC$, au-lieu de $\mathit{f}^2\,B$ dans l'art. 303, & au-lieu de $\mathit{f}^2\,C$ dans l'art. 305.

319. En effet l'arc BD étant assez petit pour être pris pour une ligne droite, si du point C avec une ouverture de compas égale à CB on décrit l'arc BF, on aura un triangle BDF sensiblement rectiligne & rectangle en F. L'angle D reste à très-peu près le même que l'angle ABC, & le côté DF est la variation cherchée : Or (Elem. 747) DF est à BD, comme le sinus de l'angle DBF ou le cosinus de l'angle D, est au rayon. C'est ainsi qu'on peut démontrer toutes les autres analogies.

320. Le rapport suivant dans la même analogie : : $sAB \times sBC : R \times cos AC - cos AB \times cos BC$, n'est qu'une substitution faite de la formule du N. 250 à l'expression du cosinus B : il en est de même du troisieme rapport.

321. On a mis ici le plus de différents rapports qu'il a été possible, afin qu'on pût choisir le plus commode ; c'est celui qui ne renferme que des quantités données ou déja connues. Comme si dans le triangle ABC on ne connoissoit pas l'angle B, mais bien les trois côtés ; le second rapport, quoique plus composé, doit être préféré au premier. Enfin si les données étoient seulement A, C, & AC, il faudroit choisir le troisieme rapport. Il en est ainsi des autres.

Remarques sur l'usage des Logarithmes dans les calculs Trigonométriques.

322. I. Dans l'usage des logarithmes on ajoute à la caractéristique, ou l'on en retranche autant de dixaines que l'on juge nécessaire, par la même raison que dans les formules algébriques on met où l'on veut l'unité & ses puissances pour coefficient ou pour dénominateur. Par exemple, si le logarithme que l'on doit ôter d'un autre est plus grand que lui, on suppose une dixaine de plus à la caractéristique de ce plus petit logarithme ; ce qui revient au même que si on multiplioit sa valeur par l'unité.

323. II. Lorsqu'une analogie ou une formule exige la soustraction d'un ou de plusieurs logarithmes, il est plus commode d'éviter cette soustraction, & de réduire tout en une seule addition. Pour cela on substitue aux logarithmes qu'on doit ôter, leurs *compléments arithmétiques* ; c'est ainsi qu'on appelle la différence entre un logarithme & celui du sinus total. Par exemple, ayant à soustraire le logarithme 9,67449 qui est celui du sinus de 28° 12′ 10″, j'écris à sa place 0,32551. (*p*) Il en est de même pour les logarithmes des nombres ordinaires. Le logarithme du nombre 6053 étant 3,78197, son complément

(*p*) Je fis faire il y a plusieurs années une petite édition des logarithmes adaptée aux usages de l'Astronomie, dont M. de la Caille & moi corrigeames tous deux les épreuves : elle se trouve chez les mêmes Libraires, réimprimée en 1769.

plément arithmétique est 6,21803. Or il est évident que 6,21803 est le logarithme de $\frac{1}{6053}$ en supposant le log. de 1 = 10,00000; & que multiplier un nombre par $\frac{1}{6053}$ est la même chose que de diviser ce nombre par 6053.

324. Le complément arithmétique se copie facilement à la vue dans les Tables; il suffit d'écrire successivement de gauche à droite le chiffre qui fait 9 avec chaque chiffre du logarithme dont on veut avoir le complément arithmétique. Il en faut excepter le dernier chiffre, qui doit faire 10 avec celui du logarithme donné.

325. *Le logarithme d'une tangente est le complément arithmétique de celui de la cotangente*, & réciproquement, excepté que la différence se prend avec le logarithme du quarré du rayon qui a 20 pour caractéristique. Ce qui suit de la formule, $tang\ A = \frac{R^2}{cot\ A}$ (52). De même, & par une formule $cosec\ A = \frac{R^2}{sin\ A}$ qui se démontre de même que la précédente, le *complément arithmétique d'un sinus est le logarithme de la cosécante*, & *le complément arithmétique d'un cosinus est le logarithme de la secante* : de sorte qu'en employant le complément arithmétique du sinus d'un arc A, on substitue réellement *cosec* A à la place de $\frac{1}{sin\ A}$.

326. III. Lorsqu'on veut employer dans le calcul une des formules qui sont composées de deux termes, ou en général lorsqu'on veut trouver le logarithme qui répond à la somme ou à la différence de deux nombres dont les logarithmes seulement sont donnés, on opérera comme il suit.

327. 1°, Pour avoir le logarithme de la somme des nombres dont on a les logarithmes, si les deux caractéristiques en sont égales, & plus ou moins grandes que 8 ou 9, il faut les réduire toutes deux à 9, en y ajoutant ou en retranchant les unités nécessaires. Il faut ensuite regarder le plus grand de ces logarithmes comme celui du sinus de A, & le plus petit comme celui du sinus de B. Ayant trouvé A, B dans les Tables de sinus, on ajoutera en une somme le logarithme de 2, celui du sinus de la moitié de la somme A + B, & celui du cosinus de la moitié de leur différence, & selon la formule $sA + sB = 2 \times sin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times cos(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ (66) on aura un logarithme, de la caractéristique duquel on ôtera 10 plus ou moins les unités qu'on aura ajoutées ou soustraites.

328. Par exemple : Etant donnés les logarithmes 3,45894 & 3,79393, j'ajoute 6 à la caractéristique, & j'ai 9,45894 logarithme du sinus de B = 16° 43′ 12″, & 9,79393 logarithme du sinus de A = 38° 28′ 38″. Donc $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = 27° 35' 55''$, & $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = 10° 52' 43''$.

Log. de 2.	0,30103
Log. *sin* ($\frac{1}{2}$ A + $\frac{1}{2}$ B) . .	9,66584
Log. *cos*. ($\frac{1}{2}$ A − $\frac{1}{2}$ B) . .	9,99212
Somme.	19,95899
Otez 10 + 6.	16,
Log. cherché.	3,95899

329. Si les deux caractéristiques sont inégales, on leur ajoutera ou on en retranchera un même nombre d'unités, de sorte que la caractéristique du plus grand logarithme soit 9 : & le calcul se fera de même que dans l'exemple précédent.

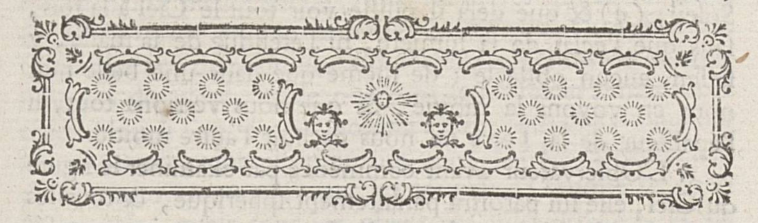
330. 2°, Pour avoir le logarithme de la différence des nombres qui répondent à deux logarithmes donnés, on suivra les mêmes regles, en les appliquant à la formule $\textit{sin}\,A - \textit{sin}\,B = 2 \times \textit{cos}\,(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) \times \textit{sin}\,(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$.

331. L'exemple suivant servira pour tout ce qui a été dit dans ces trois remarques. Dans le triangle sphérique ABC, on donne AB = 36°, AC = 40° & BC = 48°. On demande l'angle A par la formule $\textit{cos}\,A = \frac{\textit{cos}\,BC - \textit{cos}\,AC \times \textit{cos}\,AB}{\textit{sin}\,AC \times \textit{sin}\,AB}$ (249).

cos AC.	9,88425.		compl. arith. *sin* AC. . . .	0,19193
cos AB.	9,90796.		compl. arith. *sin* AB. . . .	0,23078
Donc *cos* AC × *cos* AB	9,79221.	38° 17′ 50″	log. 2. .	0,30103
compl. de BC.		42 0 0	moitiés	
Somme.		80 17 50. .	40° 8′ 55″ log. *cos*	9,88331
Differ.		3 42 10. .	1 51 5 log. *sin*	8,50930
			Log. *cosin* A.	9,11635

L'angle A est donc de 82° 29′ 19″.





LEÇONS ÉLÉMENTAIRES *D'ASTRONOMIE* GÉOMÉTRIQUE ET PHYSIQUE.

PREMIERE SECTION,

Qui contient la premiere partie de l'Astronomie Solaire.

1. NOUS SUPPOSERONS dans tout ce Traité une personne instruite des Principes des Mathématiques, (nous l'appellerons l'*Observateur*) qui n'ayant aucune connoissance de l'Astronomie, veuille cependant faire une description exacte de tous les Astres, & établir méthodiquement par observation & par raisonnement, les regles de leurs mouvements avec une telle précision, qu'on puisse pour un instant donné quelconque dans le temps passé ou à venir, déterminer positivement le point du Ciel, où chaque Astre doit être vu, par un œil placé en un lieu donné quelconque de l'Univers.

2. Pour y procéder par ordre, nous supposerons d'abord que cet Observateur soit placé précisément au centre du

Soleil, (*q*) & que delà il puiſſe voir tout le Ciel à la fois, ſans que l'éclat de ſa lumiere, ni l'étendue de ſa maſſe, y faſſent aucun obſtacle : de même que dans une belle nuit nous en voyons la moitié, & que nous verrions tout, ſi l'épaiſſeur de la Terre ne nous cachoit l'autre moitié.

3. L'Obſervateur ayant commencé par examiner la figure du Ciel, elle lui paroîtra parfaitement ſphérique, & tous les Aſtres lui ſembleront n'être que des points lumineux poſés ſur la ſurface concave de cette ſphere, dont le Soleil, & par conſéquent l'œil de l'Obſervateur, paroîtront être préciſément au centre. Il fera réflexion que de cette apparence il ne doit pas conclure auſſi-tôt, que la figure du Ciel eſt réellement ſphérique, ni que le Soleil en ſoit le centre, ni enfin que les Aſtres en ſoient tous également éloignés. Car on éprouve tous les jours, que lorſqu'on reſte dans une même place, on ne peut juger de l'inégalité des diſtances des objets d'alentour, à moins qu'ils ne ſoient à la portée ordinaire de notre vue. Au-delà de cette portée, qui eſt aſſez courte, il n'y a plus que les dimenſions connues de ces objets, ou notre mouvement, ou enfin celui des objets, qui puiſſe nous faire connoître par raiſonnement quels ſont les plus proches, &c. Or dès que l'on ne peut plus juger de l'inégalité, on eſt porté à croire tout égal. C'eſt ainſi que ſi un homme ſe trouve aſſez avant dans une vaſte plaine d'un contour irrégulier, qui ne ſoit terminée par aucune montagne, mais qui ſoit preſque nue dans toute ſon étendue, & bordée par quelques arbres, il lui ſemble que cette plaine eſt parfaitement ronde; qu'il en occupe le centre, que les arbres ſont tous préciſément à la circonférence, tandis qu'un autre homme qui ſera à une diſtance conſidérable du premier, s'imaginera auſſi être au

---

(*q*) Copernic démontra le premier que tous les mouvemens Céleſtes ſe font autour du Soleil, dans ſon fameux ouvrage intitulé : *Nicolai Copernici Torinenſis de Revolutionibus orbium Cœleſtium libri VI. Norimbergæ*, 1543. Ce grand homme mourut le 24 Mai de la même année, quelques heures après avoir reçu & touché le premier exemplaire que Rhéticus lui envoyoit. V. la Vie de Copernic, par Gaſſendi, & l'Hiſtoire des Mathématiques, par M. Montucla, 1758, 2 vol. in-4°. Il ne ſauroit y avoir actuellement un Aſtronome qui ait le moindre doute ſur la réalité & la certitude du ſyſtême de Copernic.

centre d'une plaine ronde, que les arbres qui la bordent, & même que le premier homme, font dans la circonférence. Tant que ces deux hommes & les objets voifins ne changeront pas de place, ils ne pourront fe défabufer; mais fi ces objets, ou fi l'un de ces hommes, ou tous deux viennent à fe mouvoir, alors ils pourront juger par les circonftances de ces mouvements, & par les loix de l'Optique & de la Géométrie, quels font les objets les plus proches, & de combien ils le font plus que d'autres plus éloignés.

4. L'Obfervateur ayant enfuite confidéré attentivement tous les Aftres pendant un long efpace de temps, il en remarquera de deux fortes : les uns qui font épars çà & là dans tout le Ciel, inégalement lumineux, fenfiblement immobiles, & qu'en conféquence il appellera *Etoiles fixes*, ou fimplement *Etoiles ;* les autres qui tournent autour de Soleil avec des vîteffes fenfibles & très-inégales, il les appellera *Etoiles errantes* ou *Planetes.*

CHAPITRE PREMIER.

Des Etoiles fixes.

5. AVANT que de paffer outre, l'Obfervateur conclura que puifque les Etoiles fixes font immobiles, 1°. Il fuffit d'en faire une defcription exacte, & de déterminer par obfervation la pofition & l'ordre qu'elles gardent entr'elles. 2°. Qu'elles doivent fervir de points fixes & de termes de comparaifon pour y rapporter les mouvements des Planetes ; & que comme on ne peut d'un même endroit mefurer les mouvements, que par les angles que font à l'œil de l'Obfervateur les efpaces parcourus, il faut néceffairement y employer les Etoiles, en les regardant comme des points lumineux fixés dans la concavité d'une fphere, dont le rayon eft indéfini, & l'œil de l'Obfervateur eft le centre ; & cette fuppofition ne peut caufer aucune erreur, parce que la longueur des côtés d'un angle ne fait rien à fa grandeur.

6. Cet ufage des Etoiles prouve encore la néceffité d'en

avoir un catalogue exact, où leurs positions respectives soient déterminées dans la plus grande précision possible ; & par conséquent c'est par-là qu'il faut commencer l'Astronomie.

7. L'Observateur les partagera d'abord en plusieurs classes, selon la vivacité de leur lumiere. Il appellera les plus brillantes *les Etoiles de la premiere grandeur* ; celles qui le sont un peu moins, *Etoiles de la seconde grandeur*, & ainsi de suite ; de sorte que celles qu'on ne peut appercevoir qu'avec peine à la vue simple, s'appelleront *de la sixieme grandeur*, & que celles qu'on ne peut voir sans lunettes, seront *de la septieme*, *huitieme*, &c. grandeur.

8. Ensuite, afin d'éviter la confusion, & pour pouvoir dans la suite désigner une Etoile quelconque, sans être obligé de donner à chacune un nom particulier, il divisera le Ciel en plusieurs grouppes ou amas d'Etoiles, dans chacun desquels il dessinera une figure à volonté, par exemple, un Bélier, un Taureau, un Dragon, un Hercule, &c. ensorte que toutes les Etoiles qui composeront l'amas déterminé soient renfermées dans la figure dessinée, & répondent à ses différentes parties, dont elles prendront le nom.

9. Par exemple, ayant dessiné un Taureau dans un amas d'Etoiles, celle qui répondra à l'œil sera appellée l'*Etoile de l'œil du Taureau* ; une autre qui répondra au bout d'une corne, sera nommée *la corne du Taureau* ; & ainsi des autres. Par ce moyen, si on vient à en découvrir une nouvelle entre ces deux-là, on indiquera aussi-tôt dans quelle région du Ciel elle est, en disant qu'elle est dans la corne, ou vers le sommet de la tête du Taureau.

10. Il appellera *Constellation* un amas d'Etoiles renfermées de la sorte dans une figure dessinée.

11. Enfin, comme dans la Géométrie-Pratique, lorsqu'on veut lever un plan exact d'un terrein, on imagine que trois de chacun des objets qui sont dessus, forment des Triangles dont on mesure les côtés avec quelque instrument, comme avec une chaîne, & on lie tous ces triangles ensemble par des côtés communs ; de même l'Observateur imaginera que chaque Etoile forme avec deux autres à volonté un triangle sphérique, dont les côtés sont des arcs de la voûte céleste

apparente, compris entre ces Etoiles ; & parce que le centre de ces arcs eſt dans ſon œil, il pourra les meſurer avec un inſtrument fait en forme d'arc de cercle, & dont le rayon ſoit aſſez grand pour y pouvoir diſtinguer les degrés, minutes & ſecondes.

12. Ayant ainſi déterminé les arcs des diſtances de chaque Etoile à deux ou à trois autres, il pourra les poſer ſur un globe, & y deſſiner les figures des Conſtellations, ou en faire des Cartes générales & particulieres, de même qu'on poſe ſur le Globe terreſtre tous les points de la ſurface de la Terre dont on connoît les diſtances réciproques, & qu'on en fait des Cartes générales & Topographiques.

13. Comme la maſſe de la Terre que nous habitons nous cache ordinairement une partie des Etoiles, les anciens Aſtronomes avoient partagé la partie du Ciel qui leur étoit connue, en quarante-huit Conſtellations principales, ſavoir, la petite Ourſe, la grande Ourſe, le Dragon, Céphée, Caſſiopée, Andromede, Perſée, le Bouvier, la Couronne boréale, Hercule, la Lyre, le Cygne, le Serpentaire, le Serpent, la Fleche, l'Aigle & Antinoüs, le Dauphin, le petit Cheval, Pégaſe, le Triangle boréal, le Bélier, le Taureau, les Gémeaux, l'Ecreviſſe, le Lyon, la Vierge, la Balance, le Scorpion, le Sagittaire, le Capricorne, le Verſeau, les Poiſſons, la Baleine, Orion, l'Eridan, le Lievre, le grand Chien, le petit Chien, le Navire Argo, l'Hydre femelle, la Coupe, le Corbeau, le Centaure, le Loup, l'Autel, la Couronne Auſtrale, & le Poiſſon Auſtral.

14. Dans la ſuite les Navigateurs qui depuis trois cens ans ont pénétré dans les pays inconnus aux Anciens, ayant découvert les Etoiles qui ne ſe voyent jamais en Europe, parce qu'elles ſont trop près du Pole Auſtral ou Antarctique, ils en ont formé douze Conſtellations nouvelles, ſavoir, le Paon, la Grue, le Toucan, le Phénix, la Dorade, le Poiſſon volant, l'Hydre mâle, le Caméléon, la Mouche, l'Oiſeau de Paradis, le Triangle Auſtral & l'Indien (r).

15. Les figures qu'on a attribuées à ces nouvelles Conſtellations, n'ont eu d'autre origine que dans la fantaiſie de ceux qui les ont ainſi nommées. Il n'en eſt pas de même de celle des anciennes, qui ont pris leur origine dans les Cérémonies Religieuſes des Ethiopiens, Egyptiens, Phéniciens & Caldéens. Les Grecs en ont adopté une partie, & ont défiguré l'autre, en y ſubſtituant des noms & des figures

---

(r) M. de la Caille en a ajouté pluſieurs nouvelles du côté du pole auſtral, & il en a donné un Catalogue très-ample dans ſon *Cœlum auſtrale Stelliferum*. Elles ſont toutes ſur le globe Céleſte que j'ai publié en 1775, à Paris, chez Lattré, Graveur.

tirées de leurs Histoires fabuleuses. C'est ce qui a fait le sujet de plusieurs savantes Dissertations qu'on peut consulter (*f*).

16. Les plus anciennes observations des Etoiles qui soient venues jusqu'à nous, ont été faites par Timocharis & Aristille, 300 ans environ avant Jesus-Christ. Ensuite Hipparque de Rhodes fit, environ 130 ans avant Jesus-Christ, un Catalogue de toutes les Etoiles visibles, & 260 ans après lui, Ptolomée, Astronome d'Alexandrie, revit & publia ce Catalogue qui contenoit les noms & les positions de 1026 Etoiles, dont 1022 avoient été déterminées par Hipparque. Ce Catalogue a été le seul dont les Astronomes se soient servi jusqu'au seizieme siecle (*t*). Mais vers 1437 Vlugh-Beig, Prince Tartare, en fit construire un nouveau plus exact que celui de Ptolomée, & en 1600 Tycho-Brahé, en 1670 Hévélius, & en 1690 Flamsteed, en ont dressé chacun un nouveau, plus ample & plus exact que ceux qui les précédoient. Hévélius a rempli de nouvelles Constellations les intervalles des anciennes, & il a été suivi en cela par Flamsteed, & par la plupart des Astronomes d'aujourd'hui.

17. En 1603 Jean Bayer, Astrologue Allemand, publia des Cartes célestes gravées, où toutes les Constellations sont dessinées avec toutes les Etoiles visibles dont chacune est composée. Pour y distinguer ces Etoiles d'une façon plus abrégée, il désigna chacune par une Lettre Grecque ou Latine, en appellant l'une α, l'autre β, &c. à peu près selon l'ordre de leur grandeur. Cette dénomination a été suivie de tous les Astronomes modernes, qui nomment ainsi les Etoiles le plus souvent, en disant, par exemple, l'Etoile η de la grande Ourse, l'Etoile γ du Dragon, au lieu de dire, l'Etoile de la seconde grandeur qui est à l'extrêmité de la queue de la grande Ourse, la Luisante de la tête du Dragon, &c.

18. Pour apprendre le nom & la situation des Etoiles qui sont dans le Ciel, il faut avoir de grandes Cartes Célestes, comme celles de Bayer, celles du Pere Pardies, celles de Royer, celles de Senex, ou celles de l'Atlas Céleste de Flamsteed (*u*), ou au moins un Globe Céleste assez gros. Il faut trouver dans le Ciel, pendant une belle nuit quelques-unes de ces Etoiles que tout le monde connoît, comme,

---

(*f*) M. Dupuis, Professeur de Rhétorique au College de Lizieux, dans un ouvrage aussi ingénieux que savant auquel il travaille actuellement, fera voir que les noms des Constellations viennent la plupart des circonstances des saisons, & que l'Histoire Mythologique n'est qu'une allégorie perpétuelle tirée de ces Constellations.

(*t*) Ce Catalogue est dans l'Almageste de Ptolomée, le seul ouvrage complet qui nous soit resté de l'ancienne Astronomie.

(*u*) Il y en a une édition en petit format, qui se trouve à Paris, chez Fortin, rue de la Harpe; on y trouve aussi deux grands Planispheres de M. Robert de Vaugondy.

par exemple, celles qu'on appelle *la Poussiniere*, qui sont un tas de six Etoiles dans la Constellation du Taureau, & que les Astronomes appellent *les Pleyades*; ou bien celles qu'on nomme *les trois Rois*, qui sont les trois Etoiles du Baudrier d'Orion; ou bien les sept qu'on appelle *le Chariot*, qui sont les sept principales Etoiles de la grande Ourse. Il faut les chercher dans les Cartes à l'endroit où sont ces Constellations, ensuite on disposera la Carte à peu près de la même maniere que les Etoiles qu'on aura reconnues le sont dans le Ciel, & de proche en proche on trouvera le nom, l'ordre & les configurations des Constellations des Etoiles, en comparant ce qu'on voit dans le Ciel, avec ce qui est sur la Carte.

19. A l'égard du vrai lieu de l'Univers où chaque Etoile est placée, de leurs distances réelles du Soleil, de leur nature, de leur grosseur, de leur nombre & de leurs usages, ou de la fin pour laquelle Dieu les a faites, l'Observateur n'en pourra d'abord établir rien de certain. Car étant immobiles aussi-bien que le Soleil, l'Observateur qui est au centre du Soleil, ne peut trouver de base pour déterminer leurs distances par la Trigonométrie. Et parce qu'il en voit un nombre d'autant plus grand qu'il perfectionne plus sa vue par le secours des Lunettes, il croira avec raison qu'il est moralement impossible de les compter. Mais à cause de la vivacité de leur lumiere & de leur immobilité, il pourra faire des conjectures très-vraisemblables, en supposant qu'elles sont toutes autant de Soleils, c'est-à-dire, de la même nature, & à-peu-près égales à cet astre en grosseur & en lumiere, destinées chacune à être comme lui le centre & le principe du mouvement de plusieurs Planetes habitables, qui tournent à différentes distances. Dans cette hypothese il pourra appliquer aux Etoiles les découvertes qu'il aura faites sur le Soleil, & même déterminer à-peu-près le rapport de leurs distances, tant entre elles qu'à l'égard du Soleil, en mesurant l'intensité de la lumiere de chacune, laquelle est en raison inverse du quarré de leur distance à l'Observateur, suivant les regles de l'Optique.



CHAPITRE II.

Des Planetes.

ARTICLE PREMIER.

De leurs différents mouvements en général, & de leur nature.

20. APRÈS la description des Etoiles, l'Observateur s'appliquera à déterminer les mouvements des Planetes.

21. I. Il en remarquera six, qui tournent immédiatement autour du Soleil, toutes dans le même sens, en suivant à-peu-près la même route, mais avec des vîtesses fort inégales. Il leur donnera des noms pour les distinguer, & il inventera des caracteres pour les désigner. Il appellera *Mercure* celui qui va le plus vîte de tous, & le désignera par ce caractere ☿, il appellera & désignera les autres comme il suit, selon l'ordre de leurs vîtesses, *Venus* ♀, la *Terre* ♁, *Mars* ♂, *Jupiter* ♃, *Saturne* ♄.

22. II. Il observera que la Terre est toujours accompagnée d'une petite Etoile, Jupiter de quatre, Saturne de cinq. Ces petites Etoiles tantôt précédent, tantôt suivent, passent devant & derriere leur Planete. Il les appellera *Planetes du second ordre*, *Satellites* ou *Lunes*.

23. III. Il remarquera de temps-en-temps des corps qui paroissant d'abord fort petits, obscurs, mal terminés & fort lents, grossiront & augmenteront en peu de temps leur lumiere & leur vîtesse très-sensiblement, jusqu'à un certain point, ensuite diminueront de grosseur, de lumiere & de vîtesse, à-peu-près de la même maniere qu'elles auront augmenté, & enfin disparoîtront. Il en verra dans toutes les régions du Ciel, les unes allant dans un sens, les autres dans un autre. Il appellera ces corps *des Cometes*.

24. IV. Ayant considéré attentivement les surfaces des Planetes du premier ordre, il y remarquera des endroits plus obscurs que d'autres, (il les appellera des *Taches*) il les verra changer de place, passer d'un bord de la Planete à l'autre bord, se cacher derriere elle, reparoître ensuite

au premier bord; enfin continuer toujours le même mouvement assez uniformément. Il observera que ces taches paroissent s'élargir à mesure qu'elles s'éloignent du bord pour s'avancer vers le milieu de la Planete, & se retrécir ensuite en s'éloignant du milieu pour se rapprocher de l'autre bord, où en gardant toujours la même hauteur, elles ne paroissent plus que comme un filet en largeur; qu'enfin elles emploient un peu moins de temps à paroître sur le disque de la Planete, qu'à retourner du second bord au premier.

25. D'où il conclura que ces taches sont adhérentes au corps de la Planete, & que chaque Planete est un globe qui tourne sur un axe, & que par conséquent chaque Planete a en même-temps deux mouvements, l'un par lequel elle tourne sur son axe en très-peu de temps, & l'autre par lequel elle tourne autour du Soleil : ces deux mouvements se font à-peu-près de même que ceux d'une petite boule qui rouleroit tout autour d'un gros globe. Le premier de ces mouvements s'appellera *le mouvement diurne* ou *de rotation*, & le second, *le mouvement annuel* ou *de révolution*.

26. Avant la découverte des Télescopes (qui fut faite vers 1609) on ne soupçonnoit pas même que les Planetes eussent un mouvement de rotation. Képler, Astronome Allemand, qui florissoit dans ces temps-là, avoit cependant conclu de ses hypotheses Physiques, que le Soleil devoit en avoir un; ce qui a été confirmé par les observations qu'on a faites dans la suite. On a trouvé que le Soleil tournoit sur son axe en 25 jours & demi. Jupiter en $9^h\ 56'$, Mars en $24^h\ 40'$, Venus en $23^h\ 20'$ & la Terre en $23^h\ 56'\ 4''$. L'éloignement & la foiblesse de la lumiere de Saturne, la petitesse de Mercure, & sa grande proximité du Soleil, ont empêché d'y reconnoître des taches, & par conséquent de déterminer le temps de leurs révolutions diurnes. Cependant il est vraisemblable, par analogie, que ces deux Planetes tournent sur leur axe comme les autres.

27. A l'égard de la nature de ces taches, il est évident que les Planetes n'étant pas lumineuses par elles-mêmes comme les Etoiles, mais seulement parce qu'étant éclairées du Soleil, elles nous en renvoyent la lumiere, comme on le prouvera dans la suite, ces taches ne peuvent être autre chose que des parties de la surface de la Planete moins capables de renvoyer la lumiere, comme seroient des mers, des forêts, &c. Il est facile en effet de concevoir, que la Terre vue de loin doit paroître couverte de taches disposées de la même façon que les parties du monde sont dessinées sur le Globe terrestre. Que les

mers abſorbant preſque toute la lumiere, doivent paroître comme de grandes places obſcures; les petites iſles ou rochers nuds qui y ſont, comme des points brillants; les grands continents, comme de grands eſpaces clairs, parſemés de lieux obſcurs, & de points plus lumineux que les autres. Car les terres cultivées, entrecoupées de lacs & couvertes de forêts, doivent réfléchir peu de lumiere, & les terres blanches, les montagnes élevées, arides, & preſque toujours couvertes de neiges, doivent en réfléchir beaucoup. D'ailleurs quand on conſidere la Lune avec une bonne lunette de 12 à 15 pieds, on y diſtingue facilement des fonds & des montagnes; ce qui fait juger avec beaucoup de vraiſemblance que les Planetes ſont des lieux habités, ou du moins habitables comme la Terre. On peut lire là-deſſus ce qu'en ont écrit M. de Fontenelle dans *ſes Mondes*, & M. Huyghens dans ſon *Coſmotheoros*.

ARTICLE II.

Recherches des loix des mouvements des Planetes du premier ordre.

28. LA premiere choſe qu'il faut faire avant que d'entreprendre la recherche des loix des mouvements des Planetes, c'eſt d'établir une meſure fixe de leurs vîteſſes. Il faut donc diſtinguer dans le Ciel des eſpaces & des temps, puiſque la vîteſſe dépend de ces deux choſes, qu'une plus grande vîteſſe eſt celle où un plus grand eſpace eſt parcouru en moins de temps, & réciproquement. Mais un Géometre placé au centre d'un mouvement orbiculaire, ne peut déterminer les eſpaces parcourus réellement, parce qu'il faudroit connoître les diſtances réelles des corps qui tournent, ce qui eſt impoſſible : à la place des eſpaces, l'Obſervateur employera les angles ou les arcs apparents décrits dans la voûte céleſte par les Planetes; il les appellera *les vîteſſes angulaires*.

29. A l'égard des temps, la maniere de les meſurer en eſt arbitraire, pourvu qu'on y emploie toujours un même mouvement uniforme. C'eſt pourquoi l'Obſervateur ſe ſervira des révolutions diurnes d'une des Planetes choiſie à volonté, comme, par exemple, de la Terre. Il appellera *un jour* le temps d'une rotation de la Terre ſur ſon axe à l'égard du Soleil; il diviſera ce temps en 24 parties égales, appellées *heures*; chaque heure en 60 minutes, chaque minute en 60 ſecondes, &c. Il ſuppoſera enfin que

chaque jour commence lorsqu'une tache choisie sur la surface de la Terre, comme, par exemple, celle que la Ville de Paris y forme, se trouve précisément vis-à-vis le Soleil; & que le jour finit à l'instant que cette tache retourne dans la même situation.

30. Il faudra donc que l'Observateur ait deux sortes d'instruments pour observer les mouvements des Planetes, dont l'un soit un cercle ou une portion de cercle divisée exactement en degrés, minutes & secondes, afin de mesurer les angles ou les arcs apparents parcourus; & l'autre une horloge dont le mouvement soit très-uniforme, & qui montre les heures, minutes & secondes précises des temps.

ARTICLE III.

Recherche des révolutions annuelles des Planetes.

31. L'OBSERVATEUR ayant marqué les instants auxquels chacune des Planetes aura rencontré quelque Etoile fixe, & ayant observé les temps de plusieurs retours de chaque Planete à l'Etoile, avec laquelle il l'avoit vue pour la premiere fois, il remarquera que *les intervalles de temps entre tous les retours consécutifs d'une même Planete à la même Etoile sont sensiblement égaux*, & tels qu'on les trouve dans la Table suivante.

Temps des Révolutions annuelles des Planetes par rapport aux Etoiles fixes (*v*).

Mercure	87 jours	23 heures	15 $\frac{1}{2}$ minutes.
Venus	224	20	5 $\frac{1}{2}$
La Terre	365	6	9
Mars	686	23	30 $\frac{1}{2}$
Jupiter	4332	12	0
Saturne	10759	8	0

(*v*) Suivant mes nouvelles tables publiées en 1771, les révolutions sont un peu différentes; les voici, de même que les révolutions par rapport aux équinoxes.

Mercure	87^j	23^h	15′	37″	87^j	23^h	14′	26″
Venus	224	16	49	13	224	16	41	32
La Terre	365	6	9	11	365	5	48	45
Mars	686	23	30	43	686	22	18	27
Jupiter	4332	8	51	26	4330	8	58	27
Saturne	10761	14	36	42	10749	7	21	50

ARTICLE IV.

Recherche de la route que ſuivent les Planetes.

32. L'OBSERVATEUR examinera, 1°. Si chaque courbe décrite par les Planetes eſt dans un même plan, ou ſi ce n'eſt pas une *courbe à double courbure*, c'eſt-à-dire, qui n'eſt aſſujettie à aucun plan. 2°. En ſuppoſant que les orbites des Planetes ſoient chacune dans un plan, ſi ce ſont des plans de grands ou de petits cercles de la ſphere céleſte. 3°. Si tous ces plans enſemble n'en forment qu'un ſeul, ou ſi ce ſont pluſieurs plans différemment inclinés les uns aux autres.

33. Pour éclaircir ces doutes, l'Obſervateur remarquera d'abord, qu'en comparant trois à trois, ou quatre à quatre, toutes les Etoiles qui ſe ſeront trouvées préciſément ſur la route d'une même Planete, elles paroiſſent en ligne droite; il pourra même s'en aſſurer à l'aide d'un fil tendu & un peu écarté de l'œil; d'où il conclura que l'*orbite de chaque Planete eſt une courbe couchée ſur le plan d'un des grands cercles de la ſphere;* car tous les plans des grands cercles de la ſphere s'entrecoupent au centre, le fil tendu détermine avec l'œil la poſition d'un de ces plans : donc les Etoiles qui paroiſſent placées ſur ce fil, ſont dans le plan d'un grand cercle. Ainſi les deux premiers doutes ſont réſolus.

34. Par la même méthode il verra que quoique ces plans ſoient aſſez peu inclinés les uns aux autres, ils ne laiſſent pas d'être ſenſiblement différents, ce qui eſt encore plus évident lorſque les Planetes viennent à ſe trouver enſemble dans le même endroit du ciel; car il arrive preſque toujours que l'une paſſe au-deſſus de l'autre, & même à la diſtance de quelques degrés.

35. L'Obſervateur remarquera enſuite que *la route que les Planetes tiennent, traverſe ſucceſſivement les Conſtellations du Bélier, du Taureau, des Gemeaux, de l'Ecreviſſe, du Lyon, de la Vierge, de la Balance, du Scorpion, du Sagit-*

taire, du Capricorne, du Verseau & des Poissons. Et comme cette route eſt compoſée des orbites de ſix Planetes, & que ces orbites tantôt s'écartent, & tantôt s'entrecoupent; elles forment par conſéquent une bande ou zone tout autour du Ciel, à-peu-près de même que pluſieurs ornieres, tantôt paralléles, tantôt s'entrecoupant pour s'écarter un peu, forment ſur la terre un large chemin; l'obſervateur appellera cette bande *le Zodiaque.* Il le diviſera dans tout ſon contour, en commençant par une Etoile choiſie à volonté, comme par la premiere Etoile du Bélier, en douze parties égales qu'il appellera *Signes.* Chaque Signe contiendra par conſéquent trente degrés, & prendra ſon nom ou de l'ordre dans lequel il ſe trouvera depuis l'Etoile choiſie, ou de l'ordre de la Conſtellation qu'il renfermera. Ainſi on dira le premier ſigne ou le ſigne du Bélier; le ſecond ſigne, ou celui du Taureau, &c.

36. Les anciens Aſtronomes Grecs de qui nous tenons les noms & la forme des Conſtellations, avoient pris pour le premier point du Zodiaque, l'Etoile γ à l'oreille du Bélier, parce que c'étoit la premiere Etoile de la Conſtellation où le Soleil ſe trouvoit dans l'Equinoxe du Printemps. Dans ce temps-là chaque Conſtellation répondoit aſſez préciſément à chaque ſigne qui porte ſon nom : la Conſtellation du Bélier occupoit le premier ſigne, celle du Taureau le ſecond ſigne, &c. Mais comme le point du Ciel où arrive le Printemps, recule tous les ans d'environ 50″ de degrés, comme on le verra dans la ſuite, toutes les Etoiles paroiſſent avancer d'autant; & depuis ce temps-là l'Etoile γ a avancé de près d'un ſigne entier; ce qui fait que chaque Conſtellation ne répond plus à chaque ſigne, quoique chaque ſigne garde toujours ſon ancien nom. Ainſi la Conſtellation du Bélier eſt maintenant toute entiere dans le ſigne du Taureau; la Conſtellation du Taureau eſt preſque toute dans le ſigne des Gemeaux, &c. comme on le peut voir par les Cartes Céleſtes.

37. Parmi les Aſtronomes modernes, la plupart comptent les mouvements céleſtes depuis le point actuel de l'Equinoxe, les autres depuis l'Etoile γ du Bélier; mais ceux-ci pour s'accorder avec les précédents, ajoutent à tous leurs calculs la différence qu'il y a entre le lieu de cette Etoile, & celui de l'Equinoxe actuel.

38. On a inventé auſſi différents Caracteres pour déſigner les ſignes du Zodiaque, il faut ſe les rendre familiers; ils ſont rapportés dans la Table ſuivante.

Le Belier . . . . ♈	Les Gemeaux. . ♊	Le Lyon . . . . ♌
Le Taureau. . . . ♉	L'Ecreviſſe . . . ♋	La Vierge . . . ♍

La Balance . . ♎ Le Sagittaire . . . . ♐ Le Verseau . . . . . ♒
Le Scorpion. . ♏ Le Capricorne . . . ♑ Les Poissons . . . . ♓

39. Il eſt bon de remarquer encore que l'expreſſion générale *Signe*, ſignifie ordinairement 30 degrés, ſans avoir égard aux degrés (*x*) du Zodiaque. Ainſi quand on dit qu'un point du Ciel eſt éloigné d'un autre de deux ſignes; cela ſignifie que l'arc compris entre ces deux points eſt de 60 degrés.

ARTICLE V.

Recherche des cauſes des inégalités des mouvements des Planetes.

40. L'OBSERVATEUR conſidérant plus particuliérement le mouvement de chaque Planete, s'appercevra bientôt qu'elles ont des vîteſſes ſenſiblement inégales. C'eſt la loi de ces inégalités qui doit faire le principal objet de ſes recherches.

41. Pour établir quelque choſe de certain là-deſſus, & pour pouvoir s'aſſurer de la cauſe de ces inégalités, s'il n'y en a qu'une, ou pour les démêler s'il y en a pluſieurs; enfin pour découvrir de quelle maniere ces cauſes agiſſent, il ſe propoſera d'obſerver tous les jours à la même heure, le lieu de chaque Planete dans ſon orbite, pendant une révolution entiere au moins. Ainſi pour trouver la Théorie de Mercure, ſuppoſons que l'Obſervateur ait déterminé avec ſes inſtruments chaque jour à midi les poſitions ſuivantes de Mercure dans ſon orbite, (voyez pag. 50) (*y*) c'eſt-à-dire, le nombre des ſignes, degrés, minutes & ſecondes, de l'arc céleſte compris entre le centre de Mercure, & une Etoile qu'il aura rencontrée ſur ſon orbite en entrant dans le ſigne du Bélier, en meſurant toujours cet arc dans le ſens du mouve-

---

(*x*) Je crois que l'Auteur a voulu dire aux Etoiles des ſignes du Zodiaque.

(*y*) Cette table quoiqu'elle porte le titre de *diſtances obſervées*, n'eſt faite que d'après le calcul tiré des tables de Mercure.

ment des Planetes, ce qu'on appelle *ſelon l'ordre des ſignes.*

42. Ayant conſidéré attentivement toutes ces obſervations, & pris, comme on voit à côté de chacune, les différences entre chaque poſition de Mercure, ce qui donne ſon mouvement diurne; & par conſéquent la vîteſſe angulaire vraie qu'il a eue chaque jour, l'Obſervateur examinera, 1°. Si ces inégalités ne ſeroient pas ſeulement apparentes, & ne viendroient pas de ce que Mercure change de diſtance par rapport au Soleil, quoique ſon mouvement ſoit réellement uniforme. Car l'expérience fait voir qu'un corps mu uniformément, paroît aller d'autant plus vîte qu'il eſt moins éloigné, & réciproquement; de ſorte que c'eſt une loi d'Optique, *qu'en temps égaux les inégalités apparentes des vîteſſes égales ſont en raiſon inverſe des diſtances à l'œil du Spectateur.* 2°. Ou bien ſi ces inégalités ne ſeroient pas réelles, & ſi la Planete n'iroit pas tantôt plus vîte, tantôt plus lentement, ſans pour cela changer de diſtance au Soleil. 3°. Ou enfin ſi ces deux cauſes enſemble n'y contribueroient pas.

43. Pour éclaircir ces doutes, il faut remarquer que lorſqu'un objet s'éloigne, ſon diametre paroît diminuer de grandeur. De ſorte que c'eſt une autre loi d'Optique, que *lorſque les angles ſous leſquels on voit les diametres d'un même objet ſont petits, ils ſont en raiſon inverſe des diſtances de cet objet à l'œil.* Il eſt aiſé de conclure de ces deux loix, que les vîteſſes apparentes d'un même objet mu uniformément, ſont en raiſon directe des angles ſous leſquels on voit ſon diametre. D'où l'Obſervateur tirera ces deux Regles.

44. I. *Si les inégalités des Planetes ſont réelles, & cauſées uniquement par un changement réel de vîteſſes dans leurs orbites, ſans changer de diſtances au Soleil, leurs diametres doivent être vus ſous un angle conſtant.*

45. II. *Si les Planetes ont par elles-mêmes un mouvement uniforme, & ſi leurs inégalités ne ſont qu'apparentes, & cauſées ſeulement par un changement continuel de diſtance au Soleil, leurs vîteſſes, ou les arcs qu'ils décrivent, ſont en temps égaux comme leurs diametres.*

Distances observées de Mercure à la premiere Etoile du ♈ à midi.

1740.		fig.	deg.	min.	fec.	différences.
Juin.	14	0	2	4	30	5° 2′ 37″
	15	0	7	7	7	5 12 23
	16	0	12	19	30	5 22 14
	17	0	17	41	44	5 31 53
	18	0	23	13	37	5 41 20
	19	0	28	54	57	5 50 12
	20	1	4	45	9	5 58 31
	21	1	10	43	40	6 5 53
	22	1	16	49	33	6 12 12
	23	1	23	1	43	5 17 9
	24	1	29	18	54	6 20 54
	25	2	5	39	48	6 23 1
	26	2	12	2	49	6 23 29
	27	2	18	26	18	6 22 22
	28	2	24	48	40	6 19 33
	29	3	1	8	13	6 15 13
	30	3	7	23	26	6 9 42
Juillet	1	3	13	33	8	6 2 53
	2	3	19	36	1	5 55 8
	3	3	25	31	9	5 46 31
	4	4	1	17	40	5 37 25
	5	4	6	55	5	5 27 52
	6	4	13	22	57	5 18 10
	7	4	17	41	7	5 8 21
	8	4	22	49	28	4 58 33
	9	4	27	48	1	4 49 2
	10	5	2	37	3	4 39 46
	11	5	7	16	49	4 30 54
	12	5	11	47	43	4 22 22
	13	5	16	10	5	4 14 12
	14	5	20	24	17	4 6 28
	15	5	24	30	45	3 59 9
	16	5	28	29	54	3 52 15
	17	6	2	22	9	3 45 46
	18	6	6	7	55	3 39 22
	19	6	9	47	17	3 34 2
	20	6	13	21	19	3 28 48
	21	6	16	50	7	3 23 57
	22	6	20	14	4	3 19 20
	23	6	23	33	24	3 15 17
	24	6	26	48	41	3 11 19
	25	7	0	0	0	3 7 44
	26	7	3	7	44	3 4 27
	27	7	6	12	11	3 1 31
	28	7	9	13	42	2 58 51
	29	7	12	12	33	
						2 56 24

		fig.	deg.	min.	fe	différences
Juill.	30	7	15	8	57	2° 54′ 11″
	31	7	18	3	8	2 52 15
Août.	1	7	20	55	22	2 50 27
	2	7	23	45	50	2 49 2
	3	7	26	34	52	2 47 45
	4	7	29	22	37	2 46 36
	5	8	2	9	13	2 45 49
	6	8	4	55	2	2 45 3
	7	8	7	40	5	2 44 43
	8	8	10	24	48	2 44 24
	9	8	13	9	12	2 44 20
	10	8	15	53	32	2 44 30
	11	8	18	38	2	2 44 51
	12	8	21	22	53	2 45 25
	13	8	24	8	18	2 46 10
	14	8	26	54	28	2 47 4
	15	8	29	41	32	2 48 17
	16	9	2	29	49	2 49 39
	17	9	5	19	28	2 51 8
	18	9	8	10	36	2 53 10
	19	9	11	3	46	2 55 13
	20	9	13	58	59	2 57 23
	21	9	16	56	22	3 0 1
	22	9	19	56	23	3 2 48
	23	9	22	59	11	3 5 55
	24	9	26	5	6	3 9 20
	25	9	29	14	26	3 12 56
	26	10	2	27	22	3 17 10
	27	10	5	44	32	3 21 24
	28	10	9	5	56	3 26 2
	29	10	12	31	58	3 30 57
	30	10	16	2	55	3 36 15
	31	10	19	59	10	3 42 24
Sept.	1	10	23	21	34	3 48 52
	2	10	27	10	26	3 55 14
	3	11	1	5	30	4 2 23
	4	11	5	7	53	4 9 54
	5	11	9	17	47	4 17 47
	6	11	13	35	34	4 26 10
	7	11	18	1	44	4 34 56
	8	11	22	36	40	4 43 52
	9	11	27	20	32	4 53 19
	10	0	2	13	51	5 2 54
	11	0	7	16	45	5 12 42
	12	0	12	29	27	5 22 31
	13	0	17	51	58	

46. Il ne s'agit plus que de voir ſi quelqu'une de ces Regles a lieu. Pour cela l'Obſervateur déterminera de temps-en-temps avec toute la préciſion poſſible, l'angle ſous lequel on voit le diametre de Mercure, principalement lorſque ſa vîteſſe eſt la plus grande, & la plus petite. Il trouvera que cet angle va toujours en augmentant depuis la plus petite vîteſſe juſqu'à la plus grande, & au contraire. Ainſi il le trouvera dans le temps de la plus grande vîteſſe de 25″, 4 & dans le temps de la plus petite vîteſſe de 16″, 6. D'où il ſuit évidemment que la premiere Regle n'a pas lieu, & que ſi l'orbite de Mercure eſt un cercle, le Soleil n'en eſt pas au centre, puiſqu'il change à tout moment de diſtance à ſon égard.

47. Enſuite ſuivant la ſeconde Regle, il ſera cette proportion : Comme le plus petit diametre 16″, 6, eſt à la plus petite vîteſſe 2° 44′ 20″ obſervée entre le 9 & le 10 Août; ainſi le plus grand diametre 25″, 4 eſt à la plus grande vîteſſe que Mercure puiſſe avoir en un jour, ſi la ſeconde Regle a lieu. Le calcul donne pour quatrieme terme 4° 11′ 27″. Or on a trouvé qu'entre le 26 & le 27 Juin, la vîteſſe de Mercure étoit de 6° 23′ 29″. Donc, 1°. les inégalités des Planetes ne ſont pas ſeulement apparentes, ni cauſées uniquement par les variations de leurs diſtances au Soleil. 2°. Et puiſque la plus grande vîteſſe obſervée excéde de 2° 12′ 2″ celle qu'on a conclue de la ſeconde Regle, il faut que lorſqu'une Planete approche du Soleil, elle reçoive dans ſon mouvement une accélération réelle, qui ſe joigne à l'accélération apparente cauſée par la proximité; ainſi, *les inégalités des Planetes ont une cauſe Phyſique & une cauſe Optique; c'eſt-à-dire, elles ſont en partie réelles, & en partie apparentes.*

48. Tous les anciens Aſtronomes avoient confondu en une ſeule les inégalités Phyſique & Optique des Planetes, ce qui rendoit toutes leurs Théories fauſſes, en donnant de faux rapports de diſtances. Képler eſt le premier qui démontra l'exiſtence de ces deux cauſes, & qui fit voir qu'elles influoient également à peu près dans les inégalités des Planetes. Voyez ſon Livre intitulé *Aſtronomiæ pars Optica*, pag. 341.

ARTICLE VI.

Recherche de la figure de l'orbite des Planetes.

49. L'OBSERVATEUR continuant l'examen de ses Observations, remarquera, 1°. Que les vîtesses de Mercure décroissent assez réguliérement depuis le terme de la plus grande vîtesse observée le 26 Juin jusqu'à celui de la plus petite observée le 9 Août : & qu'ensuite elles croissent avec la même régularité avec laquelles elles ont décru, de sorte qu'à égales distances de part & d'autre d'un de ces deux termes, les vîtesses sont égales. 2°. Que vers ces termes les vîtesses sont moins inégales, & plus uniformes. 3°. Que la distance de ces termes est de six signes ou de la moitié de l'orbite, & que l'intervalle de temps du passage de l'un à l'autre, est de 44 jours, moitié du temps de la révolution annuelle de Mercure. 4°. Qu'après avoir achevé sa révolution, la Planete étant retournée les premiers jours de Septembre aux mêmes lieux où on l'avoit observée d'abord en Juin, elle a la même vîtesse dans les mêmes points du Ciel.

50. D'où l'Observateur conclura : 1°. Que *la courbe décrite par la Planete est fermée & réguliere* : 2°. Que *les deux termes de la plus grande & de la plus petite vîtesse*, (qu'il appellera en général les *Absides* (z) de la Planete, en nommant *Abside supérieure*, ou *Aphélie*, le point de l'orbite où est la plus petite vîtesse, & *Abside inférieure*, ou *Périhélie*, le point où la vîtesse est la plus grande,) *sont diamétralement opposés par rapport au Soleil*; en sorte que la ligne qui les joint (qu'on appelle *la ligne des Absides*,) doit être un diametre de la courbe, & passer par le centre du Soleil : 3°. Que *la position de cette ligne est sensiblement fixe dans le Ciel*, puisqu'on a trouvé (31) que tous les retours de la Planete à la même Etoile se sont faits en temps égaux,

(z) La plupart des Astronomes écrivent *apsides* du mot grec ἁψις qui exprime la courbure de l'orbite.

& que ſa vîteſſe eſt toujours la même lorſqu'elle eſt dans le même point du Ciel : 4°. Que *la cauſe qui fait mouvoir la Planete, agit de la même maniere à égale diſtance de part & d'autre de la ligne des Abſides.*

ARTICLE VII.

Recherche d'une hypotheſe Phyſique, pour trouver la courbe décrite par la Planete, & pour trouver la loi de ſes inégalités dans les différents points de ſon orbite.

51. IL ne s'agit donc plus que de trouver, à l'aide de la Méchanique, une hypotheſe Phyſique, dans laquelle chaque Planete doive alternativement s'approcher & s'éloigner du Soleil, accélérer & retarder ſa vîteſſe ſuivant une loi qui s'accorde aux obſervations, en ſorte qu'on puiſſe d'après cette hypotheſe, & par le moyen de l'Arithmétique & de la Géométrie, établir des Regles de calculs, qui repréſentent tout ce qui aura été obſervé dans les ſiecles paſſés, & qui ſervent à prévoir tout ce qui pourra l'être dans la ſuite.

52. Pour y parvenir méthodiquement, & par conſéquent auſſi sûrement qu'il eſt poſſible, l'Obſervateur ſe rappellera par ordre les Principes ſuivants de la Méchanique.

ARTICLE VIII.

Principes de Méchanique, ſur leſquels toute l'Aſtronomie Phyſique eſt fondée (a).

53. AXIOME I. *LEs effets ſont proportionnels à leurs cauſes.*

(*a*) On peut conſulter à ce ſujet les *Leçons Elémentaires de Mechanique* de notre Auteur, édition de 1765, in-8°; le *Traité de Méchanique de M. l'Abbé Marie*, 1774, in-4°, ou, ſi l'on veut aller plus loin, la Méchanique de M. Euler, en 3 vol. in-4°; la Dynamique de M. d'Alembert, ſeconde édition.

C'est-à-dire, un effet croît ou décroît dans le même rapport, suivant lequel l'action de la cause qui le produit croît ou décroît.

54. AXIOME II. *Un corps n'a de lui-même aucune vertu, aucune force pour changer son état de repos ou de mouvement.*

55. 3°. Donc, 1°. *Si un corps est une fois mis en mouvement, il y restera sans cesse, à moins que quelque cause ne l'arrête.*

56. 2°. Si un corps a reçu une impression pour être mu, il se meut toujours de la même maniere proportionnée à cette impression, sans changer de route ni de vîtesse. Donc *un corps qui a reçu une impression, tend toujours à se mouvoir uniformément en ligne droite.*

57. 3°. *Un corps en mouvement ne peut rallentir sa vîtesse, qu'il ne reçoive une nouvelle impression plus contraire que favorable à la premiere; & il ne peut l'accélerer qu'il ne reçoive une impression plus favorable que contraire à la précédente.*

58. 4°. *Un corps en mouvement ne peut décrire un Polygone, qu'il ne soit détourné de son chemin rectiligne, par quelque cause qui agisse sur lui suivant une nouvelle direction, lorsqu'il est à l'extrémité de chaque côté du Polygone.*

59. AXIOME III. *Une puissance motrice qui fait un effort sur un corps, soit en repos, soit en mouvement, y éprouve une résistance proportionnée à la masse de ce corps, & à la vîtesse que la puissance tend à lui donner. Cette résistance détruit une partie de la force de la puissance motrice, & elle fait le même effet, que si le corps résistant étoit animé d'une force égale à la force détruite, & dirigée en un sens opposé à celui dans lequel elle agissoit.* C'est ce qu'on exprime autrement lorsqu'on dit, *la Réaction est toujours égale à l'action, & en sens contraire.*

60. Ce principe est une loi observée constamment dans la nature, & que l'expérience démontre en mille manieres, mais principalement dans l'action des corps les uns sur les autres.

61. Les Méchaniciens appellent *inertie* la propriété qu'ont tous les corps de résister au changement de leur état actuel.

62. DEFINITIONS. I. On appelle *mouvement uniforme*

celui qu'un corps a reçu par l'action instantanée d'une puissance quelconque : ou plus exactement, celui par lequel un corps décrit en temps égaux des espaces égaux.

63. II. On appelle *mouvement uniformément accéléré*, celui qui est produit dans un corps par une répétition continuelle d'actions égales, qui augmentent sa vîtesse à chaque instant égal par des degrés égaux.

64. Thoreme I. *Quand un corps est mu uniformément, les espaces qu'il parcourt en temps égaux, sont comme ses vîtesses. Les espaces qu'il parcourt avec une même vîtesse, sont comme les temps employés à les parcourir ; & les vîtesses employées à parcourir des espaces égaux, sont en raison inverse des temps.*

65. Car on conçoit qu'un espace parcouru uniformément pendant un temps fixe comme une minute, est d'autant plus grand que la vîtesse a été plus grande. Que si au commencement d'une autre minute de temps la vîtesse est double ou triple, l'espace qu'il parcourra pendant cette minute, sera double ou triple, & par conséquent toujours dans le rapport de la vîtesse. Il faut raisonner de même pour les autres parties de ce Théorême. On sent qu'un corps qui a toujours une même vîtesse, décrit des espaces d'autant plus grands, qu'il y emploie plus de temps : & que s'il décrit des espaces égaux, sa vîtesse à parcourir chacun de ces espaces, est d'autant plus grande qu'il y emploie moins de temps.

66. Theoreme II. *Dans le mouvement uniforme les espaces* E, e, *parcourus par deux corps* A, B, *en des temps différents* T, t, *& avec des vîtesses differentes* V, u, *sont entr'eux comme les produits* VT, ut, *des vîtesses par les temps, ou* E : e : : VT : ut.

67. Dem. Supposons d'abord que le corps A ayant une vîtesse *u* égale à celle du corps B, parcourt un certain espace *ε* dans le temps T ; alors si on veut comparer cet espace *ε* avec l'espace E qu'il parcourt réellement, avec sa vîtesse V, on a (64), à cause du temps T qui est le même, E : *ε* : : V : *u*. Et si on veut comparer cet espace *ε* avec l'espace *e* que le corps B parcourt réellement dans le temps *t*, on a, à cause de la vîtesse *u*, qui est la même, *ε* : *e* : : T : *t*. Donc (Elem. 307) E*ε* : *εe* : : VT : *ut*. & (Elem. 296) E : *e* : : VT : *ut*.

68. Remarque I. Les Méchaniciens expriment par une simple équation, le rapport constant qui se trouve entre les variations de deux quantités souvent incomparables & héterogenes. Par exemple, pour dire que les espaces

ſont toujours comme les temps, ils écrivent $e = t$, quoiqu'on ne puiſſe réellement égaler un eſpace, qui eſt une étendue permanente, avec le temps, qui eſt une étendue ſucceſſive & hétérogene à l'eſpace. Mais cela ſignifie que l'eſpace augmente ou diminue dans le même rapport, ſuivant lequel le temps augmente ou diminue. Pour exprimer que les vîteſſes ſont en raiſon inverſe des temps, ils mettent $u = \frac{1}{t}$; car (Elem. 299) une raiſon inverſe peut s'arranger comme une raiſon directe, pourvu que ſes termes ſoient dénominateurs de fractions dont le numérateur ſoit 1. Pour ſignifier que quelque quantité ne varie point, ou eſt toujours conſtante, on la fait égale à l'unité.

69. Suivant cet uſage, le Théorême I. peut s'exprimer ainſi en abrégé : *dans le mouvement uniforme, ſi* $t = 1$, $e = u$; *ſi* $u = 1$, $e = t$; *& ſi* $e = 1$, $u = \frac{1}{t}$ ou $t = \frac{1}{u}$. Et le Théorême II. *dans le mouvement uniforme*, $e = ut$.

70. II. Quand dans une formule générale il ſe trouve quelque quantité toujours conſtante ou ſuppoſée conſtante, ou quelque produit, ou quelque quotient de quantités conſtantes ou ſuppoſées conſtantes, alors ſans changer le rapport entre les quantités variables qui ſont dans cette formule, on le rend beaucoup plus ſimple, en mettant 1 à la place de cette quantité conſtante, & en faiſant la réduction que demande cette ſubſtitution. Par exemple, de ce que $e = ut$, ſi on ſuppoſe le temps conſtant, alors $t = 1$, mettant 1 à la place de t, on a $e = u \times 1$, ou $e = u$, ce qui fait voir qu'en ſuppoſant le temps conſtant, l'eſpace eſt comme la vîteſſe. Si on a une formule $p = \frac{abx}{qs}$, qui exprime la valeur abſolue de la quantité p, & ſi on ſuppoſe enſuite que ab ſoit un produit de quantités conſtantes, alors on aura $p = \frac{x}{qs}$, ce qui ſignifie que quoique la valeur de p ſoit réellement $\frac{abx}{qs}$, cependant p ne varie qu'en

raison de la variation du quotient de la quantité variable x divisée par la quantité variable qs. Ainsi après une pareille substitution, la formule n'exprime plus que le rapport des variations de p.

71. COROLL. De ce que dans le mouvement uniforme $e = ut$, il suit que $u = \frac{e}{t}$, & $t = \frac{e}{u}$.

72. THEOR. III. *Un mouvement inégal quelconque & dans une courbe quelconque, peut être regardé comme composé d'une infinité de mouvements uniformes & rectilignes, pendant chaque instant infiniment petit de la durée finie de ce mouvement; & on peut concevoir que ce n'est qu'au commencement de chacun de ces instants infiniment petits, que le mobile reçoit une variation dans sa vîtesse & dans sa direction, qui subsistent sans varier davantage pendant toute la durée de cet instant infiniment petit.*

73. Car pendant chaque instant infiniment petit, un mobile ne peut faire qu'un pas, ces pas comparés entre eux peuvent bien être inégaux, & différemment dirigés; mais on ne peut concevoir d'inégalité ni de détour dans un pas pris séparément.

74. THEOR. IV. *Dans un mouvement uniformément accéléré, les vîtesses sont comme les temps; ou* u = t.

75. Car le mobile recevant à chaque instant égal une nouvelle impression égale, & par conséquent un nouveau degré égal de vîtesse, la somme de ces degrés est toujours égale à la somme des instants, & par conséquent les vîtesses sont toujours comme les temps comptés depuis le commencement du mouvement.

76. THEOR. V. *L'espace* e *parcouru pendant un certain temps fini* t *par un mouvement uniformément accéléré, n'est que la moitié de l'espace qui seroit parcouru en même-temps par un mouvement uniforme, avec une vîtesse* u *égale à la vîtesse acquise par l'accélération à la fin du temps* t.

77. Car en partageant le temps t en une infinité d'instants égaux, les degrés de vîtesse seront à la fin de chacun de ces instants consécutifs, selon cette progression arithmétique $\div\ 1\frac{u}{\infty}\cdot 2\frac{u}{\infty}\cdot 3\frac{u}{\infty}\cdot 4\frac{u}{\infty}\cdots \infty\frac{u}{\infty} = u$. Or (72) pendant chaque instant infiniment petit, le

mouvement étant uniforme, l'espace parcouru pendant chacun est comme la vîtesse (65) que le mobile a pour lors. Donc chaque terme de cette progression qui exprime la vîtesse, représente aussi chaque espace correspondant, & la somme de tous ces termes représente l'espace total parcouru pendant toute la durée t du mouvement. Mais (Elem. 280) la somme de cette progression est égale à la somme $1\frac{u}{\infty} + u$ des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes, c'est-à-dire, par la moitié du nombre des instants, ou par $\frac{t}{2}$. Donc l'espace total est représenté par $(1\frac{u}{\infty} + u) \times \frac{t}{2} = \frac{ut}{2}$, parce que $1\frac{u}{\infty} = 0$ (Elem. 360.)

78. Theor. VI. *Les espaces parcourus par un même mouvement uniformément accéléré, sont entr'eux, en comptant tout depuis le commencement du mouvement, comme les quarrés des temps employés à les parcourir, ou comme les quarrés des vîtesses acquises à la fin de ces temps.*

79. Car dans la formule $e = \frac{tu}{2}$ si on substitue $t = u$ (74), on aura $e = \frac{tt}{2}$ ou $e = \frac{uu}{2}$, ou parce que 2 est une quantité constante, $e = uu = tt$.

80. Scholie I. Les degrés égaux de vîtesse qui s'acquierent à chaque instant, & par conséquent les espaces parcourus réellement, dépendent de l'intensité de la force accélératrice qui anime le mobile. Une force accélératrice plus foible qu'une autre, fera acquérir de moindres degrés de vîtesse, & parcourir en même-temps de moindres espaces; mais ces vîtesses seront toujours dans la raison simple des temps, & ces espaces dans la raison doublée des temps. Ainsi, *lorsqu'il s'agit de comparer entr'eux deux mouvements produits par des forces accélératrices différentes*, on doit dire; 1°, *que la vîtesse est en raison composée de la force accélératrice & du temps*; 2°, que *les espaces parcourus sont en raison composée de la force & du quarré du temps*; 3°, que *les quarrés des vîtesses acquises sont en raison composée de la force & de l'espace*: Appellant donc f la force accélératrice, on aura les formules suivantes :

$u = ft = \sqrt{fe}$. Donc si $u = 1$, $e = \frac{1}{f}$, &c.

$e = ftt$.

$f = \frac{e}{tt}$

$t = \sqrt{\frac{e}{f}}$.

81. Ces sortes de formules qui renferment des raisons composées se démontrent toutes de la même maniere que ci-dessus, n°. 67. Ainsi pour démontrer en général que $e = ftt$, ou que les espaces parcourus en vertu de différentes forces accélératrices, sont entr'eux comme le produit de ces forces par les quarrés des temps; soient deux corps A, B, qui doivent décrire les espaces E, e, dans les temps T, t, en vertu des forces accélératrices F, f; je dis que E : e : : FTT : ftt. Supposons que le corps A ait d'abord une force accélératrice f en vertu de laquelle il décrive l'espace ε dans le temps T, alors en comparant cet espace ε avec l'espace E que le corps A doit parcourir dans le même temps T, il est clair que E : ε : : F : f; & en comparant ce même espace ε avec l'espace e décrit par le corps B avec la même force accélératrice f, on a ε : e : : TT : tt. Donc Eε : εe; ou (Elem. 296) E : e : : FTT : ftt.

82. SCHOLIE II. On a trouvé par expérience que les corps qui tombent sur les surfaces des Planetes y tombent par un mouvement uniformément accéléré (*b*). Et la force accélératrice qui produit cet effet, s'appelle *la pesanteur*. On a même déterminé par des expériences bien sûres, & par des raisonnements très-certains, que sur la surface de la Terre, les corps qui tombent librement, & à qui l'air ne fait aucune résistance sensible, parcourent 15 $\frac{1}{10}$ pieds pendant la premiere seconde de leur chûte. On peut donc dans les formules précédentes faire $f =$ 15, 1 pieds, quand t est exprimé en secondes de temps, & que le corps pesant est supposé près de la surface de la Terre.

83. SCHOLIE III. On peut concevoir une *force retardatrice constante*, qui à chaque instant égal donne à un mobile une impression contraire à celle de son mouvement, & qui par conséquent lui fasse perdre à chaques instants égaux des degrés égaux de vîtesse. Et cette force retardatrice aura précisément les mêmes propriétés en sens contraires, que la force accélératrice, en comptant les temps & les espaces depuis l'instant où la force retardatrice aura totalement détruit le mouvement du mobile. Ainsi, lorsqu'on jette une pierre en l'air, sa pesanteur est une force retardatrice constante, qui s'oppose à son

---

(*b*) C'est Galilée au commencement du dernier siecle, V. l'*Histoire des Mathématiques*, par M. Montucla, 1758, 2 vol. in-4o. Mais cette quantité se détermine plus exactement par la longueur du pendule qu'on peut mesurer à un dixieme de ligne près. V. les *Memoires de l'Académie*, pour 1735.

élévation ; & lorsqu'elle a détruit totalement le mouvement en en-haut, elle devient force accélératrice constante, pour faire retomber la pierre précisément avec les mêmes degrés de vîtesse, dans les mêmes temps selon lesquels elle a monté.

84. THEOR. VII. *Si deux puissances quelconques donnent dans le même instant chacune une impression à un même corps dans une même ligne droite pour le faire aller dans* { *un même sens* / *un sens opposé* } ; *ce corps se meut uniformément dans cette droite du côté où* { *tendent les deux puissances* / *se fait le plus grand effort* }, *& sa vîtesse est égale à* { *la somme* / *la différence* } *des vîtesses que chacune des deux puissances lui eût communiquées séparément. Ce qui doit aussi s'entendre de tant de puissances qu'on voudra, qui agissent à la fois dans une même droite.*

Ceci est une suite évidente du premier Axiome (53).

85. COROLL. Puisque deux puissances qui agissent en même temps dans une même direction se réunissent, & que celles qui sont directement opposées se détruisent, de sorte qu'il ne reste que l'excès de la plus forte sur la plus foible, il suit que *si les directions de deux puissances font un angle, elles n'agissent ni dans le même sens, ni dans un sens directement opposé ; mais leurs efforts sont en partie conspirants, en partie opposés, & par conséquent ils s'unissent en partie, & se détruisent en partie, selon que les directions des deux droites qui expriment en particulier chaque puissance, participent plus ou moins de la coïncidence & de l'opposition directe.*

86. LEMME. *Si on prend pour Rayon une droite* BC (fig. 17) *qui rencontre obliquement un plan* DB, (& par rapport auquel elle n'est par conséquent ni coïncidente ou paralléle, ni perpendiculaire, mais dans une position qui participe de ces deux) *le sinus* CA *de l'angle* ABC *de l'obliquité, exprimera la perpendicularité de la droite* BC, *& le sinus de complément* BA *en exprimera le parallélisme ou la coïncidence.*

87. DEM. La droite BC est dans une position qui est entre la paralléle & la perpendiculaire au plan DB ; on peut donc concevoir qu'elle est formée par la trace d'un point dont les pas sont alternative-

ment paralléles & perpendiculaires à ce plan D B, ce qui fait que cette trace a réellement la figure d'une espece de gradin, quoiqu'à cause des pas infiniment petits, leur assemblage ne forme qu'une seule ligne droite. Or dans cette hypothese il est clair que A C est égal à la somme de tous les pas perpendiculaires à DB, & AB égale à la somme de tous les pas paralléles. Donc AC mesure la perpendicularité de BC sur DB, & AB en mesure le parallélisme ou la coïncidence. Or (Elem. 747) BC étant pris pour rayon, AC est le sinus de l'angle CBD, & AB le sinus de l'angle ABC, complément de DBC. Donc, &c.

88. THEOR. VIII. *Si un corps* C (Fig. 18) *est poussé à la fois par deux puissances qui font un angle quelconque* ACD, *dont l'une représentée par* CA, *soit capable de pousser uniformément le corps de* C *en* A *pendant un certain temps* T, *& l'autre représentée par* CD, *soit capable de le faire aller uniformément de* C *en* D *dans le même temps* T; *le corps parcourra uniformément dans le temps* T *la diagonale* CB *d'un parallélogramme* CABD *formé sur les deux droites* CA, CD.

89. DEM. Puisque les deux directions CA, CD, font un angle, les puissances agissent sur le corps C par des efforts en partie conspirants, & qui par conséquent doivent être exprimés par deux droites coïncidentes, & en partie opposés, & qui doivent par conséquent être exprimés par deux perpendiculaires à la direction des efforts conspirants, mais situées en sens contraires. Or le corps n'ayant par lui-même aucune force pour se déterminer, il est évident, 1°. qu'il ne sera pas mû à moins que l'effet des efforts opposés, ne soit totalement détruit; ce qui ne peut être à moins que ces efforts ne soient égaux, & par conséquent exprimés par deux perpendiculaires égales. 2°. Qu'il ne suivra ni la direction CA, ni CD, mais seulement celle des efforts conspirants, & qu'il ne doit s'y mouvoir que comme s'il n'étoit animé que par une seule force égale à la somme des efforts conspirants : donc il doit parcourir uniformément dans le temps T une droite égale à la somme de celles qui expriment les deux efforts conspirants. Or je dis, que si ayant tiré AD, on fait passer par C & par le point du milieu I une droite indéfinie CB, elle sera la direction des deux efforts conspirants.

90. Car alors les perpendiculaires AE, DF, menées des points A, D, sur CB sont égales, à cause des Triangles rectangles AEI, IFD, qui ont des angles égaux chacun à chacun, & les hypoténuses IA, ID, égales. Donc les deux perpendiculaires AE, DF, égales & posées en sens contraires, expriment les efforts opposés des puissances CA, CD; donc aussi (85) les droites CE, CF, coïncidentes, expriment les efforts conspirants. Donc si on fait CB =

CE + CF, le corps C parcourra uniformément la droite CB dans le temps T. Maintenant puiſque CB = CF + CE, donc EB = CF: or à cauſe des Triangles FID, IEA, rectangles & égaux, FI = IE, donc CI = IB; donc ſi on tire AB, DB, le quadrilatere CABD eſt tel, que ſes diagonales CB, AD, s'y coupent en deux également, & y forment des Triangles oppoſés ſemblables & égaux; donc (Elem. 522) ce quadrilatere eſt un parallélogramme.

91. COROLL. I. Une diagonale étant toujours dans le plan de ſon parallélogramme, il ſuit qu'*un corps animé de deux forces à la fois, reſte toujours dans le plan des directions de ces deux forces.*

92. COROLL. II. Une force ſeule capable de pouſſer le corps de C en B dans le temps T, fait préciſément le même effet que les deux forces réunies CA, CD. Donc on pourroit ſubſtituer cette premiere force ſeule aux deux autres; & réciproquement *à une force ſeule on peut ſubſtituer deux autres, telles que chacune priſe ſéparément eût fait décrire à un corps chacun des deux côtés contigus d'un parallélogramme, dans le même temps que l'autre force ſeule lui en eût fait décrire la diagonale.* On appelle cela *décompoſer* une force en deux.

93. COROLL. III. *Si une puiſſance finie agit directement contre un plan inébranlable, ou, ce qui eſt la même choſe, contre un corps dont la maſſe eſt infinie, ſon effort ſe réduit à le preſſer de toute ſa force, ſans lui donner aucun mouvement fini.*

94. Car l'effort de cette puiſſance ſe devant diſtribuer dans toutes les parties finies de ce corps infini pour les mouvoir, chacune n'en peut reſſentir qu'une partie infiniment petite, & par conſéquent le corps ne reçoit qu'un mouvement infiniment petit ou nul. Ainſi l'effet de cette puiſſance ſe réduit à preſſer le plan.

95. *Mais ſi une puiſſance finie exprimée par* CB (fig. 19) *agit ſur le plan inébranlable* AE *dans la direction oblique* CB, *elle ne le preſſe qu'autant que* cette direction oblique participe de la perpendicularité, ainſi *ſon effort ſe décompoſe en deux, l'un* CA *perpendiculaire, & l'autre* CD *parallèle au plan* (enſorte que CB eſt la diagonale du parallélogramme ACDB;) *la droite* CA *exprime la partie de l'effort qui agit ſur le plan, & qui eſt détruite par ſa*

résistance, & la droite CD, *la partie de l'effort qui n'agit pas sur le plan, laquelle par conséquent n'est pas détruite.* Si donc une puissance CB capable de pousser un corps de C en B dans un temps fini T, agissoit sur ce corps placé au point B sur un plan inébranlable AE, la force qu'elle lui communiqueroit ne pourroit lui faire parcourir dans le temps T, que la droite BE égale & paralléle à CD; mais elle lui feroit serrer le plan AE avec un effort exprimé par CA.

96. SCHOLIE. Dans la démonstration de ce Théorême nous avons fait entendre que l'effet des efforts opposés exprimés par AE, DF, (Fig. 18) étoit détruit totalement; mais il est clair que ces deux efforts agissants directement l'un contre l'autre, leur effet réel est de retenir le corps dans la diagonale CB, parce que l'effort AE empêche qu'il ne monte vers A, & le pousse vers D, & l'effort DF l'empêche de descendre vers D, & le repousse également vers A. Ainsi le corps ne peut sortir de la diagonale; &, à proprement parler, il n'y a aucune force qui n'ait son effet, ou qui soit détruite.

97. THEOR. IX. *Un corps animé par deux puissances à la fois, dont les directions font un angle, décrit une ligne droite, si ces deux puissances sont de même nature,* c'est-à-dire, ou toutes deux uniformes, ou toutes deux variables suivant une même loi, &c. *Mais si ces deux puissances sont de différente nature, il décrit une courbe (qu'on appelle en général une* Trajectoire*) dont l'espece dépend du rapport que les efforts de ces deux puissances ont entr'eux à chaque instant.*

98. DEM. Soient deux puissances quelconques qui animent le corps C (fig. 20 & 21) dans les directions CD, CA, dont l'une soit capable de pousser le corps de C en D en trois instants infiniment petits, & l'autre de C en A pendant les trois mêmes instants. Ayant divisé CD & CA suivant les rapports qu'ont entr'elles les deux puissances pendant chaque instant, & ayant achevé les parallélogrammes GE, HF, AD, il est clair, 1°. Qu'à la fin du premier instant le corps se trouvera en I, à la fin du second en K, à la fin du troisieme en B. Car à cause des instants infiniment petits, chacune de ces puissances agit uniformément pendant leur durée : donc au commencement du

premier instant le corps étant animé de deux forces capables de le pousser l'une de C en E, l'autre de C en G dans le même temps, doit être en I à la fin de cet instant. Et parce que les deux premiers instants pris ensemble ne forment encore qu'un temps infiniment petit, on peut supposer, en faisant abstraction du premier instant, qu'au commencement du mouvement le corps est animé de deux forces capables de le pousser l'une de C en F, l'autre de C en H pendant un certain même temps ; donc à la fin de ce temps le corps sera en K au bout de la diagonale C K. De même, à cause que la somme des trois instants ne fait qu'un temps infiniment petit, on peut supposer, en faisant abstraction des deux premiers instants, qu'au commencement du mouvement le corps est sollicité d'aller de C en D, & en même-temps de C en A, & par conséquent il doit aller de C en B, & se trouver en B à la fin du troisieme instant.

99. 2°. Il est évident que si les puissances sont de même nature (fig. 20) les droites C A, C D, sont divisées dans une même raison, & par conséquent les lignes C E, C F, C D, sont respectivement proportionnelles aux lignes CG, CH, CA. Or à cause des parallélogrammes, les angles C E I, C F K, C D B, sont égaux, & les droites E I, FK, DB, égales aux lignes C G, CH, CA, & par conséquent proportionnelles aux lignes CE, C F, C D. Donc les Triangles C E I, C F K, C D B, sont semblables (Elem. 559); donc leurs angles en C sont égaux, donc les côtés CE, C F, C D, étant tous dans une même droite CD, leurs côtés CI, C K, C B, & par conséquent les points C, I, K, B, sont aussi en ligne droite. Donc si les deux puissances sont de même nature, elles font aller le corps en ligne droite.

100. Mais si les deux puissances sont de différente nature, comme si CD (fig. 21) représentoit une puissance uniforme, & C A une force accélératrice constante, les droites E I, F K, D B, ne sont pas proportionnelles aux droites C E, C F, C D; car C G est plus petite que G H, tandis que C E = E F. Donc les Triangles C E I, C F K,

C D B,

CDB, ne ſont pas ſemblables, & par conſéquent leurs angles en E, F, D, étant égaux, leurs angles en C ne le ſont pas : donc les côtés CE, CF, CD, étant couchés ſur une même droite, les côtés CI, CK, CB, ne le ſont pas; donc les points C, I, K, B, ne ſont pas en ligne droite.

101. 3°. Si on regarde CA comme un diametre de la courbe CIKB, les parties CG, CH, CA, ſeront des abſciſſes, & les paralleles GI, HK, AB, les ordonnées; ou bien ſi on rapporte la courbe à CD, les parallélogrammes GE, HF, AD, ſeront les parallélogrammes des coordonnées (Elem. 775). Or (Elem. 767) la nature d'une courbe dépend du rapport conſtant des fonctions des abſciſſes aux fonctions des ordonnées. Donc la courbe décrite en vertu de deux forces de différente nature, dépend du rapport que ces deux forces ont entr'elles à chaque inſtant.

102. Par exemple, dans l'hypotheſe précédente, la courbe CIKB eſt une *parabole.* Car la force exprimée par CD étant uniforme, les eſpaces CE, CF, CD, ſont entr'eux comme les temps, & par conſéquent ces droites, ou leurs égales GI, HK, AB, repréſentent les temps comptés depuis le commencement du mouvement : & la force ſuivant CA étant accélératrice conſtante, les eſpaces CG, CH, CA, ſont entr'eux (79) comme les quarrés des temps, ou comme les quarrés des droites GI, HK, AB. Donc la courbe CIKB eſt telle que ſes abſciſſes CG, CH, CA ſont entr'elles comme les quarrés des ordonnées GI, HK, AB. Donc (Elem. 821) c'eſt une parabole.

103. Pour faire concevoir ceci par un exemple plus général : *Soit un corps* P (fig. 22) *animé de deux forces, l'une uniforme*, & qui par conſéquent tende à le faire aller uniformément dans la direction où il ſe trouve à la fin de chaque inſtant, & *l'autre conſtante ou variable à volonté, mais toujours dirigée à un même point fixe* S, *vers lequel elle tâche ſans ceſſe de ramener le corps* P; *ce corps décrira une courbe* PQpO, *toujours concave du côté du point fixe* S.

104. Car si on partage une durée finie quelconque de ce mouvement en instants infiniment petits égaux, & si on suppose que le corps P ayant déja parcouru l'espace infiniment petit PQ, vienne à recevoir au commencement de l'instant suivant une impression vers S exprimée par la droite QG, il est clair que le corps P, qui sans cette nouvelle impression étant abandonné à sa seule force uniforme, auroit parcouru pendant cet instant l'espace QF égal & dans la même ligne que PQ, est contraint de parcourir la diagonale Qp du parallélogramme $QFpG$, & qu'il se trouve en p à la fin de cet instant. Par la même raison, à la fin de l'instant suivant, le corps se trouveroit en E, en sorte que $pE = Qp$, s'il ne recevoit au commencement une nouvelle impression vers S exprimée par pH, (or $pH = QG$ si la force dirigée au point S est toujours constante, & ces deux quantités sont inégales, si cette force est variable,) laquelle l'oblige à suivre la diagonale pO. Ainsi l'effort continuel de la force uniforme compliqué avec celui de la force qui ramene toujours le corps vers S, fait décrire au corps P la courbe $PQpO$ toujours concave vers le point S, & dont la nature dépend aussi du rapport des deux forces, & de leurs positions à chaque instant.

105. La force uniforme peut s'appeller aussi *force tangentielle*, parce que sa direction se trouve toujours dans la tangente à la courbe décrite par le corps, & la force qui ramene sans cesse le corps vers un point fixe, peut s'appelle *force centrale*.

106. Si, par exemple, la ligne SQ (fig. 23) est perpendiculaire à PF direction de la force uniforme, & si les quantités PI, QG, pH, dont la force centrale ramene à chaque instant le corps vers S, sont précisément égales aux quantités QR, pF, OE dont la direction de la force uniforme écarte le corps du point S, il est clair que la courbe $PQpO$ est un cercle, parce que par la combinaison de ces deux forces, le corps est toujours également éloigné du point S.

107. Il paroît donc qu'on pourroit attribuer les mou-

vements des astres autour du Soleil, à l'effet de deux forces combinées à-peu-près de cette maniere ; c'est pourquoi il faut examiner les loix de ces sortes de mouvements composés, pour voir ensuite si les Phénomenes célestes y sont conformes.

ARTICLE IX.

Propriétés des mouvements composés d'un mouvement uniforme, & d'une tendance continuelle vers un même point fixe.

108. THEOR. I. *UNe trajectoire décrite en vertu d'une force uniforme & d'une force centrale, ne peut avoir aucun point d'inflexion ni de rebroussement*, puisqu'elle doit toujours être concave vers le point central (104) ; *mais toutes choses d'ailleurs égales, sa courbure est d'autant plus grande, que la force centrale est plus grande par rapport à la force uniforme*, & réciproquement.

109. Ainsi l'arc PQp (fig. 22) est plus courbe que l'arc QpO, parce que la force centrale en Q exprimée par QG, est plus grande par rapport à QF, que la force centrale en p exprimée par pH, ne l'est par rapport à pE : & par conséquent cette force détourne plus le corps de la ligne droite, que ne le fait la force pH.

110. Pour que cela fût généralement vrai, il faudroit que l'expression de la force uniforme fût la même dans tous les points de la courbe, & que la direction de la force centrale fît toujours le même angle avec celle de la force uniforme ; & c'est-là le sens de l'exception, *toutes choses d'ailleurs égales*.

111. THEOR. II. *Une trajectoire décrite en vertu des deux forces précédentes, est toujours dans le plan qui passe par le centre* S, *& par la direction primitive de la force uniforme* PF.

112. Car le côté Qp est dans le plan des droites QF, QG ou QS, puisque c'est la diagonale d'un parallélogramme formé sur ces droites. De même la diagonale pO est dans le plan des droites pH ou pS, &

p E ou Q E ; elle eſt donc dans le même plan que Q*p*. Il en eſt ainſi des autres.

113. REM. Il faut bien obſerver que par les termes de *force uniforme*, *force tangentielle uniforme*, &c. nous n'entendons pas une force qui ſoit toujours la même en temps égaux ; car il eſt clair que QF, *p* E qui repréſentent cette force, ne ſont pas deux droites égales : on voit au contraire que ſon expreſſion doit être modifiée à chaque inſtant égal par l'effet de la force centrale, puiſqu'elle eſt à chaque inſtant la diagonale d'un nouveau parallélogramme ; & c'eſt-là l'origine de l'inégalité des vîteſſes : nous ne l'appellons ainſi que par oppoſition à la force centrale, qui eſt toujours accélératrice, comme on le verra dans la ſuite.

114. THEOR. III. *La ſurface ou l'aire compriſe entre un arc quelconque de la trajectoire, & deux droits tirées des extrémités de cet arc au point central*, (on appelle ces droites *des rayons vecteurs*), *eſt toujours comme le temps employé à parcourir cet arc.*

115. Car, 1°. Les Triangles SPQ, SQF, ont une même ſurface, ayant des baſes égales PQ, QF, & aboutiſſants au même point S : or les Triangles SQF, SQ*p* qui ont une baſe commune SQ, & qui ſont compris entre les paralleles SQ, F*p*, ont auſſi une même ſurface (Elem. 593) ; donc les aires des Triangles SPQ, SQ*p*, ſont égales. On démontre de même l'égalité des aires des Triangles SQ*p*, S*p*O ; donc les aires compriſes entre les arcs de la trajectoire & les rayons vecteurs, ſont égales en temps égaux.

116. 2°. Si le troiſieme inſtant eût été double du ſecond, le corps P, en vertu de ſa force uniforme, eût tendu à parcourir *p* E double de Q*p*, & les aires des Triangles égaux S*p*E, S*p*O, euſſent été doubles de celle du Triangle SQ*p*. Il en eſt de même des autres rapports des temps.

117. REMARQUE. Une aire finie quelconque étant la ſomme d'une infinité d'aires infiniment petites, dont chacune eſt proportionnelle à l'inſtant infiniment petit correſpondant, la ſomme de ces aires (Elem. 310) eſt proportionnelle à celle des inſtants, & par conſéquent une aire finie eſt comme le temps fini correſpondant.

118. COROLL. I. *Le temps employé à parcourir l'arc* PQ, (fig. 24) *eſt au temps employé à parcourir l'arc* r m, *comme*

l'aire du secteur P S Q, *est à l'aire du secteur* S r m. C'est-là une des deux fameuses loix de Képler (*c*).

119. COROLL. II. Si l'arc P Q est fort petit, le secteur P S Q est sensiblement un Triangle rectiligne, & l'arc de cercle P M décrit du centre S, est sensiblement la perpendiculaire qui mesure sa hauteur. *Si donc t exprime un temps très-court employé à parcourir l'arc* P Q, on aura $t = PM \times SQ$, ou $t = SR \times PQ$. Car (Elem. 594) ces produits sont comme la surface du Triangle S P Q.

120. THEOR. IV. *La vîtesse* u *d'un corps en un point quelconque* Q *de sa trajectoire* (fig. 24), *est réciproquement comme la perpendiculaire* SR *tirée du point central* S *sur la droite* QR *qui touche la trajectoire au point* Q, *ou* $u = \frac{1}{SR}$. Car $t = SR \times PQ$: or t étant comme infiniment petit, on a (71) $t = \frac{PQ}{u}$. Donc $SR \times PQ = \frac{PQ}{u}$; d'où on tire $u = \frac{1}{SR}$.

121. COROLL. I. *La vîtesse d'un corps qui décrit un cercle en vertu d'une force centrale tendante à son centre, est toujours uniforme.* Car alors les perpendiculaires aux tangentes du cercle sont des rayons qui sont toujours égaux entr'eux.

122. COROLL. II. *La vîtesse dans une Trajectoire quelconque, est d'autant plus sensiblement uniforme, que le rayon vecteur reste plus sensiblement perpendiculaire à la courbe,* (*ou à la tangente au point où est le corps;*) *ou que le rayon vecteur est plus sensiblement confondu avec le rayon de courbure,* ou *avec la normale*). Car alors les longueurs des perpendiculaires tirées successivement sur les Tangentes à

(*c*) Cette loi importante du mouvement des Planetes fut donnée par Képler, dans son grand ouvrage intitulé : *Astronomia nova de Stellâ Martis*, *Pragæ* 1609, où il la prouve par observations. Newton la démontra par les loix du mouvement en 1687, dans son fameux livre intitulé : *Philosophiæ Naturalis principia Mathematica*, qui contenoit la découverte de l'attraction universelle, & la preuve du mouvement des Planetes & des Cometes autour du Soleil en vertu de son attraction.

chaque point où se trouve le corps, varient d'autant moins sensiblement.

123. Pour comparer entr'elles les vîtesses inégales dans une Trajectoire fermée quelconque, on les rapporte à une mesure uniforme, qu'on appelle *vîtesse moyenne, mouvement moyen, vîtesse angulaire moyenne*. Pour en avoir l'expression dans un temps quelconque t, on suppose que le corps ait un mouvement circulaire, ou perpétuellement uniforme autour du centre des forces, & que par conséquent il y forme des angles qui soient à 360 degrés, comme le temps t est au temps T de la révolution périodique : Ainsi l'expression de la vîtesse moyenne est $\frac{t \times 360^\circ}{T}$.

124. LEMME I. *En comparant un angle quelconque avec l'arc qui le mesure, & le rayon de cet arc, on a les trois formules suivantes:* Angle $= \frac{arc}{rayon}$, Arc $=$ angle $\times$ rayon, & rayon $= \frac{arc}{angle}$.

125. DEM. Je dis que si P (fig. 52) désigne un angle quelconque, A l'arc qui le mesure, R le rayon de cet arc, on a $A = P \times R$, & par conséquent $P = \frac{A}{R}$, & $R = \frac{A}{P}$. Car soit un autre angle p, son arc a, son rayon r : si sur le rayon R on prend un arc Q qui mesure aussi l'angle p, on a (Elem. 582) $Q : a :: R : r$. Or à cause du rayon constant R, on a $A : Q :: P : p$. Donc (Elem. 307), $A \times Q : a \times Q :: R \times P : r \times p$. Ou (Elem. 296) $A : a :: P \times R : p \times r$. Donc (68) $A = P \times R$.

126. LEMME II. *Entre deux grandeurs qui diffèrent très-peu, la moyenne proportionnelle Géométrique est égale à la moyenne proportionnelle Arithmétique*, & par conséquent *le quarré de la moyenne proportionnelle Arithmétique est égal au produit de ses extrêmes.* (Elem. 316).

127. DEM. Entre les deux quantités x & $x + \frac{1}{\infty}$, la moyenne proportionnelle Arithmétique est $x + \frac{1}{2\infty}$ (Elem. 274), & la Géométrique est (Elem. 332) $\sqrt{xx + \frac{x}{\infty}}$, ou ajoutant $\frac{1}{4\infty\infty}$ qui est un infiniment petit du second ordre, $\sqrt{xx + \frac{x}{\infty} + \frac{1}{4\infty\infty}} = x + \frac{1}{2\infty}$.

128. THEOR. V. *La vîtesse angulaire vraie* u *d'un corps*

qui décrit pendant un même temps très-court, un petit arc PQ de sa Trajectoire quelconque (fig. 24) est toujours réciproquement comme le quarré de la distance SI, du point S où réside la force centrale, au point I où le corps s'est trouvé au milieu du temps, ou $u = \frac{1}{SI^2}$.

129. DEM. La vîtesse angulaire u est exprimée par l'angle PSQ, mesuré par l'arc PM décrit du point S. On a donc (126) $u = \frac{PM}{SP}$. Mais en temps égaux & petits, l'aire PQS est (119), en quelque endroit de la Trajectoire que soit le corps, un Triangle d'une surface constante, & dont par conséquent (Elem. 597) la hauteur PM est toujours en raison inverse de la base SQ. Ainsi $PM = \frac{1}{SQ}$. Donc en substituant, $u = \frac{1}{SQ \times SP}$. Or dans un temps très-court SP & SQ different très-peu. Donc (126) $SP \times SQ = SI^2$, & $u = \frac{1}{SI^2}$.

130. COROLL. I. *La plus grande vîtesse angulaire vraie se trouve donc au point où le corps est le plus près du centre des forces, & la plus petite au point où il en est le plus éloigné;* & par conséquent *la ligne des absides se termine dans une trajectoire fermée aux deux points, dont l'un est le plus proche, & l'autre le plus éloigné du centre des forces.*

131. COROLL. II. Si on appelle T le temps de la révolution périodique d'un corps qui décrit une courbe fermée, r sa distance au centre des forces, lorsque sa vîtesse angulaire vraie se trouve égale à sa vîtesse angulaire moyenne, d sa distance au même centre en tout autre point de sa trajectoire, on aura pour l'expression de sa vîtesse angulaire vraie u en ce point pendant un temps t très-court, $u = \frac{t \times 360^\circ \times rr}{T \times dd}$: puisque $u : \frac{t \times 360^\circ}{T} :: rr : dd$. Par la même raison on aura $d = r \sqrt{\left(\frac{t \times 360^\circ}{T \times u}\right)}$, pour l'expression de la distance du corps au centre des forces.

132. COROLL. III. Donc *si du centre des forces on observe les angles décrits par une Planete dans son orbite dans des temps fort courts*, tels, par exemple, qu'ils ne soient que la 500e ou 600e partie de sa révolution périodique, *on en déduira les rapports de distances au point central, & par conséquent on pourra déterminer la figure de la Trajectoire.*

133. SCHOLIE. Il est clair que l'exactitude de cette détermination dépend de celle avec laquelle on connoîtra la vîtesse angulaire vraie pendant un temps très-court. Mais cette exactitude est comme impossible, en observant immédiatement le mouvement d'une Planete pendant un temps si court, parce que les observations sont toujours sujettes à quelques petites erreurs, quelque soin qu'on prenne, & quelque instrument qu'on y emploie. Or une petit erreur dans un petit angle doit influer beaucoup sur une grande distance qu'on en déduiroit. C'est pourquoi dans une recherche aussi délicate, il faut diminuer, autant qu'il est possible, l'effet des erreurs inévitables dans les observations.

134. La meilleure méthode dont on puisse se servir pour connoître d'après les observations les mouvements angulaires vrais d'une Planete dans un temps très-court, consiste à prendre le plus exactement qu'il est possible, en des intervalles de temps à-peu-près égaux, trois ou quatre positions de la Planete, ensorte que les points du ciel qui répondent à ces positions, soient éloignés les uns des autres de peu de degrés. On *interpole* ensuite ces observations, ou leurs différences consécutives; c'est-à-dire, on partage ces différences en un plus grand nombre d'autres différences plus petites, (& qui conviennent par conséquent à de moindres intervalles de temps), mais assujetties dans leurs variations à la loi que suivoient les différences avant que d'être ainsi partagées. Par-là les erreurs des observations se trouvant distribuées en un plus grand nombre de parties, elles deviennent presque insensibles. Nous en allons expliquer la méthode, parce qu'elle a lieu dans un très-grand nombre de cas dans les Mathématiques-Pratiques.

De la Méthode des Interpolations (*d*).

135. La méthode & les formules suivantes, sont à-peu-près les mêmes que celles de M. Mayer, (voyez les Mémoires de l'Académie de Petersbourg, *Tom. 2. pag.* 180).

(*d*) Les Astronomes ne font ordinairement d'autre usage des interpolations que celui de corriger les parties proportionnelles par les secondes différences; ainsi rien n'empêche de passer tous les calculs suivans jusqu'à l'art. 164, qui ne sont que de pure curiosité pour l'Astronomie.

136. Soient deux suites de quantités quelconques,

$$\begin{matrix} m & n & p & q & r & s \\ a & b & c & d & e & f \end{matrix}$$

ensorte qu'à chaque terme de la supérieure, réponde un terme dans la suite inférieure, laquelle soit déduite de la supérieure en suivant une certaine loi. Nous appellerons *Racines* les termes de la suite supérieure, & *fonctions* les termes correspondants dans la suite inférieure. On peut former deux questions sur ces suites : 1°. Si on suppose une autre racine quelconque x, quelle sera sa fonction? 2°. Si on suppose une fonction quelconque y, quelle sera sa racine? La méthode des interpolations est l'art de résoudre ces deux questions.

137. Si on savoit la loi selon laquelle les fonctions se déduisent de leurs racines, la solution n'auroit aucune difficulté; il s'agit donc d'en trouver une qui convienne aux deux suites données. M. Newton a donné un Théorême général pour y parvenir : voici comment on peut trouver cette loi.

138. Supposons, 1°, que chaque suite n'est composée que de deux termes, comme on voit ici à côté, & que la loi suivant laquelle chaque fonction dérive de sa racine, soit exprimée par cette formule $g + hx$, où x représente une racine quelconque, g & h sont des quantités constantes dont la valeur dépend de celle des quantités a, b, & qu'on déterminera par le calcul suivant. Faites d'abord $x = m$, & vous aurez l'équation $g + hm = a$; faites ensuite $x = n$, & vous aurez $g + hn = b$; prenez par les Regles de la substitution (Elem. 227) les valeurs de g & de h dans ces deux équations, & vous aurez $g = \frac{an - bm}{n - m}$, & $h = \frac{b - a}{n - m}$. Donc la loi $g + hx$ sera $\frac{an - bm}{n - m} + \left(\frac{b - a}{n - m}\right) x$.

$$\begin{matrix} m & n \\ a & b \end{matrix}$$

139. Supposons, 2°, que chaque suite ait trois termes, & que la loi générale soit $g + hx + kxx$. On cherchera de même la valeur des constantes g, h, k, par le moyen des trois équations $g + hm + kmm = a$, $g + hn + knn = b$, $g + hp + kpp =$; l'on trouvera après les substitutions nécessaires

$$\begin{matrix} m & n & p \\ a & b & c \end{matrix}$$

$$g = \frac{an - bm}{n - m} + \left(\frac{a(p - n) - b(p - m) + c(n - m)}{(n - m)(p - m)(p - n)}\right) mn.$$

$$h = \frac{b - a}{n - m} + \left(\frac{a(p - n) - b(p - m) + c(n - m)}{(n - m)(p - m)(p - n)}\right)(-n - m)$$

$$k = \frac{a(p - n) - b(p - m) + c(n - m)}{(n - m)(p - m)(p - n)}$$

D'où il est aisé de conclure la loi $g + hx + kxx$.

140. Supposons, 3°, que chaque suite est composée de quatre termes, & que la loi est $g + hx + kxx + lx^3$, on formera quatre Equations, en supposant x successivement égal à m, n, p, q, & on en déduira comme ci-dessus les valeurs des constantes g, h, k, , ainsi de suite.

141. Pour faciliter l'ufage de cette méthode, nous avons calculé les valeurs des coefficients conftants, g, h, k, l, dans les différents cas qui peuvent fe rencontrer, & les formules néceffaires pour trouver les racines qui répondent aux plus petites & aux plus grandes fonctions, & réciproquement, fuivant les regles de la méthode *de Maximis & Minimis*.

I. *Formule pour trois Racines & trois fonctions données.*

142. La formule générale eft $kx^2 + hx + g$; & celle du *Maximum* ou du *Minimum* eft $x = -\frac{h}{2k}$.

143. I. Cas.

Etant donnés

$$\begin{matrix} m & n & p \\ a & b & c \end{matrix} \quad \begin{cases} k = \dfrac{a(p-n) - b(p-m) + c(n-m)}{(p-n)(p-m)(n-m)} \\ h = \dfrac{b-a}{n-m} - k(n+m) \end{cases}$$

$$g = \frac{an - bm}{n-m} + kmn.$$

144. II. Cas.

$$\begin{matrix} o & n & p \\ o & b & c \end{matrix} \quad \begin{cases} k = \dfrac{cn - bp}{pn(p-n)} \\ h = \dfrac{bpp - cnn}{pn(p-n)} \\ g = o \end{cases}$$

145. III. Cas.

$$\begin{matrix} o & 1 & 2 \\ o & b & c \end{matrix} \quad \begin{cases} k = \frac{1}{2}c - b \\ h = 2b - \frac{1}{2}c \\ g = o \end{cases}$$

II. *Formule pour quatre Racines & quatre fonctions.*

146. La formule générale eft $lx^3 + kx^2 + hx + g$; & celle du *Maximum* ou du *Minimum*, eft $x = \pm \frac{\sqrt{(kk - 3lh)} - k}{3l}$.

147. I. Cas.

Etant donnés

$$\begin{matrix} m & n & p & q \\ a & b & c & d \end{matrix} \quad \begin{cases} l = \dfrac{\begin{cases} a(q-p)(p-n)(q-n) - b(q-p)(q-m)(p-m) \\ + c(n-m)(q-m)(q-n) - d(p-m)(p-n)(n-m) \end{cases}}{(p-m)(n-m)(q-p)(p-n)(q-m)(n-q)} \\ k = \dfrac{a(p-n) - b(p-m) + c(n-m)}{(p-n)(p-m)(n-m)} - l(m+n+p) \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = \dfrac{b-a}{n-m} - l(mm+nn+mn) - k(n+m) \\ g = \dfrac{an-bm}{n-m} + lmn(n+m) + kmn. \end{cases}$$

148. II. CAS.

$$\begin{matrix} o & n & p & q \\ o & b & c & d \end{matrix} \begin{cases} l = \dfrac{cnq(q-n) - bpq(q-p) - dnp(p-n)}{npq(p-n((q-p)(n-q)} \\ k = \dfrac{cn-bp}{pn(p-n)} - l(n+p) \\ h = \dfrac{b}{n} - lnn - kn \\ g = o \end{cases}$$

149. III. CAS.

$$\begin{matrix} o & 1 & 2 & 3 \\ o & b & c & d \end{matrix} \begin{cases} l = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{6}d \\ k = 2c - \frac{5}{2}b - \frac{1}{2}d \\ h = 3b - \frac{3}{2}c + \frac{1}{3}d \text{ ou } h = b - l - k \\ g = o \end{cases}$$

150. III. *Formule pour les deux séries* .... $\begin{cases} o. & 1. & 2. & 3. & 4. \\ o. & b. & c. & d. & e. \end{cases}$

Loi. $g + hx + kx^2 + lx^3 + fx^4$.

$$\begin{aligned} f &= \tfrac{1}{24}e - \tfrac{1}{6}d + \tfrac{1}{4}c - \tfrac{1}{6}b \\ l &= -\tfrac{1}{4}e + 1\tfrac{1}{6}d - 2c + 1\tfrac{1}{2}b \\ k &= \tfrac{11}{24}e - 2\tfrac{1}{3}d + 4\tfrac{3}{4}c - 4\tfrac{1}{3}b \\ h &= -\tfrac{1}{4}e + 1\tfrac{1}{3}d - 3c + 4b \\ g &= o. \end{aligned}$$

151. IV. *Formule pour les deux séries*.... $\begin{cases} o. & 1. & 2. & 3. & 4. & 5. \\ o. & b & c. & d. & e. & \varphi. \end{cases}$

Loi. $g + hx + kx^2 + lx^3 + fx^4 + \lambda x^5$.

$$\begin{aligned} \lambda &= \tfrac{1}{120}\varphi - \tfrac{1}{24}e + \tfrac{1}{12}d - \tfrac{1}{12}c + \tfrac{1}{24}b \\ f &= -\tfrac{1}{12}\varphi + \tfrac{11}{24}e - d + \tfrac{13}{12}c + \tfrac{7}{12}b \\ l &= \tfrac{7}{24}\varphi - \tfrac{41}{24}e + \tfrac{49}{12}d - \tfrac{59}{12}c + \tfrac{131}{24}b \text{ (e)}. \\ k &= -\tfrac{5}{12}\varphi + \tfrac{61}{24}e - \tfrac{13}{2}d + \tfrac{467}{12}c - \tfrac{167}{12}b \\ h &= \tfrac{1}{6}\varphi - \tfrac{5}{4}e + \tfrac{10}{3}d - 35c + 10b \\ g &= o. \end{aligned}$$

Exemples de l'usage de ces Formules.

152. I. Si on veut savoir dans quel point de son orbite Mercure s'est

---

(e) Au-lieu de $\frac{131}{24}$ il faut lire $\frac{71}{24}b$. Dans la valeur de k les deux derniers termes doivent être $\frac{107}{12}c - \frac{77}{12}b$. Dans la valeur de h le premier terme est $\frac{1}{5}\varphi$ les deux derniers sont $-5c + 5b$.

trouvé à un instant donné, comme le 27 Juin à 7^h. On pourroit le trouver par le premier cas de la seconde formule, en interpolant les observations des 25, 26, 27, & 28 Juin, & en faisant $m=25$, $n=26$, $p=27$, $q=28$, ensuite $a=2^s\ 5^\circ\ 39'\ 48''$, $b=2^s\ 12^\circ\ 2'\ 49''$, $c=2^s\ 18^\circ\ 26'\ 18''$, $d=2^s\ 24^\circ\ 48'\ 40''$, puis en cherchant, par le I. cas de la formule lx^3+kx^2+hx+g, la fonction qui répond à la racine $27\frac{7}{24}=x$. Mais le calcul en seroit extrêmement long. Pour l'abréger, 1°. on peut effacer par-tout 2^s, en ne tenant compte que des degrés, minutes & secondes. 2°. A cause que les racines 25, 26, 27, 28, sont en progression arithmétique, on peut leur substituer celles-ci 0, 1, 2, 3, en se ressouvenant que 0 jour représente le 25 Juin, 1 jour représente le 26, 2 jours le 27, 3 jours le 28 Juin. 3°. On peut encore, pour abréger, faire en sorte que la premiere fonction a soit $=0$, en prenant pour b la différence $6^\circ\ 23'\ 1''$ entre la premiere & la seconde fonction; pour c la différence $12^\circ\ 46'\ 30''$ entre la premiere & la troisieme fonction; pour d la différence $19^\circ\ 8'\ 52''$ entre la premiere & la quatrieme fonction: on aura donc, en réduisant tout en secondes, $b=22981''$, $c=45990''$, $d=68932''$, & on tombera dans le III. Cas de la II. Formule. Faisant les substitutions indiquées pour avoir la valeur des constantes l, k, h; on trouve $l=-15\frac{5}{6}$, $k=61\frac{1}{2}$, $h=22935\frac{1}{3}$, $g=0$: de sorte que la formule d'interpolation lx^3+kx^2+hx+g, devient, $-15\frac{5}{6}x^3+61\frac{1}{2}xx+22935\frac{1}{3}x$, dans laquelle, suivant la question proposée, on doit faire $x=2$ jours 7 heures, ou $x=2\frac{7}{24}$, ou $x=2,29167$: substituant donc, la formule se réduit à $52693''$ qui valent $14^\circ\ 38'\ 13''$. C'est la différence entre la premiere fonction & la fonction cherchée: y ajoutant donc $2^s\ 5^\circ\ 39'\ 48''$, on a $2^s\ 20^\circ\ 18'\ 1''$, pour le lieu de Mercure à l'instant donné.

153. II. Pour savoir quelle vîtesse angulaire Mercure avoit alors, ou ce qui est le même, quel arc Mercure a paru décrire en un certain court espace de temps pris avant & après le 27 Juin à sept heures, par exemple, entre 6 & 8 heures. Alors dans la même formule, on fera $x=2\frac{6}{24}$ ou $x=2\frac{1}{4}$, & elle se réduira à $51735'',46$, puis on fera $x=2\frac{8}{24}=2\frac{1}{3}$, & la formule se réduira à $53649'',42$, la différence est $1913'',96$, qui valent $31'\ 53''\ 58'''$, & c'est-là la vîtesse angulaire de Mercure pendant deux heures le 27 Juin à 7 heures.

154. On trouvera de même la vîtesse angulaire qui convient à tout autre instant donné, comme le 25 Juin à 15^h, en faisant $x\ \frac{14}{24}$, & $x=\frac{16}{24}$; & par la substitution, on aura les vrais lieux de Mercure dans son orbite le 25 Juin à 14^h & à 16^h; dont la différence donnera la vîtesse angulaire vraie, qui convient au 25 Juin à 15 heures.

155. III. Pour savoir à quel instant Mercure étoit dans un point quelconque, comme dans $2^s\ 20^\circ\ 18'\ 0''$, ce qui est l'inverse de l'Exemple précédent, il faut en ôter la premiere fonction $2^s\ 5^\circ\ 39'\ 48''$, & ayant réduit le reste en secondes, il en faut faire l'équation cubique $-15\frac{5}{6}x^3+61\frac{1}{2}x^2+22935\frac{1}{3}x=52692$, dont les racines sont $x=2\frac{7}{24}$, $x=39\frac{1}{10}$, $x=-37\frac{1}{3}$, parmi lesquelles il est clair que la premiere est celle que l'on cherche, & que les autres sont inutiles: donc Mercure étoit dans $2^s\ 20^\circ\ 18'\ 0''$ le 27 Juin à 7^h.

156. Si l'extraction des racines de cette équation paroît trop longue, ou si le choix de la racine utile paroît embarrassant, on peut l'éviter en raisonnant de cette sorte. Puisque le 27 Juin à midi Mercure étoit dans $2^s\ 18^\circ\ 26'\ 18''$, il étoit donc à $1^\circ\ 51'\ 42''$ du lieu demandé. Donc le temps cherché tombe au 27 Juin après-midi, & la racine x doit être 2 plus une fraction que je trouve à-peu-près en faisant : Comme $6^\circ\ 22'\ 22''$ mouvement de Mercure du 27 au 28 Juin sont à 1 jour, ainsi $1^\circ\ 51'\ 42''$ sont à 0,292 environ. Je fais $x = 2,292$; je substitue cette valeur dans le premier membre de l'équation précédente : je le trouve 52700,20 plus grand de $8'',2$, que n'est le second membre 52692 ; ce qui me fait voir que ma racine supposée est trop forte. Je fais donc $x = 2,291$, & je trouve le premier membre de l'équation 52677,23 qui est trop petit. Je fais enfin comme 22,97 différence des deux résultats, sont à 0,001 différence des deux racines supposées : ainsi 8,2 excès du premier résultat, sont à 0,00035 excès de la premiere racine supposée. Donc cette premiere racine devoit être $x = 2,29165$.

157. Remarques. I. Etant donnée une racine, la fonction se trouve par de simples substitutions ; mais étant donnée une fonction, la racine ne se trouve qu'en résolvant une équation.

158. II. Lorsque les racines données sont des quantités qui vont toujours en croissant ou toujours en décroissant assez uniformément, & que leurs fonctions vont aussi, ou toujours en croissant, ou toujours en décroissant assez uniformément, il suffit d'en prendre trois de chacune pour interpoler, soit que les racines croissent tandis que les fonctions décroissent, soit que les racines décroissent tandis que les fonctions croissent. Mais lorsque les racines ou les fonctions sont des quantités dont les différences sont très-inégales, ou qui sans être fort inégales, vont d'abord en croissant, puis en diminuant, ou réciproquement ; ou bien si elles sont en partie positives, & en partie négatives, alors il faut employer au moins quatre racines & quatre fonctions ou même davantage, ce qui est souvent possible, comme on le va voir à l'aide des seules formules précédentes. Car tout ce calcul n'est qu'une approximation : par le moyen de certaines dimensions prises d'espace en espace, on conclud les intermédiaires, en supposant que leurs inégalités suivent constamment une certain loi ; ce qui n'approche de la justesse qu'autant que ces espaces sont plus serrés, & ces dimensions moins irréguliérement inégales, ou que la loi qu'on a trouvée approche le plus de la véritable loi de ces inégalités.

159. III. On peut interpoler aussi les différences des racines données, tant pour trouver celle qui convient à un instant donné, que pour trouver la plus grande ou la plus petite possible, par les formules du *Maximum* ou du *Minimum*. Par ce moyen on peut faire entrer dans le calcul un plus grand nombre d'observations, ce qui rend l'interpolation beaucoup plus juste. Par exemple, dans la Table suivante.

Juin.	Lieux de ☿	Diff. prem.	Diff. sec.
24.	1s 29° 18′ 54″	... 6° 20′ 54″	
25.	2 5 39 48	... 6 23 1	... + 2′ 7″ = a = 0′ 0″ (f).
26.	2 12 2 49	... 6 23 29	... + 0 28 = b = 1 44
27.	2 18 26 18	... 6 22 22	... − 1 7 = c = 3 18
28.	2 24 48 40	... 6 19 33	... − 2 49 = d = 5 3
29.	3 1 8 13		

160. On a pris les ſix obſervations du 24 au 29 Juin, avec leurs cinq différences appellées *différences premieres*, & les quatre différences de ces différences, appellées *différences ſecondes*. Or on voit évidemment, 1°, que le terme de la plus grande vîteſſe de Mercure eſt compris entre ces ſix jours ; 2°, que les quatre différences ſecondes répondent au 25, 26, 27 & 28 Juin. 3°, Que les deux premieres de ces différences ſecondes étant poſitives, & les deux autres négatives, le temps de la plus grande vîteſſe de Mercure doit être exprimé par la racine d'une fonction = 0. On peut donc mettre 0, 1, 2, 3 pour les 25, 26, 27, 28 Juin à midi, & a, b, c, d pour les quatre différences ſecondes. Maintenant pour aider l'imagination & guider le calcul, ſoit AD (fig. 30) une droite quelconque diviſée en trois parties égales à volonté AB, BC, CD. Par le point A ſoit tirée une droite quelconque AE dont la longueur repréſente la premiere quantité $a = 2' \, 7''$ ce qui répond à l'origine A de la droite AD, ou à la premiere racine = 0. Par B ſoit tirée BF parallele & du même côté que AE, dont la longueur repréſente la ſeconde quantité $b = 28''$, & qui répond à la racine AB = 1. Par C tirez CG parallele à AE, mais dans un ſens oppoſé, & dont la longueur repréſente la quantité $c = -1' \, 7''$, qui répond à la racine AC = 2. Enfin, par D tirez DH parallele & dans le ſens oppoſé à AE, dont la longueur repréſente la quantité $d = -2' \, 49''$ qui répond à la racine AD = 3. Imaginant une courbe qui paſſe par les points E, F, G, H, on voit évidemment que AI eſt une racine qui repréſente le temps, qui répond au paſſage du poſitif au négatif, & par conſéquent ce temps eſt celui de la plus grande vîteſſe que l'on cherche. Or quoique AE, BF, CG, DH ſoient des fonctions qui répondent aux racines 0, AB = 1, AC = 2, AD = 3, & qu'ainſi on puiſſe s'en ſervir immédiatement pour le calcul dont il s'agit; cependant pour ſimplifier encore ce calcul, en faiſant la premiere fonction = 0, & par-là en ramenant la ſolution du problême au troiſieme cas de la ſeconde formule (149) on tirera EL parallele à AD, & on prolongera juſqu'à EL les fonctions FB, GC, HD, pour avoir Bb, Gg, Hh. Alors à cauſe des droites Eb, bg, gh, égales à AB, BC, CD, il eſt clair qu'on peut prendre le point E & Eb, Eg, Eh pour

(f) Si l'on fait $a = 0$ on aura pour la valeur ſuivante $1' \, 39''$ qui eſt la différence des deux premiers termes, les autres ſeront $3' \, 14''$ & $4' \, 56''$.

les racines 0, 1, 2, 3, & qu'ainsi les fonctions correspondantes seront E, bB, gG, hH, ou en nombres 0, 1′ 39″, 3′ 14″, 4′ 56″. Par le point I tirant IK parallele à AE, le problême se réduira à trouver la valeur de la racine EK ou AI, qui répond à la fonction KI ou AE $= 2' 7''$ ou 127. On aura donc $l = 1\frac{5}{6}$, $k = -7\frac{1}{2}$, & $h = 106\frac{2}{3}$: ce qui donnera l'Equation du troisieme degré $1\frac{5}{6}x^3 - 7\frac{1}{2}xx + 106\frac{2}{3}x = 127$, dont la racine utile est $x = 1{,}2956$ qui vaut 1 jour 7h 5′ 40″, qu'il faut ajouter au 25 Juin à midi, parce que la premiere fonction répond à ce jour-là; on a donc le temps où Mercure étoit dans sa plus grande vîtesse le 26 Juin à 7h 5′ 40″.

161. Pour résoudre ce même Problême par la formule du *maximum*, il ne faut employer que les quatre différences premieres, si l'on ne veut se jetter dans des calculs immenses. Ces quatre différences suffisent dans la pratique. On prendra donc les quatre premieres 6° 20′ 54″ 6° 23′ 1″ &c. & en prenant leurs différences avec la plus petite des quatre, qui est la premiere, on aura les quatre fonctions 0″, 2′ 7″, 2′ 35″, 1′ 28″. Comme ces quantités vont en croissant, puis en décroissant, il est clair que leur *maximum* doit répondre à la plus grande vîtesse qu'on cherche. On pourroit trouver ce *maximum* par l'application simple de la formule (146) $x = \pm \frac{\sqrt{(kk - 3lh)} - k}{3l}$; mais si l'on veut guider son calcul par une figure géométrique, on supposera une droite AD (fig. 29) divisée en trois parties égales pour représenter les racines 0, 1, 2, 3. On tirera les paralleles BE, CF, DG, qui représenteront par leurs longueurs les fonctions 2′ 7″, 2′ 35″, 1′ 28″. On imaginera par leurs extrêmités une courbe AEFG (laquelle sera toujours du genre parabolique : Ce sera la parabole ordinaire, lorsqu'il n'y aura que trois racines & trois fonctions : ce sera une parabole cubique ou du second genre, lorsqu'il y aura quatre racines & quatre fonctions, comme dans le cas présent, &c). Le sommet I de cette courbe, répondra à la plus grande fonction qui représente la plus grande vîtesse, & la droite AK déterminée par IK, menée parallélement à BE, représente la racine correspondante, qui donne le temps de la plus grande vîtesse. Pour calculer cette racine, on aura $b = 131$, $c = 158$, $d = 91$ (*g*), & par conséquent selon le troisieme cas de la seconde formule, $l = \frac{2}{3}$, $k = -51\frac{1}{2}$, & $h = 177\frac{5}{6}$: selon la formule du *maximum*, on a $x = \pm\sqrt{\left(\frac{2652\frac{1}{4}}{4} - \frac{177\frac{5}{6}}{5}\right)} + \frac{51\frac{1}{2}}{2}$, ou bien $x = \pm 23{,}9613 + 25{,}75$, ce qui donne les deux racines $x = 49{,}7113$, & $x = 1{,}7887$, dont la seconde est évidemment celle qu'on

(*g*) Il paroît qu'il faut lire $b = 127$, $c = 155$, $d = 88$, comme 17 lignes plus haut; car ce sont les différences à la plus petite des quatre différences premieres. Mais ceci n'influe pas sur les calculs du reste de cet article.

cherche. Le temps correſpondant eſt 1 jour $18^h\ 55'\ 44''$, qu'il faut ajouter au 24 Juin à $12^h\ 0'$, parce que la premiere difference $6^\circ\ 20'\ 54''$ répond au milieu entre le 24 & le 25 Juin. On a donc enfin le temps de la plus grande vîteſſe de Mercure le 26 Juin à $6^h\ 55'\ 44''$ qui ne differe de la détermination précédente, que parce qu'on a employé ici une obſervation de moins. Mais cette différence n'eſt d'aucune conſéquence, parce que le mouvement d'une planete eſt aſſez uniforme dans le paſſage par l'abſide, où le rayon vecteur eſt perpendiculaire à la tangente de la trajectoire.

162. Si l'on veut ſavoir quelle étoit la plus grande vîteſſe angulaire de Mercure en 4 heures de temps, ou combien de chemin il a paru faire dans l'intervalle de deux heures avant & deux heures après l'inſtant où il étoit dans ſa plus grande vîteſſe, c'eſt-à-dire, le 26 Juin, dans l'intervalle de 5^h à 9 heures, on ſubſtituera, 1,20833 puis 1,375 à la place de x dans la formule $-15\frac{5}{6}x^3 + 61\frac{1}{2}xx + 22935\frac{1}{3}x$, on trouvera 27775,4 & 31611,2, dont la différence 3835,8 fait voir que ce mouvement angulaire eſt de $1^\circ\ 3'\ 55'',8$.

163. Par un calcul ſemblable on trouvera que la vîteſſe de Mercure étoit la plus petite le 9 Août à $6^h\ 37'$, & que ſon mouvement angulaire vrai en quatre heures priſes dans l'intervalle de $4^h\ 37'$ à $8^h\ 37'$, étoit de $27'\ 23'',2$.

164. THEOR. VI. *Si du centre des forces* S (fig. 31), *on décrit un cercle* TMN, *dont la ſurface ſoit égale à celle d'une trajectoire fermée quelconque* ANPM. 1°. *Lorſque le corps qui la décrit ſera dans les points* N, M, *d'interſection de ce cercle avec ſa trajectoire, ſa vîteſſe angulaire vraie ſera égale à ſa moyenne. Elle ſera plus petite dans tous les points de la trajectoire qui ſont hors de la circonférence du cercle, & plus grande dans tous ceux qui ſont en-dedans,* 2°. *Aux environs de ces points d'interſection, la vîteſſe angulaire vraie différera d'autant plutôt de la moyenne, que l'angle ſous lequel cette interſection ſe fait, ſera plus grand.*

165. DEM. Si tandis qu'un corps D décrit autour du point S la trajectoire PNAM, on imagine un autre corps *d* qui décrive autour du même point *S* comme centre, & dans un même temps périodique le cercle TNM : il eſt clair, 1°, qu'à cauſe de l'égalité des temps périodiques, la vîteſſe angulaire moyenne eſt (123) la même dans les deux corps : 2°, que dans le cercle la vîteſſe angulaire vraie eſt (121) toujours égale à la vîteſſe angulaire moyenne : donc la vîteſſe augulaire moyenne dans la

trajectoire

trajectoire est toujours égale à la vîtesse angulaire vraie dans le cercle. Cela posé, soient G g R r, les arcs décrits en même-temps, l'un dans la trajectoire, l'autre dans le cercle; ayant tiré SG, Sg, SR, Sr, & mené GO perpendiculaire sur Sg, les secteurs GSg RSr sont des surfaces triangulaires égales, & par conséquent (Elem. 597) Rr : GO :: SG : SR. Or (Elem. 582) l'arc GO : RV :: SG : SR : Donc Rr : RV :: $SG^2 : SR^2$. Donc selon que SG sera plus grand, égal, ou plus petit par rapport à SR, c'est-à-dire, selon que le corps D sera en-dehors du cercle, sur le cercle même, ou en-dedans du cercle, l'arc Rr qui mesure la vîtesse angulaire vraie dans le cercle, & par conséquent la vîtesse angulaire moyenne dans la trajectoire, sera plus grand, égal, ou plus petit, par rapport à l'arc RV qui mesure l'angle GSg de la vîtesse angulaire vraie dans la trajectoire. Ainsi dans tout l'arc NAM la vîtesse angulaire vraie du corps D, est plus petite que sa moyenne. C'est tout le contraire dans l'arc MPN. Donc *les points* N, M, *sont les termes de l'accélération ou du retardement de la vîtesse angulaire vraie à l'égard de la moyenne.* La vîtesse angulaire vraie n'étant précisément égale à la moyenne qu'aux points N & M, elle ne lui reste sensiblement égale, que tant que le petit arc N ou M de la Trajectoire est sensiblement confondu avec le cercle. Or plus l'angle curviligne ANM est grand, moins la Trajectoire se confond au point N. Donc plus l'angle sous lequel se fait l'intersection de la Trajectoire & du cercle est grand, plutôt la vîtesse angulaire vraie differe de la moyenne (*h*).

166. THEOR. VIII. *Dans une Trajectoire fermée réguliere quelconque*, c'est-à-dire, telle que deux rayons vecteurs quelconques comme SB, SE, ou SG, SI, ou SH, SL, (fig. 31) soient égaux, quand ils font avec la ligne des absides PSA des angles en S égaux de part & d'autre; 1°, *Le temps qu'un corps emploie à aller d'un abside* P *à l'autre abside* A, *est précisément égal à sa demi-*

(*h*) V. l'application, art. 215.

révolution périodique. Car à cauſe des diſtances égales de part & d'autre de la ligne des abſides, la vîteſſe doit être préciſément la même en L qu'en H, en E qu'en B, en G qu'en I, &c. & elle doit diminuer le long de l'arc P E A par les mêmes degrés, ſuivant leſquels elle augmente dans l'arc A B P. 2°, *Le temps qu'il emploie à aller d'un point quelconque* H, *juſqu'à ſon oppoſite en* G, *eſt plus long que celui de la demi-révolution, lorſqu'il paſſe dans cet intervalle par l'abſide ſupérieure* A, *& il eſt plus court que la demi-révolution lorſqu'il paſſe par l'abſide inférieure* P. Car en allant de H en G par l'abſide ſupérieure A, la vîteſſe doit diminuer dans tout l'arc H B A, & ne s'accélérer que dans le petit arc A G : au-lieu qu'en paſſant par l'abſide inférieure P, la vîteſſe doit s'accélerer dans tout l'arc P E G, & ne diminuer que dans le petit arc HP.

167. COROLL. De-là on tire une méthode facile de déterminer dans une Trajectoire fermée & réguliere, le temps du paſſage de la Planete par la ligne des abſides, & la poſition de cette ligne. Par exemple, de ce qu'on a reconnu (49) que l'orbite de Mercure étoit aſſez réguliere, & ſon mouvement aſſez uniforme dans les abſides; à l'inſpection des obſervations rapportées ci-deſſus, (pag. 50), on voit aiſément que Mercure étoit périhélie vers le 26 Juin, & aphélie vers le 9 Août, puiſque la vîteſſe diurne du 26 au 27 Juin, étoit de 2° 44′ 20″ la plus petite de toutes, & qu'elle étoit du 9 au 10 Août de 6° 23′ 29″ la plus grande de toutes. Voici le calcul qu'il faut faire :

26 Juin à midi. . . . . Lieu de ☿ . . .	2ˢ	12°	2′	49″
9 Août à midi.	8	13	9	12
Différence. . . .	6	1	6	23

Donc le 9 Août à midi Mercure avoit parcouru 1° 6′ 23″ au-dela de ſix ſignes entiers depuis le 26 Juin. Il faut chercher à quelle heure le 26 Juin ☿ s'eſt trouvé à l'oppoſite du 9 Août, c'eſt-à-dire, dans 2ˢ 13° 9′ 12. Pour cela il faut dire : 6° 23′ 29″ ſont à 24ʰ 0′ 0″, comme 1° 6′ 23″ ſont à 4ʰ 9′ 16″, & par conſéquent le 26 Juin à

$4^h\ 9'\ 16''$ ☿ étoit à l'opposite du 9 Août à midi. L'intervalle entre ces temps est de 43 jours $19^h\ 50'\ 44''$, plus petit de $3^h\ 47'\ 2''$, que la demi-révolution de Mercure, qui est de 43 jours $23^h\ 37'\ 46''$. Donc dans cet intervalle Mercure n'avoit pas passé par son aphélie, & par conséquent le 9 Août à midi Mercure n'y étoit pas encore arrivé. Pour savoir à quelle heure il y est passé, il faut faire cette analogie : *Comme* $3^o\ 39'\ 9''$, *excès de la vîtesse diurne de Mercure périhélie, sur sa vîtesse diurne dans son aphélie, sont à* $6^o\ 23'\ 29''$, *vîtesse diurne dans le périhélie ; ainsi* $3^h\ 47'\ 2''$ *sont à* $6^h\ 37'\ 17''$, qu'il faut ajouter au 9 Août à midi, pour avoir le moment du passage par l'aphélie le 9 Août à $6^h\ 37'\ 17''$, Or Mercure faisant alors $2^o\ 44'\ 20''$ par jour, faisoit $45'\ 20''$ en $6^h\ 37'\ 17''$, les ajoutant à $8^s\ 13^o\ 9'\ 12''$, on a l'aphélie dans $8^s\ 13^o\ 54'\ 32''$: donc le périhélie de Mercure est dans $2^s\ 13^o\ 54'\ 32''$, & il y a dû passer le 26 Juin à $6^h\ 59'\ 41''$.

168. Pour démontrer cette derniere analogie, on supposera que la droite GH (fig. 31), qui joint les deux points opposés G, H où s'est trouvée la planete, soit fort proche de la ligne des absides AP. On verra ensuite que puisque (122) les mouvements sont sensiblement uniformes en A & en P, les temps T, t employés à parcourir les espaces angulaires égaux PSH, ASG doivent être (69) en raison inverse des vîtesses angulaires u, V en A & en P : & qu'ainsi on a $T : t :: V : u$. Donc $V - u : V :: T - t : T$ (*i*).

169. Les Théorêmes précédents étant autant des vérités incontestables & indépendantes de tout systême Physique d'Astronomie, il reste maintenant à les appliquer au calcul des observations rapportées ci-dessus (page 50) pour déterminer, dans l'hypothese que les planetes soient animées d'une force de projection primitive uniforme, & d'une force centrale tendante au soleil, quelle est l'espece particuliere de courbe qui leur sert de Trajectoire, & dont nous connoissons déja (50) les propriétés générales.

(*i*) On verra l'application pour le Soleil, art. 706.

ARTICLE X.

Recherche de la Courbe qui ſert de Trajectoire aux Planetes.

170. LA premiere courbe qui ſe préſente eſt le cercle; & comme on a obſervé (46) que les Planetes changent à chaque inſtant de diſtance au Soleil, il eſt inutile de ſuppoſer d'abord que le Soleil ſoit au centre.

171. La Trajectoire de Mercure ne peut donc être un cercle, à moins qu'on ne ſuppoſe le Soleil en quelque point S autre que le centre C (fig. 31), enſorte que les droites tirées du point S à tous les points de la circonférence, repréſentent les différentes diſtances de Mercure au Soleil.

172. Pour voir ſi cette hypotheſe eſt conforme aux obſervations, il faut, 1°, tirer par les points S & C la ligne des abſides P A; car alors (Elem. 546) S P repréſente la plus courte diſtance de Mercure au Soleil, & S A la plus grande : le point P eſt le périhélie, & répond dans le ciel à $2^s\ 13^o\ 54'\ 32''$: le point A eſt l'aphélie, & répond à $8^s\ 13^o\ 54'\ 32''$. 2°. Du point S comme centre avec un rayon égal à C A, il faut décrire un cercle N T M, dont l'aire eſt par conſéquent égale à celle de la Trajectoire ſuppoſée, & qui eſt coupée aux points N, M. 3°, Il faut déterminer le rapport des droites S P, S A, S N ou S M, ce qui ſe peut faire (128) indépendamment de l'hypotheſe de la Trajectoire, & par le ſeul rapport des vîteſſes angulaires obſervées. La plus grande vîteſſe angulaire de Mercure en P, a été trouvée (162) de $1^o\ 3'\ 55''$, 8 en quatre heures, la plus petite en A eſt dans le même-temps, de $27'\ 23''$ 2, & la moyenne, qui eſt (165) en N ou en M, ſe trouve par la formule du N° 123, de $40'\ 55''$, 4. Suppoſant donc $SN = 1000$ parties égales, on a (128): Comme la plus grande vîteſſe $1^o\ 3'\ 55''$, 8 eſt à la moyenne $40'\ 55''$,4, ainſi SN^2 eſt à SP^2. Donc S P eſt de 800,08 des mêmes parties. De même comme la plus petite vîteſſe $27'\ 23''$,2 eſt à la moyenne $40'\ 55''$,4, ainſi SN^2 eſt à SA^2; donc S A eſt de 1222,407 parties.

173. Or si la Trajectoire PNAM est un cercle égal au cercle TNM, la somme des droites SP, SA, doit être égale au double du rayon SN, ce qui est évidemment contraire aux observations, puisqu'il faudroit que 2022,487 parties fussent égales à 2000 : il paroît donc que la Trajectoire MPNA n'est pas un cercle.

174. D'ailleurs menant par S la corde Kk perpendiculaire à AP, on doit avoir (Elem. 566) $\div$ SA : Sk ou SK : SP, ou $SK^2 = SA \times SP$. Or le point A étant dans $2^s\, 13^o\, 54'\, 32''$, le point K doit être dans $5^s\, 13^o\, 54'\, 32''$, & k dans $11^s\, 13^o\, 54'\, 32''$. En interpolant les observations du 12, 13, & 14 Juillet, on trouve que Mercure étoit dans $5^s\, 13^o\, 54'\, 32''$ le 12 Juillet à $11^h\, 30'\, 28''$, avec une vîtesse angulaire en 4 heures de temps, prises depuis $9^h\, 30'\, 28''$ jusqu'à $13^h\, 30'\, 28''$, de $43'\, 45'',3$. De même en interpolant les observations du 5, 6, 7 Septembre, on trouve Mercure dans $11^s\, 13^o\, 54'\, 32''$ le 6 à $1^h\, 43'\, 15''$ avec une vîtesse angulaire de $43'\, 45'',5$. Prenant un milieu, & faisant (128) $43'\, 45''4 : 40'\, 55''4 :: SN^2 : SK^2$, on a $SK = 967{,}082$, & $SK^2 = 935248$. Or $SP \times SA = 978023$: il s'en faut donc de beaucoup que SK ne soit moyenne proportionnelle entre SA & SP, & que les points K & k ne soient dans le cercle qui passe par les points A & P. *La Trajectoire de Mercure ne peut donc être un cercle.*

175. On peut voir à-peu-près en quoi elle differe du cercle ; car puisque SN & SM sont plus petites que $CA = 1011{,}244$, & que SK ou Sk sont plus petites que $988{,}95 = \sqrt{(SP \times SA)}$ il s'ensuit que les points M, N & Kk, sont plus rapprochés de la ligne AP qu'ils ne le seroient, si la Trajectoire étoit un cercle, & qu'ainsi cette Trajectoire a moins de largeur dans ce sens, que de longueur dans le sens AP. Cette courbure convient donc mieux à une Trajectoire ovale. C'est par un raisonnement à-peu-près pareil, que Képler (k) découvrit qu'il falloit em-

(k) Kepler avoit calculé les distances de Mars au Soleil, SA, SP, SM, par les observations de Tycho-Brahé, & il vit que la distance SM étoit plus petite qu'elle ne l'auroit été dans un cercle décrit sur AP, *Astronomia nova de Stellâ Martis*, 1609. C'est ainsi qu'il découvrit cette grande & importante

ployer une Ellipſe, au lieu du cercle dont tous les Aſtronomes s'étoient ſervis avant lui.

176. La ſeconde courbe qui ſe préſente après le cercle, eſt l'Ellipſe. Et parce que chaque Planete dans ſa révolution ſe trouve une fois aphélie & une fois périhélie, il eſt clair qu'*on ne peut ſuppoſer le Soleil au centre de l'Ellipſe*, parce que ces deux Phénomenes arriveroient chacun deux fois; les Aphélies, lorſque la Planete ſeroit aux deux bouts du grand axe; & les Périhélies, lorſqu'elle ſeroit aux extrémités du petit. Il faut donc placer le Soleil ailleurs : & la premiere place qui ſe préſente naturellement eſt un des foyers.

177. Suppoſant donc le Soleil au foyer S de l'Ellipſe PMAN, (fig. 31), ſon grand axe AP doit être égal à la ſomme des diſtances Aphélie SA & Périhélie SP. Et par conſéquent, ſi du centre S on décrit le cercle TNM, dont l'aire ſoit ſuppoſée égale à celle de l'Ellipſe, le grand axe AP doit être, ſuivant les calculs précédents, (173) de 2022,487 parties, telles que le rayon SN en contient 1000. Et parce que la moitié du petit axe d'une ellipſe eſt une moyenne proportionnelle entre les deux diſtances SP, SA (Elem. 813), on aura le petit axe B*b* de 1977,9, & même le parametre K*k* de 1934,297 qui eſt (Elem. 817) la troiſieme proportionnelle à AP & à B*b*.

178. Cela poſé, ſi l'orbite de Mercure eſt une Ellipſe, il faut, que lorſqu'il eſt éloigné de trois ſignes ou de 90 degrés de part & d'autre de ſes abſides, comme lorſqu'il eſt en K & en *k*, ſes diſtances SK, S*k*, ſoient égales, & que leur ſomme (Elem. 801) ſoit égale au parametre du grand axe. Or on a trouvé (174) SK ou S*k* = 967,082, dont le double K*k* = 1934,164, qui differe inſenſiblement de 1934,297. Donc les points A, P, M, N, K, *k*, s'accordent avec une Trajectoire elliptique, dont le Soleil occupe un des foyers.

---

loi du mouvement des Planetes. La même année 1609 fut remarquable par la découverte des lunettes d'approche qui ont fait époque & révolution dans l'Aſtronomie, V. l'Optique de Smith, in-4°. dont il a paru deux traductions en 1767, l'une du P. Pezenas, à Avignon, l'autre de M. Duval le Roi, à Breſt.

179. On pourroit essayer si cette hypothese est conforme aux observations, en prenant trois positions de la Planete dans son orbite, avec les rapports des trois distances au Soleil correspondantes, déduites des vîtesses de la Planete dans ces points; & en faisant passer (Elem. 882) par ces trois points une section conique dont le Soleil occupe un foyer. Car si cette section se trouvoit être une ellipse, dont les dimensions fussent les mêmes que celles qu'on auroit déja déterminées indépendamment de ces trois positions, il est clair que Mercure auroit réellement parcouru cette ellipse. Mais la solution ordinaire de ce problême général n'est sûre dans la pratique, qu'à proportion que les ellipses sont plus allongées. Elle n'est par conséquent pas appliquable aux Planetes du systême solaire, dont les ellipses approchent fort du cercle.

180. L'Observateur ayant fait sur les autres Planetes des observations & des calculs semblables, il conclura que *toutes les Planetes du premier ordre se meuvent dans des ellipses dont le Soleil occupe un foyer commun; & que leurs inégalités sont telles, que les aires comprises entre les rayons vecteurs & les arcs de chaque ellipse, sont proportionnelles aux temps employés à parcourir ces arcs.* Voyez à l'Art. XIII. (280) la Table des dimensions des ellipses de toutes les Planetes.

181. REM. I. La distance C S du foyer S où réside le Soleil S, au centre C de l'ellipse décrite par la Planete, s'appelle l'*Excentricité* de cette orbite : c'est la moitié de la différence entre la distance Aphélie SA, & la distance Périhélie SP.

182. REM. II. Dans la pratique de l'Astronomie, on a coutume de faire = 1 la moitié C A du grand axe de l'ellipse d'une Planete : les autres dimensions s'expriment en décimales. Suivant cet usage, dans l'orbite de Mercure, on aura CA ou CP = 1; SN ou SM = 0,988881; SA = 1,208816; SP = 0,791184; & par conséquent l'Excentricité CS = 0,208816; CB = 0,977954.

ARTICLE XI.

Recherche de la maniere de diſtribuer les inégalités des Planetes dans les différents points de leurs orbites.

183. L'INÉGALITÉ du mouvement angulaire eſt le changement continuel du rapport de l'angle décrit avec les parties égales du temps. Dans la théorie des mouvemens compoſés que nous avons examinée, nous n'avons trouvé de rapport conſtant que celui des aires parcourues avec les temps employés à les parcourir; ainſi, pour calculer les mouvements angulaires vrais des Planetes ſelon les temps donnés, il faut par le moyen des temps déterminer les aires des ſecteurs parcourus, puis calculer les angles qui ſont au ſommet de ces ſecteurs.

184. Mais pour compter les temps & les aires, il faut partir de quelques points fixes (qu'on appelle *les Epoques*:) & il paroît qu'on peut prendre pour *Epoque du temps* un inſtant quelconque, pourvu qu'on ſache auſſi *l'Epoque du mouvement*, c'eſt-à-dire, à quel point du ciel la Planete répondoit à cet inſtant. Cependant ſi l'on veut mettre dans ſes calculs le plus de ſimplicité qu'il eſt poſſible, le choix des époques ne doit pas être arbitraire, & il eſt aiſé de ſentir qu'on ne peut partir d'un point plus commode, que de celui où la Planete ſe meut uniformément. Or dans chaque révolution d'une Planete qui décrit une ellipſe, le mouvement ſe trouve uniforme deux fois, ſavoir dans chaque paſſage par la ligne des abſides; il convient donc de choiſir l'inſtant d'un de ces paſſages pour l'époque du temps, & le point du ciel auquel répond l'abſide où ſe fait le paſſage pour l'époque du mouvement.

185. Les Aſtronomes ſe ſont accordés juſques ici à prendre pour époque le moment du paſſage de la Planete par l'aphélie, & le lieu de cet aphélie. Mais depuis qu'il eſt démontré par le retour certain des cometes, qu'elles décrivent auſſi des ellipſes, dont on ne voit que la partie qui avoiſine le périhélie (voyez dans le Chapitre ſuivant),

on ne peut désormais se dispenser de changer cet ancien usage, afin de faire des regles de calcul communes aux Planetes & aux Cometes ; il faut par conséquent compter les mouvements des corps célestes depuis le périhélie. Au reste, ce changement ne cause dans les regles de calculs dressées pour l'aphélie, que quelques changements dans les signes + & —, de sorte qu'avec un peu d'attention on réduit facilement ces regles d'une époque à l'autre.

186. L'Observateur ayant donc déterminé immédiatement les dimensions des ellipses de chaque Planete, la position de chaque ligne des absides, & une époque d'un de leurs passages par le périhélie, il ne lui reste plus, pour pouvoir calculer le lieu d'une Planete quelconque dans son orbite pour un temps donné, que de trouver une méthode pour assigner l'angle au soleil compris entre la ligne des absides & le rayon vecteur, au bout duquel la Planete se trouve à l'instant donné.

187. Cette méthode, qui doit donner les regles de calcul nécessaire pour représenter toutes les inégalités des mouvements des Planetes, n'est pas sans difficulté dans la pratique. On l'appelle *le Problême de Képler* (*l*), parce que cet Astronome est le premier, qui après avoir donné la vraie théorie des mouvemens des Planetes, s'est proposé d'en soumettre les loix au calcul ; ce qu'il n'a pu faire que d'une maniere indirecte, en laissant aux plus habiles Géometres qui viendroient après lui, le soin de résoudre ce problême directement. On n'a pu encore y réussir que par voie d'approximation, par la raison qu'on verra bientôt. Nous en allons donner la solution la plus commode dans la pratique, en supposant cependant que les orbites sont peu différentes du cercle, ce qui est vrai, à l'égard de toutes les Planetes du systême solaire. Nous dirons dans

(*l*) Ce problême ne peut se résoudre que par approximation, parce qu'il dépend de la quadrature du cercle ; mais la méthode qui va être expliquée est aussi exacte & beaucoup plus commode que les solutions algébriques les plus directes & les plus rigoureuses, & elle a l'avantage de pouvoir s'appliquer indirectement aux orbites très-excentriques.

la suite ce qu'on doit faire pour appliquer le calcul aux ellipses très-allongées, telles que sont les orbites des cometes.

188. *Construction du Problême de Képler.* Ayant décrit selon les dimensions données de la trajectoire de la Planete, une ellipse ABPE (fig. 26.) dont AP soit le grand axe, A l'aphélie, P le périhélie, S le foyer où réside le soleil, BE le petit axe, C le centre, &c. sur AB comme diametre, décrivez un cercle ANPG. Prenez sur sa circonférence depuis le point P en allant dans le sens du mouvement de la Planete un arc PD, qui soit à la circonférence du cercle, comme l'intervalle de temps entre l'instant donné & le plus prochain passage de la Planete à son périhélie est au temps de la révolution périodique de la même Planete. Joignez SD, & par C menez-lui le rayon parallele CN. Du point N abaissez sur l'axe AP la perpendiculaire NI, le point M où elle coupera l'ellipse, sera à très-peu-près le lieu de la Planete sur son orbite.

189. Le cercle ADPG s'appelle l'*Excentrique*, l'arc PD ou l'angle PCD, dont il est la mesure, s'appelle l'*Anomalie moyenne* de la Planete ; l'arc PN ou l'angle PCN, s'appelle l'*Anomalie de l'excentrique* ; l'angle PSM qui est celui qu'on cherche, s'appelle l'*Anomalie vraie* de la Planete. Et la différence entre l'anomalie moyenne & l'anomalie vraie, s'appelle l'*Equation du centre.* Ainsi, le Problême de Képler doit s'énoncer de la sorte : *étant donnée l'anomalie moyenne d'une Planete, trouver son anomalie vraie, ou l'équation du centre.* La solution est ici partagée en deux parties : dans la premiere, de l'anomalie moyenne on conclut l'anomalie de l'excentrique ; dans la seconde, de l'anomalie de l'excentrique on conclut l'anomalie vraie.

190. Soit proposé, par exemple, de trouver le vrai lieu de Mercure le 13 Juillet 1740 à 9 heures du soir. Mercure ayant été dans son périhélie le 26 Juin à $6^h\ 59'\ 41''$ (167) l'intervalle entre cette époque & le temps donné est de $17^j\ 2^h\ 0'\ 19''$. Faisant donc comme $87^j\ 23^h\ 15'\ 32''$ sont à $360^0\ 0'\ 0''$, ainsi $17^j\ 2^h\ 0'\ 19''$ sont à 69^0

54' 41'', c'eſt l'anomalie moyenne de la Planete, ou la valeur de l'arc PD.

191. *Démonſtration de la conſtruction.* Selon la loi des aires proportionnelles aux temps, que les corps céleſtes obſervent dans tous leurs mouvements, ſi M eſt le vrai lieu de la Planete ſur ſon ellipſe, l'aire PSM doit être à l'aire entiere de l'ellipſe comme l'intervalle de temps entre l'inſtant donné, & le plus prochain paſſage au périhélie, eſt à la révolution périodique de la Planete. Or l'arc PD, & le contour de l'excentrique, ou ce qui eſt le même, l'aire du ſecteur PCD, & l'aire entiere de l'excentrique ſont auſſi dans le même rapport des temps; donc l'aire PSM eſt à l'aire PCD, comme l'aire de l'ellipſe eſt à l'aire de l'excentrique; & par conſéquent (Elem. 896) comme CB à CA. Mais (Elem. 897) les aires PSM, PSN ſont auſſi comme CB à CA; donc l'aire PSM eſt à l'aire PCD, comme l'aire PSM eſt à l'aire PSN, d'où il ſuit que l'aire $PCD = PSN$. Or l'aire $PCD = PCN - DCN$, & l'aire $PSN = PCN - CNS$; donc l'aire $DCN = CNS$. Mais (Elem. 604) l'aire $DCN = \frac{1}{2} CN \times DN$, & l'aire $CNS = \frac{1}{2} CN \times ST$: donc $DN = ST$: c'eſt-à-dire, que l'*anomalie de l'excentrique* déterminée par PN, *doit être telle, que l'arc* DN *de l'excentrique qui meſure ſa différence avec l'anomalie moyenne* PD, *ſoit exactement égale en étendue à la perpendiculaire* ST *tirée du foyer* S *ſur le rayon* CN *qui termine l'anomalie de l'excentrique.* Maintenant, en ſuppoſant les orbites peu différentes des cercles, le point S doit être fort près du point C, la perpendiculaire ST doit être aſſez petite, & par conſéquent l'arc DN qui lui eſt égal, doit être d'un petit nombre de degrés. Cela poſé, l'arc DN étant perpendiculaire ſur le rayon CN auſſi-bien que ST, il ſuit qu'on peut regarder ST & DN comme deux droites égales, & perpendiculaires à CN, & qu'ainſi SD eſt une droite ſenſiblement parallele à CN. Puis donc que les points S & D ſont donnés, l'un par la conſtruction de l'ellipſe, & l'autre par l'anomalie moyenne, la ligne SD eſt donnée de poſition, & par conſéquent ſa parallele CN donne en N l'anomalie de l'excentrique, qui

sert à trouver en M le lieu de la Planete sur l'ellipse.

192. REM. A cause de la courbure de l'arc D N, la droite S D n'est pas exactement parallele à C N, elle est inclinée vers N, & cela d'autant plus, que l'arc D N est d'un plus grand nombre de degrés ; ainsi l'angle P S D est un peu plus grand que l'angle P C N, qui exprime l'anomalie de l'excentrique.

193. *Premiere partie de la solution du problême de Képler.* C'est-à-dire, *étant donnée l'anomalie moyenne*, *trouver l'anomalie de l'excentrique.* L'anomalie de l'excentrique P C N est à très-peu-près égale à l'angle P S D, supplément de l'angle C S D ; or dans le triangle C S D on connoît les deux côtés C S, C D = C A & l'angle compris S C D ; on pourra donc calculer l'angle C S D, & par conséquent l'angle P S D. L'analogie de ce calcul est ; (Elem. 751) C D + C S (ou *S* A), est à C D — C S (ou S P), comme la tangente du demi-supplément de l'angle *S* C D, est à la tangente d'un arc, qu'il faut ajouter à ce demi-supplément pour avoir l'angle C S D : & parce que (Elem. 736) les tangentes sont en raison inverse des cotangentes, l'analogie deviendra celle-ci ; S P est à S A, ou *la distance périhélie est à la distance aphélie*, comme la cotangente du demi-supplément de l'angle C S D, (c'est-à-dire, *comme la tangente de la moitié de l'anomalie moyenne* S C D), est à la cotangente d'un arc, lequel étant ajouté au demi-supplément de l'angle S C D, donne le supplément de l'angle P S D : (c'est-à-dire, *est à la tangente d'un arc*, *lequel étant ajouté à la moitié* de l'angle S C D *de l'anomalie moyenne donne* l'angle P S D *à peu-près* égal à l'angle P C N de l'*anomalie de l'excentrique*).

194. Dans l'exemple proposé on a 0,791184 : 1,208816 :: *tang.* $34^{\circ}\ 57'\ 20''$: *tang.* $46^{\circ}\ 53'\ 5''$: donc l'anomalie de l'excentrique est à-peu-près $81^{\circ}\ 50'\ 25''$.

195. Maintenant pour rectifier cette anomalie de l'excentrique, il faut chercher quelle doit être la vraie grandeur de l'angle P C N ou S C T, par le moyen de laquelle dans le triangle S C T rectangle en T, la droite S T évaluée en degrés, minutes & secondes, soit précisément

égale à la différence entre ce même angle SCT, & l'anomalie moyenne donnée PCD. Cette recherche ne se peut faire que par tâtonnement, à cause de l'inexactitude de la construction du problême ; & par approximation, à cause de la quadrature ou de la rectification du cercle, qui ne sont connues que par approximation. Il faut donc réduire d'abord l'excentricité CS en degrés, minutes & secondes par cette analogie : comme le rayon CA ou 1, est à 57° 17′ 44″, 8 ; ainsi CS ou 0, 208816, est à 11° 57′ 51″, 3. (Remarquez que le rayon d'un cercle évalué en degrés, &c. est toujours de 57° 17′ 44″, 8 ce qu'on trouve en faisant 355 : 113 :: 180° 0′ 0″ : 57° 17′ 44″, 8): Ensuite dans le triangle rectangle SCT, supposant l'angle SCT, tel qu'on l'a trouvé ci-dessus, de 81° 50′ 25″, il faut calculer le côté ST par cette analogie, *comme le rayon est à l'excentricité* CS *réduite en degrés*, *&c. ainsi le sinus de l'anomalie de l'excentrique* SCT, *est à* ST *réduit en degrés*, *&c.* Dans cet exemple on trouve ST = 11° 50′ 35″, pour la différence entre l'anomalie moyenne & l'anomalie de l'excentrique, & par conséquent l'anomalie moyenne étant 69° 54′ 41″, l'anomalie de l'excentrique seroit de 81° 45′ 16″ : je suppose après cela que l'angle SCT soit de 81° 45′ 16″, & je trouve en calculant le même triangle dans cette hypothese, que ST est de 11° 50′ 26″ ce qui donneroit l'anomalie de l'excentrique de 81° 45′ 7″. Je suppose encore que l'angle SCT soit de 81° 45′ 7″, & je trouve par un nouveau calcul du même triangle que ST est de 11° 50′ 26″, ce qui fait enfin voir que l'anomalie de l'excentrique est véritablement de 81° 45′ 7″.

196. *Seconde partie de la solution. Etant donnée l'anomalie de l'excentrique, trouver l'anomalie vraie.* Le point M sur l'ellipse étant supposé être exactement le lieu de Mercure, de ce point comme centre faites passer par l'autre foyer F de l'ellipse un cercle OFR : Prolongez SM de part & d'autre en QO, & alors SO = SM + MO = SM + MF = 2CA = 2, en faisant CA = 1 ou au sinus total : SQ = MQ — MS = FM — SM ; & FI = $\frac{1}{2}$ FR (Elem. 448) ou FR = 2FI : de même SR = FR —

FS, donc $\frac{1}{2}$ SR = FI — FC = CI = *cos* PN, & SR = 2 *cos* PN. Or (Elem. 566) SO : SR :: SF : SQ, ou bien 2 : 2 *cos* PN :: 2 CS : FM — SM; donc FM — SM = *cos* PN × 2 CS. Mais FM + SM = AP = 2 : Donc (Elem. 232) SM = 1 — CS × *cos* PN.

197. Dans le triangle SMI rectangle en I, on a SM : R :: SI : *cos* ISM, ou bien 1 — CS × *cos* PN : 1 :: CS — CI (ou CS — *cos* PN) : *cos* ISM. Donc *cos* ISM $= \frac{CS - \cos PN}{1 - CS \times \cos PN}$: Ainsi $1 + \cos ISM =$

$$\frac{1 - CS \times \cos PN + CS - \cos PN}{1 - CS \times \cos PN} = \frac{1 + CS - (1 + CS) \times \cos PN}{1 - CS \times \cos PN}$$

$= \frac{SA - SA \times \cos PN}{1 - CS \times \cos PN}$. On trouve de même $1 - \cos ISM$ $= \frac{SP + SP \times \cos PN}{1 - CS \times \cos PN}$. Or *cos* ISM = — *cos* PSM : (Trig. 47) Donc $\frac{1 - \cos PSM}{1 + \cos PSM} = tang^2 \frac{1}{2} PSM$ (Trig. 58) $= \frac{1 + \cos ISM}{1 - \cos ISM}$

$$= \frac{SA - SA \times \cos PN}{SP + SP \times \cos PN} = \frac{SA}{SP} \times \frac{1 - \cos PN}{1 + \cos PN} = \frac{SA}{SP} \times tang^2 \tfrac{1}{2} PN.$$

Donc enfin $tang^2 \frac{1}{2} PSM = \frac{SA}{SP} \times tang^2 \frac{1}{2} PN$. D'où l'on tire SP : SA :: $tang^2 \frac{1}{2}$ PCN : $tang^2 \frac{1}{2}$ PSM. Ou bien $\sqrt{SP} : \sqrt{SA}$ :: $tang \frac{1}{2}$ PCN : $tang \frac{1}{2}$ PSM. C'est-à-dire, *comme la racine quarrée de la distance périhélie, est à la racine quarrée de la distance aphélie ; ainsi la Tangente de la moitié de l'anomalie de l'excentrique, est à la Tangente de la moitié de l'anomalie vraie* (*m*). Suivant cette analogie, on trouvera PSM de $93^\circ\ 51'\ 47''$ ou $3^s\ 3^\circ\ 51'\ 47''$; ce qui étant ajouté au lieu du périhélie $2^s\ 13^\circ\ 54'\ 32''$, donne le lieu de Mercure dans le ciel dans $5^s\ 17^\circ\ 46'\ 19''$, le 13 Juillet à 9 heures du soir.

198. Pour faciliter la pratique de ce calcul, nous le réduirons aux regles générales qui suivent.

(*m*) Il faut renverser la proportion lorsqu'on compte les anomalies depuis l'aphélie, comme les Astronomes ont coutume de le faire. Mais on a vu (185) pourquoi notre Auteur les compte du périhélie. On trouve une démonstration beaucoup plus simple de cette regle dans mon *Astronomie*.

Regles du Calcul, pour réduire l'anomalie moyenne en anomalie vraie dans l'ellipſe, en les comptant du plus prochain paſſage de la Planete au périhélie.

199. I. *Du logarithme de la diſtance aphélie, ôtez le logarithme de la diſtance périhélie, pour avoir un premier logarithme conſtant, auquel ajoutez le logarithme de la tangente de la moitié de l'anomalie moyenne, la ſomme ſera le logarithme de la tangente d'un arc, que vous ajouterez à la moitié de l'anomalie moyenne, & vous aurez une premiere anomalie approchée de l'excentrique.* Dans ce premier calcul on peut négliger les ſecondes de degrés.

200. II. *Au logarithme* 5, 3144251 (c'eſt celui de 57° 17′ 44″, 8) *ajoutez le logarithme de l'excentricité de la Planete, & de la ſomme, ôtez le logarithme de la moitié du grand axe, le reſte ſera un ſecond logarithme conſtant.*

201. III. *Au ſecond logarithme conſtant, ajoutez le log. de ſinus de la premiere anomalie approchée de l'excentrique, la ſomme ſera le log. d'un nombre de degrés, minutes & ſecondes, qu'il faut ajouter à l'anomalie moyenne, pour avoir une ſeconde anomalie approchée de l'excentrique.*

202. IV. *Au même ſecond logarithme conſtant, ajoutez le logarithme de ſinus de la ſeconde anomalie approchée de l'excentrique, la ſomme ſera le logarithme d'un nombre de degrés, minutes & ſecondes qu'il faut ajouter à l'anomalie moyenne pour avoir une troiſieme anomalie approchée de l'excentrique.*

203. On recommencera ainſi le calcul, en employant ſucceſſivement les dernieres anomalies approchées de l'excentrique, juſqu'à ce qu'on en trouve deux de ſuite parfaitement égales, auquel cas la derniere trouvée ſera la véritable anomalie de l'excentrique. Dans aucune Planete du ſyſtême ſolaire, ce tâtonnement ne peut paſſer la troiſieme anomalie approchée.

204. V. *A la moitié du premier logarithme conſtant, ajoutez la tangente de la moitié de l'anomalie vraie de l'excentrique, la ſomme ſera la tangente de la moitié de l'anomalie vraie qu'on cherche.*

ARTICLE XII.

Différents Problêmes sur les mouvements des Planetes dans des ellipses.

205. PROBLEME I. *LEs dimensions d'une ellipse étant données, convertir une anomalie vraie donnée, en anomalie moyenne.* Le tout compté depuis le périhélie.

206. SOLUTION. Faites : *Comme la racine quarrée de la distance aphélie, à la racine quarrée de la distance perihélie; ainsi la tangente de la moitié de l'anomalie vraie est à la tangente de la moitié de l'anomalie de l'excentrique.* Ensuite : *Comme le rayon est au sinus de l'anomalie de l'excentrique, ainsi l'excentrique réduite en secondes*, telles que la moitié du grand axe, vaut $57^{o}\ 17'\ 4''4, 8$, *est à un nombre de degrés, minutes & secondes, qu'il faut ôter de l'anomalie de l'excentrique, pour avoir l'anomalie moyenne.* Ces analogies sont les inverses de celles de l'Article précédent.

207. PROBLEME II. *Les dimensions d'une ellipse étant données, trouver le rayon vecteur, ou la distance* SM (fig. 26) *qui convient à une anomalie vraie donnée* PSM.

208. SOLUTIONS. SM = demi-gr. axe $\mp$ l'excentricité $\times$ *cos* anomalie de l'excentrique.

209. $SM = \frac{\text{demi-petit axe} \times \textit{sin.}\ \text{anom. de l'excentrique}}{\textit{sin.}\ \text{anomalie vraie}}$.

210. $SM = \frac{\text{dist. aphélie} \times \text{dist. périhelie}}{\text{dist. périhélie} + 2\ \text{excentricité} \times \textit{cos}^{2}\ \frac{1}{2}\ \text{anom. vraie}}$.

211. $SM = \frac{\text{dist. aphélie} \times \text{dist. périh.}}{\text{demi-grand axe} \pm \text{excentricité} \times \textit{cos}\ \text{anom. vraie}}$.

211. La premiere formule n'est autre chose que $SM = 1 - CS \times cos\ PN$ (196).

213. DEM. de la 2e formule. Dans les triangles ISM, ISN rectangles en I, les côtés MI, NI sont comme les tangentes & les côtés SM, SN sont comme les sécantes des angles CSM, CSN ou de leurs suppléments PSM, PSN. Or les droites MI & NI sont (Elem. 843) comme CB

CB à CA ou CN; ainsi on a les proportions CB : CN : : *tang* PSM : *tang* PSN ; & dans le triangle CNS, CN : SN : : *f* PSN : *f* PCN, on a encore SN : SM : : *sec* PSN : *sec* PSM. Donc en multipliant ces trois proportions, & divisant la premiere raison composée par CN × SN, on a CB : SM : : *tang* PSM × *f* PSN × *sec* PSN : *tang* PSN × *f* PCN × *sec* PSM. Or (Trig. 52) *sin* × *sec* = *tang* : Donc CB : SM : : *tang* PSM × *tang* PSN : *tang* PSN × *f* PCN × *sec* PSM : : *tang* PSM : *f* PCN × *sec* PSM : : $\frac{tang\,PSM}{sec\,PSM}$: *f* PCN : *f* PSM : *f* PCN. Donc enfin CB : SM : : *sin* PSM : : *sin* PCN. Cette formule est commode pour dresser une Table des logarithmes des distances des planetes au soleil.

214. DEM. de la 3e & 4e formule. $\frac{1}{2}$ SM + $\frac{1}{2}$ MF = CA; donc $\frac{1}{2}$ SM + $\frac{1}{2}$ MF + $\frac{1}{2}$ FS = CA + CS = SA. Or (Trig. 172) SF × SM : (SA — SF) × (SA — SM) : : 1 : $f^2\,\frac{1}{2}$ ASM. Ou bien 2 CS × SM : SP × (SA — SM) : : 1 : $f^2\,\frac{1}{2}$ ASM : : 1 : $cof^2\,\frac{1}{2}$ PSM (Trig. 49). D'où on tire $SM = \frac{SP \times SA}{SP + 2\,CS \times cof^2\,\frac{1}{2}PSM}$. Et parce que (Trig. 56) $R \pm cof = 2\,cof^2\,\frac{1}{2}$, on a 2 CS × $cof^2\,\frac{1}{2}$ PSM ou CS × 2 $cof^2\,\frac{1}{2}$ PSM = CS ± CS × *cof* PSM, donc SP + 2 CS × $cof^2\,\frac{1}{2}$ PSM = SP + CS ± CS × *cof* PSM = CP ± CS × *cof* PSM : Donc $SM = \frac{SP \times SA}{CP \pm CS \times cof\,PSM}$.

215. PROBLEME III. *Etant donnés les deux demi-axes d'une ellipse, par exemple,* (fig. 26.) CA = 1 & CG = 0,977954, *trouver le point* M, *où est la plus grande équation du centre, & la quantité de cette équation.*

216. SOLUTION. I°. Ayant pris la moitié de la somme des logarithmes de la somme & de la différence des deux demi-axes CA, CB, on a le logarithme de l'excentricité, & par conséquent CS = 0, 20882. Du foyer S comme centre avec un rayon SM = 0, 988915 moyen proportionnel entre CA & CB, décrivez un arc qui coupe l'ellipse en un point M, qui est (165) le vrai lieu de la Planete au temps de sa plus grande équation.

II°. Du point M, tirez à l'autre foyer la droite MF; & dans le triangle FMS on connoît les trois côtés, ſavoir, SF double de l'excentricité, SM, & MF qui eſt (Elem. 795) l'excès de AP, ſur SM. On trouvera donc l'angle ASM de 80° 56′ 19″ dont le ſupplément 99° 3′ 41″ eſt l'anomalie vraie au temps de la plus grande équation, & par conſéquent (206) l'anomalie moyenne correſpondante 75° 0′ 36″; leur différence donne l'équation 24° 3′ 5″.

217. PROBLEME IV. *Trouver par les obſervations d'une planete quelle eſt ſa plus grande équation.*

218. SOLUTION. Il faut déterminer les inſtants auxquels elle s'eſt trouvée avant & après ſon paſſage par la ligne des abſides, dans les deux points de ſon ellipſe, où le rayon vecteur étoit moyen proportionnel entre les deux demi-axes : ce qui eſt facile, parce que (164) alors ſa vîteſſe réelle étoit égale à ſa vîteſſe moyenne. Par exemple, par le temps de la révolution on ſait (123) que la vîteſſe moyenne de Mercure eſt de 4° 5′ 32″,5, par jour : il faut donc trouver les deux inſtants auxquels la vîteſſe réelle de Mercure a dû être de cette quantité en 24 heures.

219. En examinant les obſervations rapportées ci-deſſus, (page 50) on voit que Mercure a eu 4° 5′ de mouvement diurne, vers le 15 Juillet & le 4 Septembre. Il faut donc interpoler les différences entre les obſervations des 13, 14, 15 & 16 Juillet, pour ſavoir quand la différence a dû être de 4° 5′ 32″,5 : & on trouve que ç'a été entre le 14 Juillet à 2^h 31′, & le 15 à 2^h 31′, & qu'ainſi l'inſtant cherché où Mercure étoit préciſément dans ſa diſtance moyenne, a été le 14 Juillet à 14^h 31′. En interpolant maintenant les vrais lieux de Mercure du 14, 15 & 16 Juillet, on trouve que le 14 Juillet à 14^h 31′, cette planete étoit dans 5^s 22° 54′ 14″.

220. De même en interpolant les différences entre les obſervations des 3, 4, 5 & 6 Septembre, & les vrais lieux de Mercure obſervés le 3, le 4, & le 5, on trouve qu'il a été dans ſa diſtance moyenne le 3 Septembre à 22^h $14'\frac{1}{2}$, & qu'alors ſon vrai lieu étoit 11^s 4° 49′ 47″.

221. La différence entre ces deux vrais lieux, eſt de 5^s $11^o\ 55'\ 33''$: c'eſt le mouvement vrai ou la ſomme des vîteſſes réelles de Mercure dans l'intervalle des paſſages par ſes diſtances moyennes. Le temps de cet intervalle eſt de 51 jours $7^h\ 43'\ \frac{1}{2}$, pendant leſquels Mercure auroit décrit par un mouvement uniforme, $7^s\ 0^o\ 1'\ 37''$, à raiſon de 12 ſignes pour 87 jours $23^h\ 15'\ 32''$. La différence entre ces deux mouvements eſt de $48^o\ 6'\ 4''$, dont la moitié $24^o\ 3'\ 2''$, eſt la ſomme des inégalités de Mercure, depuis le paſſage par la ligne des abſides juſqu'au terme de ſes inégalités ; & par conſéquent c'eſt la plus grande équation cherchée.

222. REMARQUE. Quand les orbites ſont peu excentriques, il n'eſt pas néceſſaire d'interpoler pour avoir l'inſtant précis où la planete a été dans ſes diſtances moyennes, il ſuffit de comparer leur mouvement vrai, dans l'intervalle des jours où leur vîteſſe réelle eſt à très-peu près égale à la moyenne, avec le mouvement moyen qui convient à cet intervalle. Par exemple, du 14 Juillet à midi au 4 Septembre à midi, le mouvement vrai de Mercure a été de $5^s\ 14^o\ 43'\ 36''$, & le moyen de $7^s\ 2^o\ 47'\ 56''$; ce qui donne la plus grande équation $24^o\ 2'\ 10''$. Et du 15 Juillet à midi au 4 Septembre, le mouvement vrai étant de $5^s\ 10^o\ 37'\ 8''$, & le moyen de $6^s\ 28^o\ 42'\ 24''$, on a la plus grande équation $24^o\ 2'\ 38''$, qui ne differe de l'autre, qu'à cauſe de la grande inégalité de la vîteſſe de Mercure, dans l'intervalle du 14 au 15 Juillet : au lieu que dans les orbites peu excentriques, l'inégalité eſt preſque inſenſible d'un jour à l'autre.

223. PROBLEME V. *Etant donnée la plus grande équation d'une planete, trouver ſon excentricité & les autres dimenſions de ſon ellipſe.*

224. On voit par le calcul du Problême III. & par la conſtruction de la figure 26, qui ſert à trouver l'équation du centre, que lorſqu'elle eſt la plus grande, la perpendiculaire S T eſt preſque confondue avec l'excentricité S C, & que l'excentricité étant réduite en arc de cercle, elle eſt (195) un peu plus petite que la moitié de la plus grande équation ; car elle eſt de $11^o\ 57'\ 51''$,3 tandis que

la moitié de la plus grande équation eſt de $12^o\ 1'\ 32'',5$.
Or il eſt clair que moins les orbites ſont excentriques, plus ces quantités approchent de l'égalité; & qu'ainſi, en faiſant cette analogie : *Comme* $57^o\ 17'\ 44'',8$, *ſont à la moitié de la plus grande équation d'une planete; ainſi le demi-grand axe de ſon ellipſe, eſt à une quantité, qui dans les orbites peu excentriques, eſt ſenſiblement égale à ſon excentricité; mais qui dans les orbites fort excentriques, eſt un peu plus grande que ſon excentricité.*

225. Pour avoir la vraie excentricité dans ce dernier cas, il faut faire le calcul ſuivant, qui ſervira d'exemple.

226. Etant donnée la plus grande équation de Mercure de $24^o\ 3'\ 5''$, il faut faire, comme $57^o\ 17'\ 44'',8$, ſont à $12^o\ 1'\ 32'',5$; ainſi la moitié du grand axe de l'ellipſe de Mercure, ſuppoſée $= 1$, eſt à CS à-peu-près; on trouvera 0,209888 : ſuppoſant enſuite que ce ſoit la vraie valeur de CS, il faut calculer par le problême précédent la plus grande équation du centre qui en réſulte, & diminuer la valeur trouvée de CS, à proportion de cette équation comparée à la vraie équation $24^o\ 3'\ 5''$.

227. Pour cela il faut déterminer le rayon SM, moyen proportionnel entre les deux demi-axes CA, CB, ce qui ſe fera aiſément en prenant $SM = \sqrt[4]{1-CS^2}$; car $CB^2 = CA^2 - CS^2 = 1 - CS^2$; or $\div\ CA : SM : CB$, ou $\div\ 1 : SM : \sqrt{1-CS^2}$, donc $SM^2 = \sqrt{1-CS^2}$ (Elem. 316) & $SM = \sqrt[4]{1-CS^2}$: ſuppoſant donc $CS = 0,209888$, on trouve $SM = 0,9888$.

228. Cela poſé, l'angle MSF ſera de $80^o\ 53'\ 30''$, l'anomalie vraie $99^o\ 6'\ 30''$, & l'anomalie moyenne correſpondante $74^o\ 55'\ 57''$: donc la plus grande équation ſeroit de $24^o\ 10'\ 33''$; c'eſt pourquoi, comme $24^o\ 10'\ 33''$ ſont à $24^o\ 3'\ 5''$; ainſi l'excentricité ſuppoſée 0,209888, eſt à la vraie excentricité 0,2088075.

229. REMARQUE. Quoique ce calcul de l'excentricité ſoit indirect, cependant il eſt plus propre à déterminer les dimenſions des ellipſes des planetes, que la méthode des rapports des diſtances déduites de l'obſervation des vîteſſes angulaires vraies, parce que le serreurs des obſervations

des vîtesses angulaires influent beaucoup plus sur celles des distances qu'on en déduit, que les erreurs des observations de la plus grande équation n'influent sur l'excentricité ; car on a déterminé (172) le rapport des distances aphélies & périhélies de Mercure par la comparaison d'un arc de 1° 3' 55'', 8, à un arc de 27' 23'', 2, c'est-à-dire, de deux petits arcs, dont l'un n'est gueres plus que le double de l'autre ; au lieu qu'on peut les conclure par une inégalité de 48° causée par l'excentricité seule, pendant le temps d'une demi-révolution de Mercure.

230. PROBLEME VI. *Etant donné le temps de la révolution d'une planete, avec trois vrais lieux observés dans son orbite, trouver l'excentricité, la ligne des absides, & l'instant du plus prochain passage de la planete par cette ligne.*

231. Afin que les observations soient les plus favorables pour cette recherche, il faut que deux des lieux donnés par observations, soient voisins des deux points des distances moyennes, & le troisieme près de la ligne des absides.

232. La solution directe de ce problême est très-difficile : (*n*) cependant comme on n'a lieu d'en faire l'application que sur les planetes dont la théorie est déja assez bien connue, nous y employerons une méthode indirecte, mais fort expéditive, & susceptible de toute l'exactitude possible. Elle est fondée sur les fausses positions, qui supposent le problême à peu près résolu.

233. Soient donc, par exemple, donnés les trois vrais lieux de Mercure observés comme il suit :

	Vrais lieux.	Différences.
15. Juillet. . . .	5s 24° 30 45''	. . . . 70° 24' 17''
6. Août. . . .	8 4 55 2	. . . 103 6 42
7. Septembre.	11 18 1 44	

234. Par le temps connu de la révolution périodique de Mercure, on trouve que dans l'intervalle du 15 Juillet

(*n*) Il y en a des solutions de Halley, la Hire, Newton, &c. V. M. Nicollic, Mémoires de l'Académie 1746, pag. 291.

au 6 Août, qui est de 22 jours, Mercure a décrit 90° 1′ 54″ en mouvement moyen, & que du 6 Août au 7 Septembre il a décrit 130° 57′ 18″. Cela posé, le problême consiste à déterminer l'excentricité, & la position du grand axe d'une ellipse, telle que 90° 1′ 54″ de mouvement moyen, répondent à 70° 24′ 17″ de mouvement vrai, & 130° 57′ 18″ à 103° 6′ 42″.

235. Pour cela, soit (fig. 27) I A *p* l'orbite cherchée: *p a* la ligne des absides; I, A, P, les trois lieux observés; S le Soleil: les angles I S *p*, A S *p*, *p* S P, sont donc les anomalies vraies au temps de chaque observation: or il est clair que l'une de ces anomalies étant trouvée, on auroit toutes les autres par les angles connus I S A, A S P. Je cherche d'abord à peu-près la position de S *a* à l'égard de ces angles, c'est-à-dire, entre quelles observations l'aphélie se trouve placé. Je fais, Comme 70° 24′ sont à 90° 2′, ainsi 103° 7′ sont à 131° 53′. Ce quatrieme terme qui excede 130° 57′, fait voir que 130° 57′ excede moins 103° 7′, à proportion que 90° 2′ surpasse 70° 24′; & que par conséquent le mouvement vrai a éte plus lent du 6 Août au 7 Septembre, que du 15 Juillet au 6 Août: or comme je sais par la théorie à peu-près-connue que le 6 Août Mercure n'étoit pas loin de l'aphélie, j'en conclus que ce jour-la, il ne l'avoit pas encore passé, & qu'ainsi il faut placer S *a* entre S A & S P, mais proche de S A, d'une quantité A S *a* ou *p* S A qu'il faudra trouver. Je sais d'ailleurs qu'en faisant = 1 la moitié du grand axe de l'ellipse de Mercure, son excentricité est presque = 0,21. C'est pourquoi je fais une *premiere supposition*, où je mets l'excentricité = 0,205, & je fais d'abord deux hypotheses dans cette même supposition; dans la premiere, je suppose A S *p* de 172 degrés; & dans la seconde, je le suppose de 171 degrés: donc dans chacune de ces suppositions I S *p* est respectivement 101° 35′ 43″, & 100° 35′ 43″: or (205) il est aisé de calculer que les anomalies moyennes correspondantes à 172° & à 101° 35′ 43″, sont 168° 9′ 6″ & 78° 0′ 54″, dont la différence est 90° 8′ 12″, qui excede 90° 1′ 54″ de 6′ 18″, erreur de la premiere hypothese. De même à 171° & à 100° 35′ 43″,

répondent 166° 40′ 36″ & 76° 59′ 56″, leur différence 89° 40′ 40″, donne 21′ 14″, pour erreur de la seconde hypothese. Ces deux erreurs étant en sens contraire, je dis, Comme leur somme 27′ 32″, est à 1° 0′ 0″, différence des deux anomalies vraies hypothétiques A S *a*; ainsi 6′ 18″, erreur dans le résultat de la premiere hypothese, sont à 13′ 44″, dont il faut supposer AS*p* plus petit afin de détruire cette erreur. Je fais donc une troisieme hypothese, où AS*p* = 171° 46′ 16″, & par conséquent I S *p* = 101°. 21′ 59″ : les anomalies moyennes correspondantes sont 167° 48′ 49″ & 77° 46′ 55″, dont la différence 90° 1′ 54″, est précisément telle que l'exige l'intervalle entre les deux premieres observations; & le problême seroit résolu, si l'anomalie vraie *p* S P étant réduite en anomalie moyenne, & ajoutée à l'anomalie moyenne 167° 48′ 49″, le supplément de la somme à 360°, étoit 130° 57′ 18″, comme l'exige le mouvement moyen correspondant à l'angle A S P. Mais parce qu'en ajoutant 171° 46′ 16″ à 103° 6′ 42″, on trouve le supplément à 360° de 85° 7′ 2″, qui est l'angle *p*SP, lequel réduit en anomalie moyenne est de 62° 10′ 29″, & que l'ayant ajouté à 167° 48′ 49″, son supplément à 360° donne 130° 0′ 42″, il suit que cette premiere supposition, en s'accordant aux deux premieres observations, donne une erreur par défaut de 56′ 36″ dans la troisieme.

236. Je fais une *seconde supposition* où l'excentricité = 0,21 : & supposant de même A S *p* = 172°, puis = 171°, j'en calcule comme ci-dessus les résultats qui me font connoître qu'il falloit supposer A S *p* = 170° 46′ 45″, I S *p* = 100° 22′ 9″, pour avoir 166° 13′ 25″ & 76° 11′ 31″, dont la différence est 90° 1′ 54″, telle que l'exige l'intervalle du 15 Juillet au 6 Août. Pour vérification de cette hypothese, j'ajoute 170° 46′ 45″ à 103° 6′ 42″, & j'ai *p* S P = 86° 6′ 33″ qui réduit en anomalie moyenne, donne 62° 31′ 42″ : j'y ajoute 166° 13′ 25″, & j'ai pour supplément à 360°, 131° 14′ 53″ : donc cette seconde supposition en s'accordant aux deux premieres observations, donne dans la troisieme une erreur de 17′ 35″ par excès.

237. Pour ôter cette erreur, je fais : *Comme* 1° 14′ 11″,

somme des deux erreurs des deux suppositions, sont à 17' 35'', erreur de la seconde; ainsi 0,005, différence des excentricités dans ces suppositions, sont à 0,001185, erreur de l'excentricité dans la seconde : & ainsi 59' 31'', différence des anomalies vraies hypothétiques 171° 46' 16'' & 170° 46' 45'' dans les deux suppositions, sont à 14' 6'', erreur vraie dans la seconde. Donc pour corriger la seconde supposition, il faut faire l'excentricité = 0,208815; & ASp = 171° 0' 51'', & alors je trouve qu'aux anomalies vraies ASp = 171° 0' 51'', ISp = 79° 23' 0''; pSP = 85° 52' 27'', répondent les anomalies moyennes 166° 36' 6'', 76° 34' 5'' & 62° 26' 40'', qui donnent 90° 2' 1'' & 130° 57' 14'', à très-peu-près comme les exigent les mouvements moyens déduits du temps périodique (*o*).

238. Otant donc l'anomalie vraie ASp = 171° 0' 51'', ou 5^s 21° 0' 51'' du vrai lieu 8^s 4° 55' 2'', on a le vrai lieu du périhélie dans 2^s 13° 54' 11''. Faisant *comme 360 degrés sont au temps de la révolution de Mercure, ainsi l'anomalie moyenne 166° 36' 6'' est à 40 jours 17^h 3'*, qu'il faut ôter du 6 Août, pour avoir le passage de Mercure par son périhélie le 26 Juin à 6^h 57'. Enfin, l'excentricité de son orbite est 0,208815. Et ces résultats sont à très-peu-près conformes aux précédents.

ARTICLE XIII.

Des loix générales qu'observent chacune des deux forces qui font décrire aux Corps Célestes des Trajectoires Coniques, & de ce qui en résulte pour les Trajectoires Elliptiques.

239. PUisque le mouvement des planetes n'est pas uniforme, il faut que les forces qui les animent,

---

(*o*) Cette recherche d'une orbite peut être extrêmement simplifiée si l'on emploie deux tables différentes pour l'équation d'une même planete comme je l'ai fait voir dans les Mémoires de l'Académie pour 1775.

ayent toutes deux, ou du moins l'une des deux, quelque principe d'inégalité, qu'il nous faut tâcher de découvrir. Nous les exposerons, après avoir démontré quelques Lemmes.

240. Lemme I. *Si sur le grand axe AR d'une ellipse (fig. 28) on décrit un cercle, toutes les perpendiculaires comme ST, tirées d'un des deux foyers sur une tangente quelconque TV, aboutiront dans sa circonférence.*

241. Dem. Du point T où aboutit la perpendiculaire ST, menez TC au centre de l'ellipse; on a $ST = \frac{1}{2}SK$ (Elem. 808) & $SC = \frac{1}{2}SF$. Donc les triangles STC, SKF sont semblables, & TC est parallele & égale à $\frac{1}{2}FK = CA$ (Elem. 510).

242. Lemme II. *Le quarré du demi-petit axe est égal au produit des deux perpendiculaires menées de chaque foyer sur une même tangente, ou* $CB^2 = ST \times FV$.

243. Dem. Si par le point de contact P on fait passer un diametre Pp, & par son extrêmité p une autre tangente tu, à cause de la symmétrie des parties de l'ellipse, on a $St = FV$, $ST = Fu$; & les points t, u sont dans la circonférence du cercle décrit sur AR; donc (Elem. 566) $ST \times St = RS \times SA$, ou $ST \times FV = RS \times SA = CB^2$ (Elem. 813).

244. Lemme III. *La droite* PD *tirée d'un point* P *quelconque d'une ellipse vers un de ses foyers* F *& terminée au diametre* Nn *conjugué à celui qui passe par le point* P, *est égale au demi-grand-axe* CA. A cause du parallélogramme TCDP, où $PD = TC = CA$ (241).

245. Lemme IV. *Le produit* $PS \times PF$ *de deux droites tirées d'un point quelconque* P *de l'ellipse à chaque foyer, est égal au quarré du demi-diametre* CN *conjugué à celui qui passe par le point* P; ou $PS \times PF = CN^2$.

246. Dem. Les triangles rectangles semblables SPT, FPV donnent les raisons égales ST à SP, & FV à PF : Donc (Elem. 298) $ST \times FV : SP \times PF :: ST^2 : SP^2$. On a aussi $ST + FV$ ou $Tt : SP + PF$ ou $AR :: ST : SP$. Or (Elem. 863) $TI : CA :: CB : CN$, ou $Tt : AR :: CB : CN :: ST : SP$. Donc $CB^2 : CN^2 :: ST^2 : SP^2 :: ST \times FV : SP \times PF$: Or (243) $ST \times FV = CB^2$; donc $SP \times PF = CN^2$.

247. Coroll. De la proportion $CB : CN :: ST : SP$, on conclud $ST = \frac{SP \times CB}{CN}$.

248. Theor. I. *Une force centrale variable quelconque, est une force accélératrice constante pendant un temps très-court.*

249. Ce théorême sera démontré si l'on fait voir qu'une force centrale variable quelconque, fait décrire au corps

qu'elle anime, des eſpaces vers le centre, qui ſont entr'eux comme les quarrés des inſtants qui compoſent un temps très-court t (78).

250. Soient donc P, Q, p, (fig. 32) les trois points d'un arc infiniment petit quelconque d'une trajectoire quelconque A P D. Cet arc étant décrit uniformément (72) pendant le petit temps t, les eſpaces P Q, Pp, ſont entr'eux comme les parties de ce temps t comptées depuis l'inſtant auquel le corps s'eſt trouvé en P. Soit P K la tangente de cet arc, & par conſéquent la route que ſuivroit le corps, ſi étant en P, la force centrale venoit à lui manquer, en ſorte qu'il ne lui reſtât plus que la force uniforme. Du centre des forces S, & par les trois points P, Q, p, tirez les rayons vecteurs S P, S R, S F, prolongés juſqu'à la tangente. Il eſt clair, 1°, que les petits excès Q R, p F, repréſentent les effets de la force centrale, puiſque ce ſont les quantités ou eſpaces dont la force centrale a retiré le corps de la route rectiligne P K, & l'a ramené vers le centre S. 2°. Qu'à cauſe que les rayons vecteurs S P, S Q, S F, ſont infiniment proches, ces rayons, & par conſéquent les excès Q R, p F, ſont des droites paralléles entr'elles.

251. Par les trois points P, Q, p, faites paſſer (Elem. 477) une circonférence de cercle P B N, dans laquelle l'arc P Q p de la trajectoire A P D ſera totalement confondu. Par le point P tirez le diametre P N, qui ſera (Elem. 459) perpendiculaire à la droite P K tangente commune du cercle & de la trajectoire. Enfin, par les points Q, p, tirez Q I, $p\,i$, perpendiculaires à la tangente P K, puis Q E, pH, perpendiculaires au diametre P N, tirez enfin, Q N, pN.

252. Cela poſé, les triangles P Q N, PpN, ſont rectangles (Elem. 468) car P Q, Pp, ſont ſenſiblement des lignes droites. Donc (Elem. 561) $\div$ E P : P Q : P N, & $\div$ P H : Pp : P N. Donc (Elem 316) $PQ^2 = PE \times PN$, & $Pp^2 = PH \times PN$. Donc $PQ^2 : Pp^2 :: PE \times PN : PH \times PN :: PE$ ou $QI : PH$ ou $p\,i$ (Elem. 296). Ainſi $PQ^2 : Pp^2 :: QI : p\,i$. Mais à cauſe des paralleles Q I, $p\,i$, & Q R, p F, les triangles R Q I, F $p\,i$, ſont

ſemblables. Donc $QI : pi :: QR : pF :: PQ^2 : Pp^2$. Donc ſi un corps décrit une trajectoire APD quelconque en vertu d'une force uniforme, & d'une force centrale quelconque, les effets de cette force centrale (repréſentés par QR, pF) ſont dans un très-petit arc quelconque Pp, comme les quarrés des temps (repréſentés par PQ, Pp) employés à parcourir les parties de cet arc.

253. COROLL. I. On peut donc appliquer aux forces centrales les formules du mouvement uniformément accéléré (80), & prendre par conſéquent pour une expreſſion générale d'une force centrale f quelconque pendant un temps très-court t, $f = \frac{e}{tt}$. Et parce que pF exprime ici l'eſpace dont la force centrale a rapproché le corps du centre S pendant qu'il a décrit tout l'arc Pp : il eſt clair que cette formule doit s'exprimer ainſi, $f = \frac{pF}{tt}$.

254. COROLL. II. Donc ſi les temps t ſont égaux, $f = pF$, c'eſt-à-dire, *en temps infiniment petits égaux, les forces centrales ſont entr'elles comme les petites droites* p F, *tirées d'une des extrêmités* p *de chaque arc parcouru, parallélement aux rayons vecteurs* SP, *qui paſſent par l'autre extrêmité* P, *& terminées à la rencontre de la tangente à la trajectoire au même point* P.

255. COROLL. III. *De-là on tire différentes formules générales pour exprimer la force centrale*; car, 1°, les temps étant repréſentés par les aires compriſes entre les rayons vecteurs (114), le temps infiniment petit t que le corps emploie à parcourir l'arc PQp peut être exprimé par l'aire du triangle SPp, ou à cauſe de l'arc Pp confondu avec ſa tangente PF, par l'aire du triangle SPF : or (Elem. 594) les aires de ces triangles ſont comme $SP \times pM$, & $ST \times PF$: donc $tt = SP^2 \times pM^2 = ST^2 \times PF^2$. On a donc les formules $f = \frac{pF}{SP^2 \times pM^2}$, $f = \frac{pF}{ST^2 \times PF^2}$.

256. 2°. Ayant prolongé PS & FS, juſques à la circonférence du cercle oſculateur PBN, on a (Elem. 565) $\div pF : PF : pB$. Donc à cauſe de $PV = pB$ (puiſque

ce ſont deux cordes infiniment proches), $pF = \frac{PF^2}{PV}$. Subſtituant cette valeur de pF dans la ſeconde des deux formules précédentes, on en a une nouvelle, $f = \frac{1}{ST^2 \times PV}$.

257. 3°. Enfin, dans les triangles rectangles ſemblables STP, PVN on a SP : ST : : PN ou 2 PG : PV. Donc $PV = \frac{ST \times 2PG}{SP}$, donc $PV \times ST^2 = \frac{ST^3 \times 2PG}{SP}$. Donc en ſubſtituant, cette derniere formule devient $f = \frac{SP}{ST^3 \times 2PG}$.

258. THEOREME II. *La force centrale qui fait décrire à un corps une ſection conique à un des foyers de laquelle elle réſide, varie en raiſon inverſe du quarré du rayon vecteur.*

259. DEM. Que l'ellipſe APH (fig. 33) repréſente la ſection conique décrite par le corps P, en vertu d'une force centrale f réſidente au foyer S ; je dis que $f = \frac{1}{SP^2}$. Car ſi dans la formule générale $f = \frac{SP}{ST^3 \times 2PG}$, on ſubſtitue à ST ſa valeur $\frac{CB \times SP}{CN}$ (247), & au rayon de courbure PG ſa valeur $\frac{CN^3}{CA \times CB}$ (Elem. 886), on aura pour formule générale de la force centrale qui tend au foyer S d'une ſection conique, $f = \frac{SP \times CN^3 \times CA \times CB}{SP^3 \times CB^3 \times 2CN^3}$, réduiſant $f = \frac{CA}{SP^2 \times CB2 \times 2} = \frac{CA}{SP^2 \times 2CB^2}$; & à cauſe des conſtantes CA, 2 CB ; $f = \frac{1}{SP^2}$.

260. Cette démonſtration s'applique fort aiſément à l'hyperbole; mais non pas à la parabole, qui n'a qu'un foyer; pour en faire une qui convienne à la parabole APR (fig. 71) menez l'ordonnée PO, le rayon de courbure PG, & le diametre PQ; on a (Elem. 827) AH = AO, & (Elem. 807) les angles QPR, SPH, SHP, ſont égaux: donc (Elem. 499) SH = SP. Or à cauſe de la perpendiculaire ST abaiſſée ſur la baſe du triangle iſoſcele HSP, on a HT = TP. Donc HA étant la moitié de HO, & HT la moitié de HP, on a DP =

2ST, & (Elem. 297) HA : HT : : HO : HP. Donc si on tire AT, les Triangles HTA, HPO, sont semblables (Elem. 559) & rectangles, à cause de l'ordonnée PO : donc AT est une perpendiculaire menée de l'angle droit d'un Triangle rectangle STH sur l'hypoténuse HS) : donc (Elem. 561) ∺ SH ou SP : ST : AS, ou $ST^2 = SP \times AS$, & $ST^6 = SP^3 \times SA^3$. Cela posé, le rayon de courbure PG, est (Elem. 887) $= \frac{DP^3}{4AS^2}$ ou, à cause de $DP = 2ST$, $PG = \frac{8ST^3}{4AS^2}$, & $2PG = \frac{4ST^3}{AS^2}$. Donc en substituant dans la formule $f = \frac{SP}{ST^3 \times 2PG}$, on a $f = \frac{SP \times AS^2}{ST^3 \times 4ST^3} = \frac{SP \times AS^2}{4ST^6} = \frac{SP \times AS^2}{4SP^3 \times AS^3} = \frac{1}{4SP^2 \times AS}$: ôtant les constantes, $f = \frac{1}{SP^2}$.

261. THEOREME III. *La force tangentielle qui jointe à une force centrale fait décrire à un corps une des Sections coniques, est dans chaque point de la section, moindre, égale, ou plus grande que la force que ce corps auroit acquise par un mouvement rectiligne uniformément accéléré, depuis le point où il se trouve sur la section, jusqu'au foyer où réside la force centrale, selon que cette section est une ellipse, une parabole, ou une hyperbole.*

262. DEM. Le petit arc Pp n'est décrit par le corps P (fig. 35) dans l'instant t qu'en vertu de la force centrale en P qui tend à faire décrire PI par un mouvement uniformément accéléré, tandis que la force tangentielle tend à lui faire décrire PF uniformément & dans le même temps t. Pour avoir une expression de la force centrale en P, que PK soit la hauteur dont le corps P animé d'une pesanteur g égale à celle qu'on éprouve sur la surface de la terre, devroit tomber de P vers S par un mouvement uniformément accéléré, pour acquérir à la fin d'un temps T, une vîtesse égale à celle que la force tangentielle produit dans le corps P, pour décrire uniformément PF dans le temps t; il est clair (76) que 2PK exprimera un espace parcouru uniformément dans le temps T avec une vîtesse égale à celle avec laquelle PF seroit parcourue uniformément dans le temps t, & qu'ainsi (69) PF : 2PK : : t : T.

263. Puisque (258) les forces centrales varient en raison inverse des quarrés des distances au centre des forces S, soit $= d$ la distance à laquelle le corps P devroit être par rapport au centre S pour avoir une force centrale $= g$; on a donc, la force centrale que le corps P a réellement en P, est à la force ou pesanteur g, comme dd à SP^2. Donc l'expression de la force centrale au point P est $\frac{ddg}{SP^2}$.

264. Maintenant dans des temps très-courts les forces centrales sont (248) des forces accélératrices constantes : donc l'espace PI que la force $\frac{ddg}{SP^2}$ tend à faire décrire dans le temps t, est à l'espace PK que la force accélératrice constante g auroit fait décrire dans le temps T (81) comme ces mêmes forces multipliées par les quarrés de ces temps, ou (262) par les quarrés de PF & de 2 PK. Ainsi, $PI : PK :: \frac{ddg \times PF^2}{SP^2} : g \times 4\ PK^2$: d'où l'on tire $PI = \frac{dd \times PF^2}{SP^2 \times 4PK}$.

265. Or (Elem. 861) $pi^2 : Pi \times (iC + CP)$ ou $Pi \times 2PC :: CN^2 : PC^2$. Donc $Pi \times 2CN^2 = pi^2 \times PC$; & $Pi : pi :: pi \times PC : 2CN^2$. Mais pi étant infiniment petit, $pi \times PC$ est infiniment petit par rapport à $2CN^2$ donc Pi est infiniment petit par rapport à pi, & par conséquent on peut supposer qu'à l'égard de pi le point i est confondu avec le point P, & qu'ainsi $PF = pi$: donc en substituant, on a $Pi \times 2CN^2 = PC \times PF^2$, & $Pi = \frac{PC \times PF^2}{2CN^2}$. Cela posé, les triangles semblables PIi, PDC donnent PC : PD ou CA :: Pi ou $\frac{PC \times PF^2}{2CN^2}$: PI; donc $PI = \frac{CA \times PF^2}{2CN^2}$. Réunissant les deux valeurs de PI, on a l'équation $\frac{dd \times PF^2}{SP^2 \times 4PK} = \frac{CA \times PF^2}{2CN^2}$, qui se réduit à $\frac{dd}{SP^2} \times CN^2 = 2\ CA \times PK$, ou bien $PS \times PR \times \frac{dd}{P}$

(246); ou $PR \times \frac{dd}{SP} = 2\,CA \times PK$, ou $= AB \times PK$.

266. Supposons maintenant que PH soit la hauteur dont le corps animé de la force accélératrice constante g devroit tomber pour acquérir par un mouvement uniformément accéléré une vîtesse égale à celle qu'il auroit en S, s'il tomboit le long de PS par un mouvement uniformément accéléré, en vertu d'une force constante égale à la force centrale qui l'anime réellement dans le point P de son orbite APB : puisque PH & PS sont des espaces parcourus pour acquérir une même vîtesse, ils doivent être (80) en raison inverse des forces accélératrices : ainsi $PH : PS :: \frac{ddg}{SP^2} : g$. Donc $PH = \frac{dd}{SP}$. Substituant donc on a $PH \times PR = AB \times PK$, ou $PK : PH :: PR : AB$. Or dans l'ellipse PR est plus petit que AB ; dans la parabole PR & AB étant infinis sont censés égaux : dans l'hyperbole la distance d'un point pris sur une branche au foyer qui appartient à l'hyperbole opposée est plus grande que l'axe principal. Donc PK est plus petit, égal ou plus grand que PH, selon que la courbe APB est une ellipse, une parabole ou une hyperbole : donc 2 PK qui exprime la vîtesse uniforme procurée par la force tangentielle, est plus petite, égale ou plus grande que 2 PH qui exprime la vîtesse uniforme acquise par une chûte uniformément accélérée de P en S, selon que la planete décrit une ellipse, une parabole, ou une hyberbole autour du point S.

267. Coroll. I. L'expression de la vîtesse tangentielle est en général $\frac{2PH \times PR}{AB} = \frac{PH \times PR}{CA}$.

268. Coroll. II. Si le corps P décrivoit un cercle avec une force centrale tendante au centre S, (qui se trouve confondu avec R) : alors à cause de $PR = \frac{1}{2} AB$, on a $PK = \frac{1}{2} PH$, & $2PK = PH$: donc la vîtesse procurée par la force tangentielle, ne seroit que la moitié de la vîtesse acquise en S par une chute uniformément accé-

lérée le long du rayon PS, en vertu de la force centrale que le corps a réellement en P.

269. THEOR. IV. *Si plusieurs corps tournent chacun dans une Section conique, en vertu d'une force centrale qui soit toujours réciproquement comme le quarré de la distance de chaque corps à un foyer commun à toutes ces Sections, & dans lequel réside la force centrale....*

270. I°. *Les aires des Secteurs décrits en même-temps, sont entr'elles comme la racine quarrée du parametre de l'axe principal de chaque Section.*

271. Car si on fait $= q$ le parametre de l'axe principal, on a (Elem. 817) $q = \frac{2CB^2}{CA}$ (fig. 33). Donc $f = \frac{CA}{SP^2 \times 2CB^2}$ se peut réduire à $f = \frac{1}{SP^2 \times q}$. Ce qu'on trouve aussi par la formule $f = \frac{1}{4SP^2 \times AS}$ pour la parabole, en y substituant q pour $4AS$ (fig. 71). Or (255) $f = \frac{pF}{SP^2 \times pM^2}$: donc $\frac{1}{SP^2 \times q} = \frac{pF}{SP^2 \times pM^2}$. Mais on a supposé que pF, qui représente la force centrale, est $= \frac{1}{SP^2}$ on a donc $\frac{pF}{q} = \frac{pF}{SP^2 \times pM^2}$. Donc $q = SP^2 \times pM^2$, & $\sqrt{q} = SP \times pM$: or $SP \times pM$ est comme l'aire du secteur PSp.

272. II°. *La vîtesse absolue de chaque corps à chaque point de sa trajectoire, est comme la racine quarrée du parametre de l'axe principal divisée par la perpendiculaire tirée du foyer sur la tangente au point où est le corps, ou* $u = \frac{\sqrt{q}}{ST}$ (fig. 33 & 71).

273. Car la vîtesse est dans un temps infiniment petit comme l'arc décrit pP ; or à cause des triangles rectangles semblables SPT, pMP, on a $ST : SP :: pM : pP$. Donc $pP = \frac{SP \times pM}{ST}$. Or (271) $\sqrt{q} = SP \times pM$: donc pP, ou $u = \frac{\sqrt{q}}{ST}$.

274. III°. *Si les trajectoires sont des ellipses, l'aire entiere* a *de chacune est en raison composée de la racine quarrée du parametre de son grand axe, & du temps* t *d'une révolution entiere du corps.* Ou $a = t \sqrt{q}$.

275. Car le temps t de la révolution périodique est d'autant plus long, que l'aire de l'ellipse est plus grande, & que le corps en décrit une moindre partie dans un temps donné. Donc le temps de la révolution est comme l'aire entiere a de l'ellipse divisée par l'aire s d'un secteur décrit dans un temps donné, ou $t = \frac{a}{s}$. Or $s = \sqrt{q}$ (271), donc $t = \frac{a}{\sqrt{q}}$; donc $t \sqrt{q} = a$.

276. IV°. *Si les trajectoires sont des ellipses, le temps* t *de la révolution périodique de chaque corps, est comme la racine quarrée du cube du grand axe* d *de son ellipse*, ou $t = \sqrt{d^3}$.

277. Car soit le petit axe $= b$, q le parametre du grand axe, on a (Elem. 817) $dq = bb$: donc $d^3 q = bbdd$. Or (Elem. 899) l'aire entiere a de l'ellipse est comme le produit des axes, ou $a = bd = t \sqrt{q}$ (275); donc $bbdd = ttq$. Donc $d^3 q = ttq$; donc $d^3 = tt$, & $t = \sqrt{d^3}$.

278. COROLL. I. On a donc aussi $d = \sqrt[3]{tt}$, & par conséquent $\frac{1}{2} d$ est comme $\sqrt[3]{tt}$: & cette formule a lieu également dans le cercle, la force centrale tendant au centre.

279. COROLL. II. De-là il suit que *les temps des révolutions des planetes étant connus, on en peut déduire les rapports des grands axes de chacune des ellipses qu'elles décrivent;* & que par conséquent les rapports des dimensions de chaque ellipse en particulier, étant déterminés par observation, on peut exprimer toutes ces dimensions par les parties d'une même échelle. Et c'est-là la seconde des deux loix de Képler. (p).

(p) Cette belle loi de Képler qui a conduit à la découverte de l'attraction, fut trouvée par le moyen des observations de Tycho-Brahé, le 15 Mai 1618, comme on le voit dans le livre de Képler, intitulé : *Harmonices Mundi*, 1619.

280. Par exemple, ayant pris le grand axe de l'ellipſe de la terre pour l'échelle commune de toutes les dimenſions des autres, & l'ayant ſuppoſée de 20000 parties égales, en faiſant : Comme 365ʲ 6ʰ 9′ 10″, temps de la révolution de la terre, ſont à 87ʲ 23ʰ 15′ 32″; ainſi 2828427 racine quarrée de 8000000000000 cube de 20000, ſont à 681204 racine quarrée de 464039000000 cube du grand axe de l'ellipſe de Mercure, dont la racine cubique eſt 7742; enſuite, Comme 2, grand axe de ☿ déterminé ci-deſſus (182), ſont à 7742; ainſi le petit axe 1,855648, & l'excentricité 0,20881, ſont à 7570 petit axe, & à 810 excentricité de Mercure, en parties de l'échelle : on trouvera de même les dimenſions qui ſont dans la Table ſuivante.

TABLE

Des Eléments de la Théorie des Planetes vues du Soleil (q).

		Mercure.	Venus.	La Terre.	Mars.	Jupiter.	Saturne.
Temps des Révolutions périodiques.		87j 23h 15 $\frac{1}{2}$	224j 16h 48' $\frac{1}{3}$	365j 6h 9' $\frac{1}{6}$	686j 23h 30' $\frac{1}{2}$	4332j 12h	10759j 8h
Dimensions des Ellipses en supposant le diametre du cercle moyen proportionnel entre les axes, de 2000000 parties.	Grand axe	2022555	2000022	2000142	2004343	200161	2001624
	Petit axe	1977696	1999971	1999857	1995669	1998839	1998377
	Excentricité.	211165	7141	16881	93134	48188	56982
Dimensions rapportées au grand axe de la Terre, comme à une Echelle commune.	Grand axe	7742	14466	20000	30474	104020	190758
	Petit axe	7570	14465	19997	30342	103899	190448
	Excentricité	810	52	168	1415	2505	5430
	Distance moyenne.	3827	7233	10000	15203	51980	95302
Position de l'Aphélie, en commençant à compter depuis l'Etoile γ du Bélier.		7s 13° 54' 30''	9s 7° 49' 20''	8s 8° 42' 45''	4s 1° 49' 50''	5s 10° 30' 40''	7s 29° 26' 15''
Epoque de l'instant d'un passage par l'Aphélie.		9 Aout 1740 à 6h 37' 0''	3 Janv. 1743 à 15h 33' 30''	29 Déc. 1744 à 3h 1' 0''	12 Janv. 1745. à 8h 41' 0''	9 Avril 1744 à 13h 0' 0''	5 Sept. 1723 à 0h 0' 0''
Diametre vus du Soleil dans les distances moyennes des Planettes.		21''	29''	21''	12''	37''	16''
Rapports	Des diametres véritables.	0,38	1,00	1	0,87	9,16	7,26
	Des surfaces.	0,15	1,00	1	0,75	83,87	52,73
	Des grosseurs ou volumes.	0,05	1,00	1	0,65	768,10	381,80

(q) Ces Eléments ne sont conformes ni aux Tables de M. Cassini, ni à celles de M. Halley. On les trouve un peu différemment dans le VIe Livre de mon Astronomie.

281. SCHOLIE I. On a donc par le calcul fondé ſur la théorie Phyſique, le rapport des diſtances de chaque planete au ſoleil, qu'il eût été impoſſible de déduire directement par des obſervations ſeules (*r*).

282. SCHOLIE II. Donc auſſi en obſervant l'angle ſous lequel on voit le diametre de chaque planete lorſqu'elle eſt à une diſtance connue en parties de l'échelle commune, on aura les rapports de leurs ſurfaces & de leurs groſſeurs. Car, 1°, il eſt clair que le diametre réel d'une planete eſt d'autant plus grand qu'il paroît ſoutendre un plus grand arc dans le Ciel, & qu'il eſt à une plus grande diſtance. Donc *les diametres réels des planetes ſont entr'eux comme le produit des arcs qu'ils occupent dans le Ciel par la diſtance de la planete à l'œil de l'Obſervateur.*

283. 2°. Les ſurfaces des ſpheres étant entr'elles (Elem. 705) comme les quarrés, & (Elem. 718) les ſolidités comme les cubes des diametres réels, il ſuit que *la ſurface réelle d'une planete, eſt comme le produit du quarré de l'arc apparent que ſon diametre ſoutend, par le quarré de ſa diſtance actuelle à l'obſervateur*; & que *la groſſeur réelle d'une planete eſt comme le produit du cube de l'arc apparent ſoutendu par ſon diametre, par le cube de ſa diſtance actuelle à l'œil de l'obſervateur.*

284. C'eſt ſur ces principes que l'on a calculé dans la Table précédente, les rapports des diametres, des ſurfaces, & des groſſeurs des planetes.

ARTICLE XIV.

Des modifications que doivent ſouffrir les loix des mouvements des planetes par des variations accidentelles dans les deux forces qui animent chacun de ces corps.

285. TOut ce qu'on a dit juſqu'ici ſuppoſe que chaque planete P (fig. 35) ne ſe meut qu'en vertu de

---

(*r*) Képler les avoit très-bien déduites des obſervations ſeules de Tycho, en ſuppoſant que les planetes & la terre tournent autour

deux forces, qui varient à chaque instant, l'une tangentielle, qui procure à la planete une vîtesse exprimée par $2PK$ ou par $\frac{PH \times PR}{CA}$ (267); & l'autre centrale, qui lui procure une vîtesse exprimée par $\frac{CA}{SP^2 \times 2CB^2}$ (259). Mais parce qu'il se peut faire, & qu'il arrive en effet, comme on le verra dans la suite, que quelques causes Physiques apportent de légeres altérations dans ces forces, en sorte que les vîtesses qu'elles procurent à chaque instant cessent d'être dans le rapport exact de $\frac{PH \times PR}{CA}$ à $\frac{CA}{SP^2 \times 2CB^2}$, il faut examiner ici en général ce qui doit en résulter.

286. Nous ne pouvons pas entrer dans de grands détails sur cet article, qui est le plus compliqué de toute l'Astronomie Physique; nous donnerons seulement ici quelques principes, pour rendre raison des inégalités les plus sensibles qu'on découvre dans le ciel, & dont on parlera dans la suite.

287. THEOREME I. *L'expression du grand axe* AB (fig. 35) *d'une ellipse décrite par le corps* P *en vertu de la force tangentielle & de la force centrale, telles que nous les avons trouvées dans l'article précédent, est* $AB = \frac{SP \times PH}{PH - PK}$; ce qui se tire aisément de l'équation $PH \times PR = AB \times PK$ (266), en y substituant à PR sa valeur $AB - SP$.

288. COROLL. I. Si les deux forces qui animent le corps P viennent à recevoir quelque légere altération qui détruise le rapport exact qu'elles doivent garder pour lui faire décrire constamment une certaine ellipse, ce corps ne peut plus la décrire, à moins qu'on ne suppose que cette ellipse change de position & de dimensions. Puis donc que l'expression du grand axe est $AB = \frac{SP \times PH}{PH - PK}$, il doit subir

du Soleil, puisque c'est par ces distances qu'il trouva la loi que les quarrés des temps sont comme les cubes des distances, laquelle a donné naissance à la loi de l'attraction exposée dans les articles précédens.

des variations analogues à celles qui peuvent arriver accidentellement aux quantités PK, PH.

289. Si on ſuppoſe, par exemple, que la force tangentielle ſeule reçoive un petit excès d'intenſité par quelque cauſe étrangere que ce ſoit, en ſorte que PF devienne PF + 2 x, alors PK augmentera de + x, la valeur du dénominateur PH — PK diminuera, celle de la fraction $\frac{SP \times PH}{PH - PK}$ devenue $\frac{SP \times PH}{PH - PK - x}$, augmentera, ce qui fera allonger le grand axe AB; pour avoir l'expreſſion de cet allongement, il faut ôter $\frac{SP \times PH}{PH - PK}$ de $\frac{SP \times PH}{PH - PK - x}$, & on a (Elem. 89) $\frac{PH \times SP \times x}{PH^2 - 2PH \times PK + PK^2 + PH \times x - SP \times x}$ où l'on peut négliger les termes $PH \times x$ — $SP \times x$ comme infiniment petits en comparaiſon des autres qui ſont dans le dénominateur, & le tout ſe réduit à $\frac{PH \times SP \times x}{(PH - PK)^2}$.

290. Mais ſi on ſuppoſe que la force tangentielle reſtant la même, la force centrale ſeule vienne à recevoir une légere diminution, en ſorte que PH devienne PH — z, alors on aura $AB = \frac{(PH - z) \times SP}{PH - z - PK}$, & la variation de l'axe ſera égale à la différence entre cette expreſſion, & $\frac{PH \times SP}{PH - PK}$, on la trouvera par un calcul ſemblable au précédent $= \frac{PK \times SP \times z}{(PH - PK)^2}$.

291. Enfin ſi les deux forces varient à la fois ſelon de petites quantités connues, on calculera à part l'influence de chaque variation ſur la longueur de l'axe, ſelon les deux formules précédentes.

292. COROLL. II. *Une accélération accidentelle dans la vîteſſe tangentielle d'une planete, & une diminution dans ſa force centrale contribuent chacune à allonger le temps de la révolution périodique*, puiſque les temps périodiques ſont toujours en raiſon des racines quarrées des cubes des grands axes, & que ces deux variations contribuent chacune à allonger les grands axes.

293. THEOREME II. *Une variation dans le grand axe d'une ellipse en cause nécessairement une dans sa position & dans l'excentricité, en supposant que la trajectoire reste toujours elliptique, & que le foyer où tend la force centrale soit fixe.*

294. Car si le foyer reste fixe & la trajectoire elliptique, il faut que l'angle SPE (fig. 35) du rayon vecteur SP avec la tangente EP reste toujours égal à l'angle FPR, puisque c'est une propriété essentielle des sections coniques (Elem. 807). Si donc I°, l'axe AB a changé de grandeur par une variation survenue dans la seule force tangentielle, alors SP restant constant, il faut que cette variation de l'axe soit prise depuis R sur la ligne RP. Comme si l'axe avoit diminué, il faudroit prendre RT = à cette diminution, alors T seroit le lieu de l'autre foyer de l'ellipse, ST seroit la double excentricité, & sa position deviendroit celle de la ligne des absides, laquelle par conséquent auroit eu un mouvement angulaire représenté par l'angle TSR, qui a pour mesure l'arc TG décrit du point S. Cet arc TG pouvant être pris pour une droite perpendiculaire à SR, on auroit *sin. tot* : TR : : *cos* TRG : GR. Donc GR = TR × *cos* TRG; la variation de l'excentricité seroit $\frac{1}{2}$ TR × *cos* PRS. Dans le même triangle GTR on a *sin. tot* : TR : : *s* TRG : TG = TR × *s* PRS. Or SG : 57° 17′ 45″ : : TG : *angle* GST. Donc l'angle du mouvement de la ligne des absides est $\frac{s\,PRS \times TR \times 57^\circ 17' 45''}{SG \text{ ou } SR}$.

295. II°. Si l'axe varie par une altération dans la force centrale seulement, en sorte que la force tangentielle restant la même, cet axe s'allonge de la quantité $z \frac{SP \times PK}{(PH-PK)^2}$, on fera comme l'axe entier $\frac{SP \times PH}{PH-PK}$, est à cette variation, ainsi SP est à la variation ou allongement du rayon vecteur Pp fig. 34, qu'on trouvera $= z \frac{SP \times PK}{(PH-PK) \times PH}$; tirez p T parallele à PR, par R menez RO parallele à PF, & prenez $OT = z \frac{SP \times PK}{(PH-PK)^2} - 2z \frac{SP \times PK}{(PH-PK) \times PH}$, en sorte

que le point T ſoit à l'égard du point p au-delà ou en-deçà du point O, ſelon que O T deviendra poſitif ou négatif ; ce point T ſera le lieu de l'autre foyer, S T ſera la double excentricité, & l'angle R S T exprimera le mouvement de la ligne des abſides. Car à cauſe du triangle P p i iſoſcele, P $p = p i$; donc $SP + Pp + pi + iO = SP + iO + 2 z \frac{SP \times PK}{(PH - PK) \times PH}$: Or $SP + iO = AB$, il faut donc prendre la différence entre $z \frac{SP \times PK}{(PH - PK)^2}$ & $2 z \frac{\int P \times PK}{(PH - PK) \times PH}$, pour avoir le lieu où tombe le point T. Cette derniere conſtruction ne donne pas un calcul auſſi ſimple que la précédente pour les variations de l'excentricité & du mouvement des abſides ; cependant il n'eſt pas fort difficile, puiſque dans le triangle S p T connoiſſant les deux côtés S p, p T & l'angle compris qui eſt égal à l'angle S P R, on peut calculer S T & l'angle, p S T, dont la différence avec l'angle P S R donne le mouvement des abſides R S T.

296. Ce qui ſe dit ici de l'ellipſe, peut s'appliquer à tout autre trajectoire, en y faiſant les changemens qu'exigent ſa courbure, & l'eſpece de la force centrale.

297. SCHOLIE. Si donc les obſervations font appercevoir un dérangement dans la ſituation de la ligne des abſides, une variation dans l'excentricité ou dans la révolution périodique, ce ſera une preuve qu'il y aura eu dans l'intervalle quelque variation dans la loi des forces ; & ſi ces changemens ſont continuels & périodiques, ils ſeront cauſés par quelque action, qui modifiera continuellement ces forces (f).

(f) Auſſi trouve-t-on par les calculs de l'attraction que l'apogée de la lune eſt changé par la force du Soleil, l'aphélie de la terre par les attractions de Jupiter & de Vénus, ceux de Jupiter & de Saturne par leurs attractions mutuelles. V. les ouvrages de M. Euler, d'Alembert, & Clairaut ſur le problême des trois corps.

CHAPITRE III.

Recherche des loix des mouvements des Cometes.

ARTICLE PREMIER.

Des Phénomenes généraux des mouvements des Cometes vues du Soleil, & de l'hypothese Physique qui sert à les expliquer.

298. L'OBSERVATEUR ayant examiné toutes les circonstances des mouvemens de plusieurs cometes, établira les faits généraux suivants.

299. *I. Phénomene.* La direction des routes des cometes, n'est pas déterminée dans un même sens, ni à peu-près dans une même région du Ciel : mais les unes sont *directes*, c'est-à-dire, vont d'Occident en Orient comme les Planetes; les autres sont *rétrogrades*, ou vont d'Orient en Occident. Les unes vont de la partie boréale du ciel vers la partie australe, les autres de la partie australe vers la partie boréale, (*t*) enfin, le urs différentes routes se croisent en tous sens.

300. *II. Phénomene.* Aucune Comete n'est visible pendant une révolution entiere; mais les unes ne décrivent pendant le cours de leur apparition, qu'un arc céleste de 80 ou 100 degrés, les autres en décrivent 150, 200, 250, 300 degrés, &c.

301. *III. Phénomene.* Les Cometes paroissent décrire une portion d'orbite d'autant plus grande, qu'elles vont plus vîte & réciproquement.

302. *IV. Phénomene.* Les Cometes accélerent leurs mouvements de plus en plus, & leurs diametres apparents augmentent de plus en plus depuis leur apparition jusqu'à ce qu'elles soient parvenues à la moitié de l'arc qu'elles

(*t*) Dans la partie de leur orbite qui est visible pour nous.

doivent parcourir ; enſuite leur vîteſſe ſe rallentit de plus en plus, & leur diametre diminue de même, & ſuivant les mêmes degrés ſelon leſquels la vîteſſe & le diametre avoient augmenté, de ſorte qu'à égale diſtance du point du milieu de l'orbite viſible, les vîteſſes & les diametres d'une même Comete ſont égaux.

303. *V. Phenomene.* Les Cometes paroiſſent toujours ſe mouvoir dans un grand cercle de la ſphere céleſte.

304. En général les mouvements des Cometes ont une parfaite analogie avec ceux des Planetes du premier ordre, & ils n'en different qu'en deux points : 1°. En ce que la direction des mouvements des Cometes eſt indifféremment vers une région quelconque du ciel ; au lieu que les Planetes vont toutes dans le même ſens, & ſuivent toutes preſque la même route dans le ciel. 2°. En ce que l'on ne voit jamais les Cometes faire une révolution entiere.

305. De tout ceci l'obſervateur conclura (*u*), 1°. Que *les Cometes n'ont pas dans le ciel un Zodiaque*, comme les Planetes. 2°. Que *leur orbite n'eſt pas une ligne droite, ni une courbe dont la convexité regarde le Soleil*, du moins à l'égard des Cometes qui décrivent plus de 180 degrés ; car il eſt impoſſible qu'une ligne droite ou qu'une courbe convexe ſoit vue par un œil ſous un angle de 180 degrés, quelle que ſoit ſa longueur & ſa poſition ; mais qu'il eſt vraiſemblable que *leur orbite eſt une courbe concave vers le Soleil, & dont les branches ſont infinies*, comme la parabole & l'hyperbole, *ou du moins dont les branches ne ſe réuniſſent qu'à une diſtance du Soleil qui eſt comme infinie.* 3°. Que *les Cometes paſſent à différentes diſtances du Soleil* ; que celles qui en paſſent le plus près, ſont celles qui paroiſſent aller le plus vîte, & décrire un plus grand arc, & réciproquement. 4°. Que *leur orbite eſt une courbe réguliere*, & que *la force qui anime les Cometes ſuit une loi conſtante.* 5°. *Que chaque orbite eſt dans*

(*u*) Ce furent les concluſions de Newton en 1687, quand il eut reconnu que les Cometes tournoient autour du Soleil, & étoient ſoumiſes à ſon attraction. V. le 3e Livre de ſes *Principes* qui contient les applications les plus ſavantes de la loi de l'attraction.

un plan particulier, qui passe par le Soleil. Qu'enfin *il y a beaucoup d'apparence que les Cometes suivent dans leur mouvement des loix analogues à celles des Planetes*; c'est-à-dire, qu'*elles sont retenues dans leurs orbites par la combinaison d'une force d'impulsion uniforme, & d'une force centrale & accélératrice tendante au Soleil, & variable en raison de quelque fonction de leurs distances au Soleil.* Ce qui est assez marqué par la régularité des degrés d'accélération & de diminution de vîtesse, par la concavité de la courbe vers le Soleil, mais beaucoup plus par le rapport des diametres apparens, des vîtesses & des distances.

306. Les deux exceptions ou différences remarquables entre les Planetes & les Cometes, ne détruisent pas cette supposition. Car, 1°. la direction d'un mouvement d'impulsion n'étant pas nécessairement déterminée dans un sens, mais pouvant l'être dans un sens quelconque, on ne voit rien qui empêche qu'elle n'aille de droite à gauche, ou de gauche à droite, du midi au nord, du nord au midi, &c. Or comme la position du plan d'un mouvement composé d'une impulsion uniforme jointe à une force centrale, dépend uniquement de la position du point central & de la direction primitive de l'impulsion uniforme, il est clair que rien n'empêche qu'un astre n'ait un cours tout différent d'un autre, ou que rien n'assujettit le Moteur à lui donner une impulsion dans un sens plutôt que dans un autre. 2°. Si une Planete, qui n'est pas lumineuse par elle-même, & qui n'est visible par conséquent que parce qu'elle réfléchit la lumiere qui lui vient du Soleil (*voyez*, Sect. III. Ch. I. Art. VIII.) se meut dans un orbite tellement excentrique, que son diametre soit vu sous un angle infiniment petit lorsqu'elle est dans son aphélie, il est clair que ce diametre, & par conséquent la Planete, doit être invisible dans son aphélie; donc elle ne doit paroître que lorsqu'elle est vers son périhélie, & elle ne doit être visible qu'autant qu'elle n'est pas trop éloignée du Soleil, & que son diametre est vu sous un angle sensible, ou qu'elle réfléchit une assez grande quantité de lumiere pour être apperçue dans le ciel.

307. Cela posé, la supposition la plus naturelle que l'Observateur puisse faire, en attendant qu'elle soit examinée, confirmée, ou détruite par les observations, est de penser que *les Cometes se meuvent chacune dans une ellipse très-excentrique, dont le plan passe par le Soleil, qui se trouve dans un des foyers de cette ellipse; & qu'elles accélerent ou retardent leur vîtesse par les mêmes loix que les Planetes*: d'où il suit qu'il ne doit point y avoir d'autre théorie pour les Cometes que celle des Planetes.

308. Mais parce que les calculs astronomiques pour les ellipses fort excentriques sont très-longs & très-compliqués (199), & que les Cometes ne paroissent que pendant une très-petite partie du temps de leur révolution; qu'enfin la courbure d'une ellipse fort allongée est vers chacun de ses sommets, très-approchante de la courbure d'une parabole, puisque (Elem. 806) la parabole est une ellipse dont les foyers sont infiniment éloignés; il suit qu'*on peut, sans erreur sensible, prendre l'arc de l'orbite visible d'une Comete, pour une portion de parabole.*

309. En conséquence de l'hypothese que les orbites des cometes sont des ellipses de la même nature que celles des planetes, mais seulement plus excentriques, les cometes doivent avoir des retours réglés par des périodes; & par conséquent on devroit voir plusieurs fois la même comete, & prédire ensuite ses retours, avec toutes les circonstances de ses futures apparitions. C'est en effet ce qu'on seroit en état de faire sur un grand nombre de cometes, si les Astronomes des siecles précédents nous avoient laissé de bonnes observations de celles qui ont paru de leur temps. Mais comme ils étoient prévenus la plupart que les cometes n'étoient autre chose que des météores, ou corps composés de plusieurs matieres assemblées par hazard dans la région de l'air, & qui s'enflammoient & se consumoient petit à petit, en participant irrégulièrement aux mouvements de l'air dans la région où ils se trouvoient, ils ont cru qu'il étoit inutile d'en observer le cours, du moins avec quelque exactitude, & ils se sont contentés de dire qu'en telle année on a vu une comete plus ou moins grosse, parcourir dans le ciel telle ou telle constellation. Peut-être même ne nous seroit-il resté aucun monument de l'apparition des cometes, si on ne les avoit regardées comme de très-funestes présages de quelque grand malheur. Il n'y a pas encore deux cens ans qu'on a commencé à observer les cometes avec soin, & depuis ce temps-là on n'a déterminé toutes les

circonstances des mouvements que d'environ 45 cometes (*v*); il n'y a donc pas lieu de s'étonner de ce qu'on ne peut encore prédire leur retour : les temps de leurs révolutions périodiques sont très-longs, parce que leur vîtesse dans leur aphélie doit être extrêmement petite : si, par exemple, la distance d'une comete aphélie au soleil, est cent fois plus grande que sa distance périhélie, sa vîtesse angulaire dans son aphélie doit être (128) 10000 fois plus petite que dans son périhélie, & par conséquent si dans le périhélie la comete décrit un degré en un jour, elle doit être 10000 jours, ou plus de 27 ans à parcourir un degré dans son aphélie. On ne connoît encore qu'une comete dont on sache le retour avec certitude : c'est celle qui a été observée en 1531, 1607, 1682 & 1759, & qui emploie environ 76 ans (*x*) à faire sa révolution. Une autre qui paroît avoir été la même en 1532, & en 1661, & qui par conséquent pourra retourner vers 1789 (*y*). On s'assure du retour d'une comete, lorsqu'ayant calculé par la méthode qui sera expliquée dans la suite (Sect. IV. Chap. II. Art. 3.) la position & les dimensions de l'orbite de deux cometes observées, on les trouve sensiblement les mêmes. Alors l'intervalle entre les temps des passages par le périhélie donne à-peu-près le temps de la révolution de la comete, ou un multiple de ce temps; ce qu'on peut confirmer par l'histoire des apparitions des cometes dans les siecles passés.

310. De-là, on voit que le *nombre des cometes ne pourra être enfin déterminé que par une longue suite d'observations faites pendant plusieurs siecles.*

311. Comme on a vu dans le Chapitre précédent les loix des mouvements des corps dans des trajectoires coniques en général, il ne s'agit ici que de les appliquer à la parabole en particulier, & aux mouvements des cometes dans cette courbe.

ARTICLE II.

Recherche des loix particulieres des mouvements des corps dont la Trajectoire est une parabole.

312. THEOREME. *La vîtesse* u *dans un point quelconque* P *de la parabole, est à la vîtesse* V *qu'auroit un corps qui parcourroit un cercle avec une force cen-*

(*v*) En 1779, il y en a 64, en ne comptant que pour une seule les différentes apparitions d'une même comete.

(*x*) Quelquefois 75 seulement, car les attractions de Jupiter & de Saturne suffisent pour produire 20 mois de différence dans ses retours. V. la Théorie des Cometes de M. Clairaut, 1760.

(*y*) On pourroit y ajouter celle de 1264 & de 1556 qui reparoî-

trale tendante au centre de ce cercle & dant le rayon seroit égal au rayon vecteur SP, (fig. 71) *comme* $\sqrt{2}$ *à* 1, ou ce qui est le même, *comme* 2 *à* $\sqrt{2}$.

313. DEM. $u = \frac{\sqrt{4AS}}{ST}$ (272) $= \frac{\sqrt{4AS}}{\sqrt{SP \times AS}}$ (260) $= \frac{2}{\sqrt{SP}}$. Donc $uu = \frac{4}{SP}$. Mais le cercle dont SP est le rayon, est une ellipse dont le parametre est 2SP, (Elem. 801), & dans laquelle la vîtesse V est uniforme (121) : donc (272) $V = \frac{\sqrt{2SP}}{SP}$, & $VV = \frac{2SP}{SP^2} = \frac{2}{SP}$. Donc $uu : VV :: \frac{4}{SP} : \frac{2}{SP} :: 4 : 2 :: 2 : 1$. Donc $u : V :: 2 : \sqrt{2} :: \sqrt{2} : 1$.

ARTICLE III.

Recherche de la maniere de distribuer les inégalités des Cometes vues du Soleil, dans les différents points de leurs orbes paraboliques.

314. PUISQUE les cometes suivent les mêmes loix que les planetes, il est clair qu'on doit distribuer leurs inégalités dans leurs orbes, en faisant les aires que leurs rayons vecteurs décrivent, proportionnelles aux temps. On doit donc calculer leurs anomalies vraies selon le même principe que pour les planetes ; la méthode se réduit à la solution de ce problême : *Etant donnés le parametre d'une parabole, la différence des temps entre le passage de la comete par son périhélie & un instant donné, & la position du périhélie ou de l'axe de la parabole dans le ciel; trouver l'anomalie vraie de la comete ; c'est-à-dire, l'angle au soleil compris entre le lieu du*

---

tra probablement en 1848. V. Mémoires de l'Académie 1760, p. 192. Il y a aussi la Comete de 1680, que M. Halley a cru devoir reparoître en 2254. Mais ceci n'est pas sans difficulté comme je l'ai observé dans mes additions aux *Tables Astronomiques de Halley*, édition in-8°. 1759.

périhélie & le lieu de la comete pour l'instant donné, & sa distance au soleil. Je le partage en trois.

315. PROBLEME I. *Trouver une équation qui exprime la relation entre les anomalies vraies d'une comete, le temps qu'elle emploie à les décrire, & le temps qu'elle emploie à décrire 90° comptés depuis le périhélie.*

316. SOLUTION. Soit le quart du parametre ou la distance périhélie $SA = 1$, soit $= t$ la tangente de la moitié d'une anomalie vraie quelconque ASP, (fig. 73) soit $= a$ le temps employé à aller du périhélie à 90°. Soit $= b$ le temps employé à aller du périhélie au point P; l'équation cherchée est $3at + at^3 = 4b$ (ζ).

317. DEM. Du point P élevez sur la tangente la perpendiculaire PD, menez l'ordonnée PQ, & joignez PA: je dis, 1°. Que l'angle $PDA = \frac{1}{2} ASP$. Car en abaissant SN perpendiculaire sur PT, à cause du triangle isoscele PST (164), l'angle $PSN = \frac{1}{2} ASP$; or à cause des triangles rectangles semblables PSN, TPD, l'angle $PDA = NSP = \frac{1}{2} ASP$. Je dis, 2°, que $\frac{1}{2} PQ = t$; car en prenant la souperpendiculaire DQ pour rayon, PQ est la tangente de l'angle PDQ, or (Elem. 824) $DQ = 2 AS$, donc en prenant AS pour rayon, PQ est double de la tangente de l'angle PDQ, ou $PQ = 2t$: donc $\frac{1}{2} PQ = t$. Je dis, 3°, que $AQ = tt$. Car dans le triangle rectangle TPD on a (Elem. 561) ÷ QD : PQ : QT. Donc $QT = 2tt$, or (Elem. 827) $2 AQ = QT$, donc $AQ = tt$. Je dis, 4°, que l'aire du secteur parabolique ASP est $t + \frac{1}{3} t^3$; car l'aire du triangle rectangle $QAP = \frac{1}{2} PQ \times QA = t \times tt = t^3$; donc l'aire du segment $AOPA = \frac{1}{3} t^3$, puisque (Elem. 889) c'est $\frac{1}{6} PQ \times QA = \frac{1}{6}$ de $2t \times tt = \frac{1}{3} t^3$. De même l'aire du triangle APS est $\frac{1}{2} AS \times PQ = \frac{1}{2} \times 2t = t$: donc l'aire du secteur ASP est $\frac{1}{3} t^3 + t$. Je dis, 5°. que l'aire du secteur ASMOA est $\frac{4}{3}$; car elle est (Elem. 888) $\frac{2}{3}$ de $AS \times SM$, ou de 1×2, donc cette aire est $= \frac{4}{3}$. Enfin, le temps a est comme cette aire ASMOA, & le temps b

(ζ) Cette méthode fut donnée par M. Halley, dans sa Cometographie, en 1705, d'après les principes de Newton.

comme l'aire ASPOA; on a donc cette proportion $a : \frac{4}{3} :: b : t + \frac{1}{3} t^3$. D'où on tire $3at + at^3 = 4b$.

318. COROLL. I. *Etant donné les temps* a *&* b, *on a la tangente de la moitié de l'anomalie vraie* PSA, *en résolvant cette équation du troisieme degré* $t^3 + 3t = \frac{b}{\frac{1}{4}a}$. Ce qui peut se pratiquer facilement de cette maniere. Supposez un triangle ABC rectangle en A, (fig. 72) dont un côté AB soit $= 1$, & l'autre côté $AC = \frac{b}{\frac{1}{2}a}$. Calculez-en l'hypoténuse BC, & prenez (Elem. 332) deux moyennes proportionnelles entre BC + AC & BC — AC; leur différence sera la valeur de t.

319. COROLL. II. La formule $3at + at^3 = 4b$, se réduisant à $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t = \frac{b}{a}$, il suit que *si dans deux paraboles différentes on a la même anomalie vraie, les temps employés à y parvenir depuis le périhélie de chaque parabole, sont entr'eux comme les temps employés à aller du périhélie à 90°, & réciproquement.* Car si les deux anomalies vraies sont égales, $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t$ est une quantité constante, donc $\frac{b}{a}$ est alors un rapport constant des temps employés à parcourir ces anomalies vraies, aux temps employés à aller du périhélie de chaque parabole à 90°.

320. COROLL. III. Etant donnée une anomalie vraie, & le temps correspondant, on trouve celui que la comete doit employer à aller du périhélie à 90° par l'équation $a = \frac{4b}{3t + t^3}$. Si par exemple on vouloit savoir combien une comete, dont la distance périhélie seroit égale à la distance moyenne de la terre au soleil, employeroit de temps à aller du périhélie à 90°, il faudroit faire le calcul suivant.

321. La vîtesse de la terre dans sa distance moyenne est de 2′ 27″ 50‴, 5 par heure, à raison de 365 jours 6h 9′ pour une révolution entiere. Or, à distances égales du centre des forces, la vîtesse dans la parabole est à la vîtesse dans le cercle

cle comme $\sqrt{2}$ à 1 (312). Donc la vîtesse de cette comete dans son périhélie, seroit en une heure de temps de 3′ 29″ 4‴ $\frac{3}{4}$. On a donc $4b$ = 4 heures = $\frac{1}{6}$ de jour, dont le logarithme est 9,2218487; le log. de la tangente de 1′ 44″ 32‴ $\frac{3}{8}$ est 6,7048558; y ajoutant le logarithme de 3, on a 7,1819771 logarithme de $3t$. Le logarithme de t^3 est 0,1145674, ce log. comparé à celui du sinus total = 1, & qui est 10,0000000, répond à la fraction 0,0000000013, qui est si petite qu'on la peut négliger absolument : ainsi ôtant 7,1819771 de 9,2218487, on a 2,0398716 log. de 109,6154 jours, c'est la valeur de a : donc une comete, dont la distance périhélie seroit égale à la distance moyenne de la terre au soleil, employeroit 109 jours 14h 46′ 12″ à aller du périhélie à 90°.

322. PROBL. II. *Trouver une équation qui contienne la relation entre la distance périhélie d'une comete, une de ses anomalies vraies quelconques, & le rayon vecteur ou sa distance au soleil.*

323. SOLUTION. Si dans la formule du n° 210 on fait la distance aphélie = ∞ aussi-bien que l'excentricité, elle se réduira à donner pour la valeur du rayon vecteur

$$= \frac{\text{dist. périh.}}{\cos^2 \frac{1}{2} \text{anom. vraie}}.$$

324. COROLL. *Si dans différentes paraboles on a une même anomalie vraie, les rayons vecteurs qui y répondent sont comme les distances périhélies.* Puisque l'anomalie vraie devient une quantité constante dans cette formule.

325. PROBL. III. *Déterminer toutes les distances périhélies de différentes cometes sur une même échelle, telle, par exemple, que la distance moyenne de la terre au soleil soit l'unité.*

326. SOLUTION. Faites cette analogie : *comme* 109 *jours* 14h 46″ 12″, *sont au temps que la comete a employé à aller du périhélie à* 90°; *ainsi l'unité est à la racine quarrée du cube de la distance périhélie qu'on cherche.*

327. DEM. Le temps employé par une comete à aller du périhélie à 90°, est comme le temps qu'elle auroit employé à décrire autour du soleil comme centre, un cercle dont le rayon p seroit égal à sa distance périhélie : puisque

les temps sont toujours dans le rapport des aires, & qu'en faisant A S = p (fig. 73), l'aire A S M O A est (Elem. 888) $\frac{4pp}{3}$, & par conséquent comme pp (70), aussi bien que l'aire du cercle dont A S seroit le rayon : or (278) le temps de la révolution dans un cercle est comme la racine quarrée du cube du rayon, donc le temps qu'emploie une comete pour aller du périhélie à 90° est comme $\sqrt{p^3}$. Donc si on veut déterminer la mesure de la distance périhélie d'une comete en parties telles que la distance moyenne de la terre au soleil est = 1, il faut dire : comme 109,6154 jours, (temps du passage du périhélie à 90° dans une parabole dont la distance périhélie seroit égale à la distance moyenne de la terre au soleil), sont au temps que la comete donnée a employé à aller du périhélie à 90° : ainsi 1, (car $\sqrt{1^3} = 1$), est à $\sqrt{p^3}$.

328. COROLL. Il suit de-là & des démonstrations précédentes, que *si on a calculé les anomalies vraies dans une parabole quelconque, on pourra s'en servir pour toutes sortes de cometes dont les distances périhélies seront données.*

329. Car quand les anomalies vraies sont les mêmes dans différentes paraboles, les rayons vecteurs d, sont comme les distances périhélies p (324); & par conséquent (Elem. 308) les $\sqrt{d^3}$ sont comme les $\sqrt{p^3}$. Or (325) les $\sqrt{p^3}$ sont comme les temps employés à aller du périhélie à 90° : & (319) ces temps, quand les anomalies vraies sont les mêmes, sont comme les temps employés à parvenir du périhélie à ces anomalies : donc quand les anomalies vraies sont les mêmes dans différentes paraboles, les $\sqrt{p^3}$ sont comme les temps employés à aller du périhélie à ces anomalies vraies. Donc si par le moyen de l'équation $3at + at^3 = 4b$, on a construit une Table (*a*) de toutes les anomalies vraies, qui répondent à chaque jour depuis le passage d'une comete par le périhélie dans une parabole

(*a*) Voyez à la fin de la IIIe Section après l'art. 856. Il y a une Table beaucoup plus ample dans mon *Astronomie*. L'idée de ces Tables est tirée de M. Halley, mais la forme en est un peu plus simple.

telle, par exemple, que la distance moyenne de la terre au soleil supposée = 1, soit égale à la distance périhélie, on pourra s'en servir pour trouver toutes les anomalies vraies d'une autre comete, en faisant cette analogie : *Comme la racine quarrée du cube de la distance périhélie de la comete donnée, est à l'unité; ainsi le temps compris entre le passage de cette comete par son périhélie & un instant quelconque, est au temps que la comete dont on a calculé la Table, a employé à parvenir à la même anomalie vraie.*

SECONDE SECTION,

Qui contient la premiere Partie de l'Astronomie Terrestre :

OU

L'explication des principaux Phénomenes Célestes vus de la Terre.

330. L'OBSERVATEUR ayant passé du centre du Soleil sur la surface de la Terre, y remarquera d'abord les deux Phénomenes généraux qui suivent.

331. PHENOMENE I. *Le ciel paroît comme une sphere dont l'œil de l'Observateur est au centre. Quoique cet œil soit sur la surface de la terre, il ne voit cependant que la moitié du ciel, & sa vue qui ne s'étend pas bien loin sur la surface de la terre, paroît terminée en cercle de tout côté.*

332. Ce phénomene est facile à expliquer. 1°. Le ciel paroît une sphere, dont l'œil qui est sur la surface de la terre paroît être le centre : c'est par la même raison que le ciel vu du soleil, paroît être une sphere dont le soleil est le centre (3). Tout point pris dans l'univers doit paroître à un œil qui y est placé, le centre d'une sphere concave dont tous les objets visibles qui remplissent l'Univers doivent paroître à la circonférence.

333. 2°. Si on imagine un plan indéfini passant par un

œil qui paroît au centre d'une ſphere, ce plan doit partager cette ſphere en deux hémiſpheres égaux en apparence, & la ſection de la circonférence de la ſphere par ce plan, doit paroître un des grands cercles de la ſphere (Elem. 667). Or l'œil étant en O (fig. 36) ſur la ſurface même de la terre CNL qui eſt ronde, les rayons viſuels OP, OQ, par leſquels on regarde tout autour de ſoi ſont des tangentes à cette ſurface, & par conſéquent ils forment un plan tangent & indéfini, (qu'on appelle *le plan de l'horizon de l'Obſervateur*) qui partage le ciel en deux hémiſpheres égaux, dont l'un qui eſt vers la tête de l'Obſervateur, eſt perpétuellement viſible; & l'autré qui eſt vers les pieds, eſt toujours inviſible à cauſe de l'opacité de la terre; car tant que l'œil ſera en O, il ne pourra recevoir les rayons de lumiere qui ſont au-deſſous de OP ou OQ. Ainſi non-ſeulement on ne doit voir que la moitié du ciel à la fois, mais encore on ne peut voir des objets terreſtres, que ceux qui ſe trouvent confondus avec le plan tangent QOP.

334. C'eſt par la même raiſon que les objets qui ſont ſur la ſurface de la terre, ne peuvent ſe voir de fort loin, à moins que l'œil ne ſoit élevé comme en M; car alors les rayons tangents MN, ML bornent la vue, qui devient beaucoup plus étendue, & ils forment un cône dnnt l'œil eſt au ſommet. Dans ce même cas on voit auſſi plus de la moitié du ciel. Il ſe peut faire encore que l'œil ſoit ſitué dans un lieu enfoncé, ou entouré d'objets élevés qui l'empêchent de voir la moitié du ciel. Ainſi les *inégalités de la ſurface de la terre, ſont cauſe que la vue ne paroît pas toujours bornée dans le ciel par un grand cercle de la ſphere.*

335. Cependant comme l'horizon eſt le terme le plus ſenſible, auquel on puiſſe rapporter les mouvements céleſtes, il en faut diſtinguer de deux ſortes. L'un s'appellera l'*horizon ſenſible*, & ce ſera la courbe qui bornera la vue dans le ciel de quelque maniere que l'œil ſoit ſitué; & l'autre, *horizon rationel*, & ce ſera un grand cercle de la ſphere céleſte apparente, dont le centre ſera dans l'œil de l'Obſervateur, & dont le plan ſera tangent à la ſurface de la

terre, divisera la sphere céleste apparente en deux hémispheres égaux, & servira de terme d'élévation ou d'abaissement des objets célestes, en sorte que ceux qui seront dans l'hémisphere supérieur ou visible, seront appellés *hauts* ou *élevés* sur l'horizon; & que ceux qui seront dans l'autre hémisphere, seront appellés *bas* ou *abaissés* sous l'horizon rationel, que nous nommerons toujours simplement l'*horizon*.

336. Cela posé, si par le centre C de la terre, & par le point O où est l'œil de l'Observateur, on tire un rayon indéfini COZ, il sera perpendiculaire à l'horizon rationel, dont le plan touche la terre au point O, & le point Z du ciel où il paroîtra aboutir, sera précisément au-dessus de l'œil, & également éloigné de tous les points de la circonférence de l'horizon rationel. La droite OZ fera partout (Elem. 624) un angle droit avec le plan de l'horizon rationel. Ainsi le point Z sera (Trig. 2) le pole de cet horizon, & s'appellera le *Zénith*.

337. Ce point doit avoir plusieurs usages importants. I°. Il doit servir à distinguer de combien un point quelconque pris dans l'horizon sensible, est éloigné de l'horizon rationel. Car en mesurant l'angle à l'œil compris entre le Zénith & ce point, si cet angle est de 90°, le point est en même-temps dans les deux horizons; mais s'il est plus ou moins grand d'une certaine quantité, le point est d'autant au-dessous ou au-dessus de l'horizon rationel.

338. II°. Plus l'angle à l'œil entre le zénith & un rayon dirigé à un astre quelconque sera grand ou petit, plus cet astre paroîtra près ou loin de l'horizon, & par conséquent moins ou plus haut : en sorte que le zénith est le terme de la plus grande hauteur possible; & qu'en général *la hauteur d'un astre est mesurée ou par l'arc céleste qu'on imagine mené de l'astre perpendiculairement sur l'horizon, ou par le complément de l'arc céleste compris entre le zénith & cet astre.*

339. III°. Tant qu'un Observateur reste en la même place, son horizon & son zénith restent fixes dans le ciel; mais aussi-tôt qu'il change de place, son horizon doit tou-

cher la terre en un autre point que le précédent; la ligne de son zénith qui passe par ce nouveau point, fait un angle au centre de la terre avec celle du zénith précédent, & par conséquent elle répond dans le ciel à un autre point que devant : & ces deux horizons sont inclinés l'un à l'autre, selon un angle qui se peut mesurer dans le ciel par l'arc compris entre les deux zéniths (Trig. 18).

340. PHENOMENE II. *Tous les astres paroissent avoir différents mouvements. Car d'abord tous, tant étoiles que planetes, cometes, le soleil même, paroissent chaque jour faire un tour entier autour de la terre dans des cercles fort inégaux, quoique sensiblement paralleles; puisqu'il y en a qui décrivent des cercles si petits qu'ils paroissent immobiles, & que d'autres en décrivent de très-grands avec une grande vîtesse. Chaque étoile fixe paroît toujours décrire un même cercle; mais le soleil & les planetes paroissent tantôt en décrire de grands, tantôt de petits, tantôt des cercles qui s'élevent peu sur l'horizon, tantôt d'autres qui s'élevent beaucoup. Enfin, les planetes paroissent tantôt dans une même position fixe à l'égard des étoiles, tantôt s'en approcher dans un sens, tantôt en sens contraire, &c.*

341. Ces apparences doivent n'être que des illusions optiques causées par les deux mouvements réels de la terre, l'un de révolution annuelle autour du soleil, & l'autre de rotation diurne sur son axe. Car si un homme demeure fixe dans un vaisseau qui l'emporte uniformément, & qui lui fait suivre tous les différents mouvements qui peuvent être imprimés à ce vaisseau, on sait par expérience que cet homme est naturellement porté à croire que ce vaisseau est immobile, & que ce sont les objets voisins & hors du vaisseau qui sont mus en sens opposé.

342. Cette illusion est d'autant plus forte que le vaisseau est plus grand. Car alors toutes les parties de ce vaisseau qui environnent cet homme en grand nombre, & à différentes distances de son œil, à l'égard duquel elles gardent toujours une même position, toutes ces parties, dis-je, ne doivent paroître ni changer ni se mouvoir. En effet, cet homme étant supposé ne donner à sa tête aucun

mouvement particulier, les images que toutes les parties du vaiſſeau qu'il peut voir, forment au fond de ſon œil, n'y changent pas de place, & elles occupent toujours les mêmes points de ſon organe : par conſéquent les parties de ce vaiſſeau doivent non-ſeulement paroître réellement fixes, mais même propres à y comparer les autres objets viſibles, pour voir s'ils ſont fixes auſſi. Or à cauſe du mouvement réel du vaiſſeau tout entier, tous les objets qui ſont fixes au-dehors doivent à tout moment changer de diſtance & de ſituation par rapport à l'œil de cet homme. Donc les images que ces objets forment dans ſon œil parcourent ſucceſſivement différents points de cet organe ; donc ce ſont ces objets qui doivent paroître avoir tous les mouvements du vaiſſeau. De ſorte que cet homme ne pourroit ſe déſabuſer de ce faux jugement, s'il s'en tenoit à ſa ſenſation ſeule, & ſi par des raiſonnements Géométriques, il ne forçoit ſon jugement à conclure le contraire de ce qu'il voit.

343. L'Obſervateur étant perſuadé que la terre où il eſt a deux mouvements réels, l'un par lequel elle décrit en un an une orbite elliptique autour du ſoleil, & l'autre par lequel elle fait un tour ſur ſon axe en un jour, il ne peut héſiter à décider que la terre ne ſoit à ſon égard ce qu'eſt le vaiſſeau à l'égard de l'homme dont nous venons de parler ; & que la quantité d'objets qui ſont ſur l'horizon ſenſible, & qui n'ont d'autre mouvement que celui de la terre, auſſi-bien que l'œil de l'Obſervateur, ne doive changer ces apparences en préjugés de réalité.

344. Cela poſé, l'Obſervateur doit démêler les effets de trois cauſes d'illuſions qui affectent tous les mouvements céleſtes vus de deſſus la ſurface de la terre. La premiere, de ce que l'Obſervateur paroît en repos, tandis qu'il fait réellement une révolution chaque jour. La ſeconde, de ce qu'il paroît en repos, tandis qu'entraîné par la terre il décrit réellement une grande orbite autour du ſoleil en un an ; & la troiſieme, de ce qu'il s'imagine être au centre des cercles qu'il voit décrire aux aſtres chaque jour autour de la terre, tandis que ce centre eſt réellement dans l'axe de la terre.

CHAPITRE I.

Des illusions optiques causées par la révolution diurne de la Terre.

ARTICLE I.

De la cause & de la nature des rotations ou révolutions diurnes des planetes.

345. PUISQUE les loix de la Méchanique doivent servir à découvrir la cause de la rotation des corps terrestres qui se trouvent souvent jointe avec leur mouvement progressif, nous pouvons les employer pour raisonner de même par analogie sur la rotation des corps célestes.

346. Supposons un globe de matiere homogene, également dense, parfaitement rond, & placé dans un milieu entiérement libre. On peut faire abstraction de sa pesanteur, qui n'est qu'un chose accidentelle, ou qui n'est que l'effet d'une force centrale imprimée au globe ; mais on ne peut se dispenser d'y admettre une inertie proportionnée au nombre des molécules qui composent la masse du globe, parce que l'inertie est une qualité inhérente à tout ce qui est matiere.

347. THEOREME I. *Un point* A *quelconque* (fig. 40) *autre que le centre* C *du globe supposé, ayant reçu une impression instantanée quelconque selon une direction quelconque* K A, *le globe prendra aussi-tôt deux mouvements uniformes, l'un de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du grand cercle de ce globe qui passera par la direction* K A, *l'autre de progression ou de translation, en sorte que le centre du globe décrira dans le plan du même grand cercle une droite* C b *parallele à la direction* K A.

348. DEM. Il est évident qu'à cause de la cohésion de toutes les parties du globe, chacune des molécules qui le

composent doit se ressentir de l'impression faite sur le point A, De quelque maniere que l'effet s'en distribue, chacune doit tendre à s'avancer dans une droite parallele à KA, en sorte que toutes les molécules qui seront dans une même corde du globe parallele à KA doivent avoir une même vîtesse, puisque pour procurer à une droite un mouvement dans la direction de cette même droite, le point où il faut appliquer la force motrice est absolument indéterminé, parce qu'un point de cette droite ne peut s'avancer dans la direction qu'elle a, que tous les autres ne s'avancent également & en même temps (*b*).

349. Cela posé, si on tire à travers du globe la corde K*k* selon la direction KA, & si sur le plan du grand cercle qui est déterminé par cette direction, on mene les diametres B*b*, D*d*, l'un parallele, l'autre perpendiculaire à cette corde, enfin, si on suppose un plan K*k* perpendiculaire à l'axe D*d*, on verra évidemment, que ce plan divisant le globe en deux portions K*dk*, KD*k* inégales en masse, & par conséquent en inertie ou résistance, l'impression faite en A ne peut se distribuer entre ces deux portions de sorte que les molécules qui les composent reçoivent chacune une égale vîtesse. Mais si on suppose que l'inertie de la portion KD*k* soit toute concentrée au point H, & celle de la portion K*dk* au point G; (selon les loix de la Méchanique, $DH : aD :: 2CB - \frac{3}{4}aD : 3CB - aD$, & $dG : ad :: 2CB - \frac{3}{4}ad : 3CB - ad$); alors on pourra regarder la portion d'axe HG comme un levier aux deux extrémités H & G duquel sont deux masses en équilibre sur le point d'appui C, qui est le point de réunion de l'inertie de toutes les molécules du globe, & l'impression faite sur le point A, comme une puissance qui agit sur ce levier dans la direction A*a*, qui ne passe pas par le point d'appui C. Or l'effet de cette impression est le même que si cette puissance agissoit immédiatement sur le point *a* du levier HG; puisqu'en quelque point de la ligne K*k*

(*b*) C'est de-là que je conclus le déplacement réel du Soleil & de tout le systême planetaire, Mémoires de l'Académie 1776, p. 513.

qu'elle s'exerce, la vîtesse des points H, C, G sera toujours la même dans leurs cordes respectives paralleles à K *k*. On peut donc regarder l'effort fait sur le point A comme celui qui seroit fait sur un levier HG en un point *a* différent du point C sur lequel il est en équilibre, & par conséquent selon les loix de la Méchanique cet effort ne peut communiquer un même mouvement aux masses H & G, il en doit communiquer davantage à celle qui a moins d'inertie, & la distribution du mouvement communiqué est telle que la part qu'en acquiert la masse ou le point H, est à la part du point G, réciproquement comme le produit de la masse H × H*a*, est à la masse G × *a* G. Ainsi en un instant infiniment petit *t* le point H décrira un plus grand espace H *h* dans une direction parallele à K *k*, que ne sera l'espace G *g* dans une parallele à la même droite K *k*. Donc à la fin de cet instant *t* le levier HG sera dans la position *h g*, & par conséquent l'axe D *d* sera placé en E *e*, & tout le globe sera dans la position E I *e* : & parce que le centre C est dans la droite qui joint les points H, G, ce centre sera en *c* à la fin de l'instant *t*. Ainsi le centre C se sera avancé uniformément dans le plan du grand cercle B D *b d* selon la droite C *c* parallele à K *k*; mais le point *h* sera en avant à son égard, & le point *g* sera en arriere. D'où il suit évidemment que la droite HG aura tourné autour du point C, & que si par *c* on tire F *f* parallele à D *d* position de l'axe au commencement de l'instant *t*, l'angle F *c h* exprime la vîtesse angulaire de la rotation du point *h* à l'égard de *c* pendant le temps *t*, & l'angle *f c* G qui lui est égal, exprime la vîtesse angulaire de la rotation du point *g* à l'égard de *c* dans le même temps. On voit enfin que ce mouvement continuant de la sorte pendant chacun des instants égaux qui suivent le premier instant *t*, il en résulte, 1°. que le centre du globe doit s'avancer toujours uniformément & en ligne droite dans la direction C *b* parallele à celle de l'effort fait sur le point A : 2°, que ce mouvement de translation doit se faire dans le plan du grand cercle B D *b d* déterminé par la position de la direction KA de l'impression : 3°, que l'axe D *d*

doit tourner uniformément dans ce même plan B D *b d*, & que par la cohésion mutuelle des molécules du globe, ces molécules doivent tourner toutes uniformément dans ce plan ou dans des plans paralleles, ou ce qui revient au même, elles doivent tourner autour de l'axe du globe, qui est perpendiculaire au plan B D *b d*. On appelle cet axe, l'*axe de rotation*.

350. COROLL. I. Le mouvement C *c* de translation du centre est rectiligne & simple ; mais celui de toutes les autres molécules du globe est la somme ou la différence de deux mouvements l'un rectiligne uniforme, dont la vîtesse fait parcourir en temps égaux des espaces paralleles, & égaux à ceux que décrit le centre C qui emporte tout le globe, & l'autre de rotation uniforme dont la vîtesse fait parcourir des espaces proportionnés à la distance de la molécule au centre C. Ainsi H *h* qui exprime le mouvement du point H pendant l'instant *t*, est $=$ C *c* $+$ F *h* ; & G *g* qui représente le mouvement du point G, est $=$ C *c* $-$ *g f*. Or à cause de la petitesse des angles F *c h*, *f c g*, les droites F *h*, *g f* peuvent être prises pour les arcs qui mesurent ces angles : ainsi, rigoureusement parlant, les espaces parcourus réellement par les molécules du globe, sont la somme ou la différence d'un espace rectiligne partout égal & d'un arc de cercle par-tout semblable.

351. COROLL. II. Le mouvement de rotation n'est qu'un mouvement relatif au centre du globe, ou pour mieux dire à l'axe de rotation, & l'on conçoit que *tant qu'aucune des molécules d'un globe ne recevra ni plus ni moins de vîtesse que les molécules qui sont dans l'axe de rotation, la rotation ni son axe ne peuvent subir aucune altération.*

352. COROLL. III. *Plus la direction dans laquelle se fait l'impression passe loin du centre du globe, plus le mouvement de rotation est prompt.*

353. COROLL. IV. Si la direction d'une impression reçue par un point quelconque L du globe, tendoit au centre C, alors il est évident que le plan B *b* qui passeroit par cette direction, couperoit le globe en deux hémis-

pheres égaux BD*b*, B*db* : que l'impreſſion faite ſur le point L, ſeroit comme ſi elle eût été faite immédiatement ſur le centre C, qui eſt le point d'appui d'un levier qui ſeroit alors cenſé chargé de deux maſſes égales, & également éloignées du point C : (ſelon les loix de la méchanique, cette diſtance eſt égale aux $\frac{3}{8}$ du rayon). Cette impreſſion ſe diſtribueroit donc également ſur tout le levier, & par conſéquent ſur chaque hémiſphere dont toutes les molécules tendroient à s'avancer avec une même vîteſſe dans des lignes paralleles à L C. Il n'y auroit donc alors aucune rotation dans ce globe, & ſon centre ſe mouvroit uniformément dans la direction C*b* de l'impreſſion reçue.

354. SCHOLIE. Il y a lieu de préſumer que dans la projection primitive des planetes dans la ſphere d'activité du ſoleil, l'impreſſion qui leur a été donnée n'a pas paſſé par leur centre. M. Jean Bernouilli a calculé (voyez Tome IV. de ſes Œuvres, page 283), que la diſtance à laquelle l'impreſſion donnée primitivement à la terre, a dû paſſer par rapport à ſon centre, eſt de $\frac{1}{150}$ du demi-diametre de la terre. Il trouve de même pour Mars $\frac{1}{418}$ de ſon demi-diametre, & pour Jupiter $\frac{7}{19}$ de ſon demi-diametre. Il eſt vrai qu'à l'égard des corps terreſtres, ceux qui ſont frappés dans des directions qui paſſent par leur centre, acquierent ſouvent un mouvement de rotation; mais c'eſt ou par le frottement des aſpérités de leurs ſurfaces ſur les aſpérités des ſurfaces ſur leſquelles ils n'auroient que coulé ou gliſſé ſans ce frottement, ou bien c'eſt par le choc des aſpérités des ſurfaces de ces corps contre les parties du milieu réſiſtant dans lequel ils ſe meuvent. Il ne paroît pas que la rotation des planetes ſoit cauſée par de ſemblables frottements ou chocs, puiſque leurs mouvements ſe font dans un milieu qui ne leur oppoſe aucune réſiſtance ſenſible.

355. THEOREME II. *Un globe étant animé d'un mouvement de rotation joint à un mouvement de progreſſion ou de tranſlation, toute impreſſion que pourra recevoir un de ſes points quelconque dans une direction qui paſſe par le centre, ne pourra qu'accélérer, retarder ou arrêter le mouvement de tranſlation, ſans altérer en aucune maniere le mouve-*

ment de rotation, ni changer la position de l'axe de rotation.

356. DEM. Toute impression dont la direction passe par le centre d'un globe, ne peut donner des vîtesses inégales à ses molécules ; elle ne peut (349) que leur procurer une tendance égale à se mouvoir avec une même vîtesse dans des directions paralleles à celles de cette impression. Or cette tendance se composant avec celle des deux tendances de chaque molécule du globe qui est aussi toujours égale & dans des directions paralleles à la premiere impression, il ne peut en résulter qu'une vîtesse plus grande, ou plus petite, ou nulle ; de sorte qu'en vertu de cette composition de mouvements, aucune molécule ne peut avoir plus de vîtesse que l'autre ; donc (351) par cette composition la rotation ni son axe n'ont subi aucune variation, donc il n'y a que le mouvement de translation qui en ait été affecté.

357. SCHOLIE. Nous pourrions compliquer cette théorie en considérant divers efforts faits à la fois sur des points d'un globe différents du centre ; mais comme l'application n'a pas lieu dans l'Astronomie élémentaire, il suffira de faire remarquer, 1°, qu'on peut faire précisément les mêmes raisonnements que ci-dessus, pour un globe, qui au-lieu d'être par-tout également dense, auroit des couches concentriques d'inégale densité, ou qui, au-lieu d'être parfaitement rond, seroit un sphéroïde formé par la révolution d'une courbe symmétrique sur un de ses axes, telle qu'est l'ellipse, pourvu que la direction de l'impression soit dans le plan des axes, & parallele à l'un des deux. 2°, Que les rotations dans le globe parfait & dans les sphéroïdes symmétriques, ne peuvent être altérées par aucune variation dans les forces qui agissent sur leur centre ; & qu'ainsi *l'effet des variations dans les forces centrales des planetes, n'est que de leur faire décrire des trajectoires curvilignes, avec des vîtesses inégales, sans altérer l'uniformité de leurs révolutions diurnes.* 3°, Que cependant lorsque les plans dans lesquels les forces centrales agissent, ne sont pas perpendiculaires à l'axe de rotation des corps sphé-

roïdiques, la poſition de cet axe de rotation devient ſujette à quelques variations, comme on le verra dans la ſuite, à l'occaſion de la théorie de la lune (*c*).

ARTICLE II.

Recherche des Phénomenes généraux cauſés par le mouvement diurne de la Terre.

358. PUISQUE la terre tourne chaque jour ſur ſon axe, tous les point qui ſont ſur ſa ſurface ſe préſentent ſucceſſivement vers une même région du ciel, & décrivent réellement des cercles dont les plans ſont perpendiculaires à cet axe, & dont tous les centres ſont dans cet axe : d'où il ſuit que tous ces plans ſont paralleles entr'eux, & qu'ils ſont tels que nous avons ſuppoſé les Eléments d'une ſphere (Elem. 661). Donc, I°. Puiſque l'on attribue naturellement aux aſtres le mouvement réel de l'œil qui les regarde, *tous les aſtres doivent paroître venir ſe préſenter ſucceſſivement à un œil placé ſur la terre, & ils doivent paroître tourner chaque jour uniformément autour de l'axe de la terre prolongé juſques dans le ciel, & dans des cercles paralleles, comme s'il étoient dans la concavité d'une ſphere concentrique à la terre.*

359. Les deux points qui ſont aux extrêmités de l'axe de la terre ſur lequel elle tourne chaque jour, ſont les ſeuls qui ne participent pas à ſon mouvement diurne, & tous les autres points de la ſurface de la terre doivent décrire des cercles d'autant plus grands, qu'ils ſont plus éloignés de ces points fixes ou *Poles*, en ſorte que le cercle qui eſt au milieu entre ces deux points fixes (& qu'on appelle l'*Equateur*) eſt le plus grand de tous, & qu'à égale diſtance de

---

(*c*) C'eſt l'objet du Traité de la préceſſion des Equinoxes, par M. d'Alembert 1749, & de la piece de M. de la Grange, ſur la libration de la lune, qui a remporté le prix de l'Académie, en 1764; elle eſt dans le IXe Volume des Pieces des prix qui eſt le dernier de cette collection intéreſſante.

part & d'autre de cet Equateur, les cercles paralleles ſont égaux. Les rayons de tous ces cercles ſont les ſinus des arcs qui meſurent leur diſtance au Pole le plus proche, ou les coſinus des arcs qui meſurent leur diſtance à l'Equateur.

360. Et parce que tous les points de la ſurface de la terre font en un même temps, c'eſt-à-dire, en un jour, une révolution entiere, les vîteſſes de chacun ſont (64) comme les eſpaces ou comme les circonférences qu'ils decrivent, ou comme leurs rayons.

361. Donc, II°. *Il y a dans le ciel deux points* P, Q, (fig. 41) *qui doivent paroître fixes, dans leſquels une Etoile étant placée doit n'avoir aucun mouvement apparent; ces deux points qui ſont déterminés dans le ciel par le prolongement de l'axe* p q *de la terre* p e q z, *ſont les poles d'un grand cercle de la ſphere céleſte* E Z Z *déterminé dans le ciel par le prolongement du plan de l'Equateur terreſtre* e z z; *& tous les aſtres doivent paroître tourner autour de ces deux poles*, P, Q, *ou plutôt autour de l'axe* P Q, *avec des vîteſſes qui ſont entr'elles comme les rayons des cercles qu'ils décrivent.*

362. Pour expliquer méthodiquement les autres phénomenes, on appellera pole *Arctique*, *Boréal*, ou *Septentrional*, le pole P qui répond au Nord des Européens, & qui eſt dans le ciel vers la conſtellation de la petite ourſe; & pole *Antarctique*, *Auſtral* ou *Méridional*, le pole Q, qui eſt à l'oppoſite vers le Midi des Européens.

363. Le cercle de la ſphere céleſte décrit en apparence par un aſtre quelconque en 24 heures, s'appelle le *parallele* de cet aſtre, & l'on appelle *déclinaiſon* d'un aſtre ou d'un parallele, l'arc de grand cercle qui meſure la diſtance de cet aſtre ou de ce parallele à l'équateur céleſte. Si l'aſtre eſt du côté du pole boréal P, ſa déclinaiſon eſt *boréale*; s'il eſt du côte du pole auſtral Q, ſa déclinaiſon eſt *Auſtrale*.

364. Si par le centre C de la terre, & par un point *m* quelconque de ſa ſurface, on ſuppoſe une droite C *m* prolongée juſques en M dans le Ciel, ſon extrêmité y décrira, par la révolution diurne de la terre, un parallele L M M L, qui répondra au parallele terreſtre *l m m l* du point *m*. Et

si on suppose CM prolongée de l'autre côté jusqu'au ciel en T, cette extrêmité T y décrira un parallele TTVV égal au parallele LMML, ayant même déclinaison, & répondant au parallele terrestre *ttuu*.

365. Il suit de-là, 1°. Qu'un parallele céleste LMML, & son correspondant *lmml* sur la terre, sont deux cercles paralleles, & des Eléments semblables d'un cône dont l'axe est le même que celui de la terre prolongé dans le ciel, & dont le sommet C est au centre de la terre. Donc *le plan d'un parallele céleste ne peut être le même que celui de son parallele terrestre correspondant; il n'y a que l'équateur céleste, dont le plan* EZZ *est le même que le plan* ezz *de l'équateur terrestre*, parce que ces deux plans sont formés par un même rayon CZ, perpendiculaire à l'axe de rotation PQ.

366. 2°. Si on suppose que l'Observateur soit placé en *m* sur la surface de la terre, le parallele terrestre qu'il décrira réellement chaque jour sera *lmml*; mais comme il est porté à se croire fixe sur la terre, son zénith paroîtra fixe dans le ciel en M, en sorte que tous les points qui sont sur le parallele céleste LMML viendront successivement passer par ce zénith pendant la révolution diurne apparente du ciel. Si donc on reconnoît l'équateur céleste par les étoiles qui y sont placées, & si on mesure l'arc céleste compris entre une étoile qui passe au zénith & l'équateur céleste, on aura en même-temps l'arc *mz* de la distance de l'Observateur à l'équateur terrestre. Donc *l'arc de la distance d'un Observateur à l'équateur terrestre, est égal à la déclinaison de l'astre qui passe par son zénith.* De sorte que si cet astre est une étoile fixe, & si l'Observateur change de place, il connoîtra de combien de degrés il s'est approché ou éloigné de l'équateur par la différence des distances de cette étoile au zénith des différents lieux où il se sera trouvé.

367. Il suit enfin, que *le point de la sphere céleste qui répond actuellement au zénith d'un lieu terrestre quelconque, peut représenter ce lieu, en sorte qu'on peut toujours désigner un lieu de la terre par le point du ciel qui est à son zénith.* Car

Car le parallele céleste qui passe par ce point, représente le parallele terrestre de ce lieu, la déclinaison de ce parallele céleste mesure la distance de ce lieu à l'équateur, & le grand cercle de la sphere céleste décrit de ce zénith comme pole, désigne le plan de l'horizon de ce lieu.

368. C'est pour cela qu'il nous arrivera souvent dans la suite d'expliquer les phénomenes particuliers à un lieu terrestre, sans le désigner autrement que par le point de son zénith dans le ciel.

ARTICLE III.

Recherche des mouvements apparents du Soleil, causés par les deux mouvements réels de la Terre.

369. COMME le Soleil est le centre des mouvements annuels des astres, il est bon d'examiner quels sont tous ses mouvements apparents, avant que de passer plus loin.

370. Le soleil étant fixe, tandis que la terre tourne réellement autour de son axe en un jour, & autour du soleil en un an, le mouvement apparent du soleil doit être compliqué d'un mouvement diurne apparent autour de l'axe de l'équateur de la terre, & d'un mouvement annuel apparent autour de la terre dans le plan de l'orbite de la terre : il doit paroître s'approcher ou s'éloigner de la terre à proportion que la terre s'en approche ou s'en éloigne réellement.

371. Pour expliquer le mouvement annuel apparent, du centre S du soleil (fig. 37) soit décrit dans le plan de l'orbite de la terre avec un rayon infiniment grand, un cercle AMPN, partagé en douze parties égales pour les douze signes du Zodiaque. Soit *a m p n* l'orbite elliptique de la terre, dont un des foyers est en S. A cause du rayon infini, les diametres de l'orbite de la terre sont comme infiniment petits, & par conséquent on peut prendre tous les points de cette orbite *a m p n*, pour le centre du cercle AMPN.

372. Cela posé, la terre étant aphélie en *a*, si on tire la droite *a*S A, le soleil doit paroître répondre dans le ciel au point opposé A, ou éloigné de six signes. Ensuite la terre étant venue quelque temps après au point *m*, le soleil paroît répondre au point M, & par conséquent le soleil doit avoir paru parcourir l'arc A M dans cet intervalle. De même, la terre étant arrivée en *p* à son périhélie, le soleil paroît être en P dans un point éloigné de 6 signes, & ainsi de suite. On voit donc que le soleil paroît parcourir les arcs AM, MP, PN, NA, dans le même temps, & à proportion que la terre parcourt réellement les arcs *am*, *mp*, *pn*, *na*, de son ellipse. Et parce que la terre décrit ces arcs avec des vîtesses inégales, & en changeant à tout moment de distance au soleil, le soleil paroît décrire les arcs de cercle AM, MP, PN, NA, avec les mêmes vîtesses inégales, & son diametre paroît croître & décroître à mesure que la terre s'en approche ou s'en éloigne, ce qui fait paroître que c'est le soleil qui s'approche ou qui s'éloigne de la terre.

373. Il suit delà en général, 1°. Que *tant qu'il ne s'agira que des points du ciel auxquels le soleil paroît répondre, on peut supposer qu'il se meut réellement dans le cercle infiniment grand* P M A N, (*que nous appellerons dans la suite* l'Ecliptique) *dont le centre est toujours dans l'œil de l'Observateur. Ainsi l'ellipse que la terre parcourt réellement ne doit servir qu'à determiner les rapports des différentes distances de la terre au soleil à un instant donné, & la vraie direction du rayon visuel terminé au centre du soleil.* Par exemple, la terre ayant été de *a* en *b*, le soleil aura paru parcourir l'arc de l'écliptique AB; mais ce sera l'angle *p* S *b* de l'anomalie vraie de la terre dans son ellipse, qui déterminera l'angle P S B de l'anomalie vraie du soleil dans l'écliptique : & la longueur de la droite *b* S représentera la vraie distance de la terre au soleil. Tout ceci doit s'entendre aussi des orbites elliptiques des planetes, & des orbites paraboliques des cometes, lesquelles étant rapportées au fond du ciel, peuvent être censées des grands cercles de la sphere.

374. II°. Qu'*étant connu*, par obſervation ou par calcul, *le vrai lieu de la terre dans ſon orbite, en y ajoutant ou en ôtant ſix ſignes, on a le vrai lieu du ſoleil dans l'écliptique*; & qu'ainſi la théorie des mouvements du ſoleil vu de la terre, eſt préciſément la même que celle des mouvements de la terre vue du ſoleil; & comme il n'y a pas d'autre cauſe d'illuſion qui puiſſe faire attribuer au ſoleil un autre mouvement annuel que celui de la terre, on parlera toujours dans la ſuite du mouvement du ſoleil dans l'écliptique comme s'il étoit réel.

375. III°. *Que puiſque le mouvement annuel de la terre ſe fait dans le plan de l'écliptique, par rapport à un habitant de la terre, le plan de l'écliptique eſt celui auquel il doit naturellement rapporter les meſures des mouvements annuels des planetes & des cometes dans leurs différentes orbites*, de même que le plan de l'équateur eſt celui auquel on doit rapporter naturellement les phénomenes & les circonſtances des mouvements diurnes qui paroiſſent animer les aſtres en vertu de la rotation de la terre, qui ſe fait dans ce plan ou parallélement à ce plan.

376. Pour combiner maintenant le mouvement annuel du ſoleil avec ſon mouvement diurne, il faut remarquer d'abord que ſi le plan de l'écliptique étoit le même que le plan de l'équateur, ou ſi l'axe de la terre étoit perpendiculaire au plan de l'écliptique, le ſoleil dans ſa révolution diurne ne ſortiroit pas du plan de l'équateur, il n'auroit jamais de déclinaiſon; car alors en décrivant l'écliptique par ſa révolution annuelle, il répondroit ſucceſſivement à toutes les étoiles qui ſont dans l'équateur, & par conſéquent il feroit ſa révolution diurne dans le même cercle qu'elles. Mais comme le ſoleil paroît décrire chaque jour différents paralleles, il eſt clair que le plan de l'écliptique doit être différent de celui de l'équateur.

377. Cela étant, en vertu du mouvement annuel, le ſoleil doit, dans l'intervalle d'une révolution diurne, s'avancer d'environ un degré dans un grand cercle comme NBTLN (fig. 42) qui repréſente l'écliptique, & qui doit couper (Trig. 8) en deux parties égales, le grand

cercle EBZLE qui repréſente l'équateur céleſte. Suppoſons, 1°, qu'il reſte pendant un jour en B à l'interſection de l'équateur & de l'écliptique, alors par ſon mouvement diurne il doit décrire l'équateur, & être ſans déclinaiſon. Le lendemain le ſoleil étant avancé d'un degré dans l'écliptique de B vers A, il doit, dans ſon mouvement diurne, décrire un parallele un peu écarté de l'équateur; & ainſi à meſure qu'il avance vers A, il doit paroître s'éloigner de plus en plus de l'équateur, avoir une déclinaiſon boréale croiſſante, & décrire chaque jour des paralleles de plus en plus petits; par exemple, en paſſant par le point A, il paroît décrire le parallele AIVA. 2°, Le ſoleil étant arrivé en T, à trois ſignes ou à 90° de l'interſection B, & trois mois après avoir été en B, il eſt au point de l'écliptique le plus éloigné de l'équateur (Trig. 14), il eſt dans ſa plus grande déclinaiſon boréale poſſible, il eſt le plus près du pole boréal qu'il eſt poſſible; enfin, il décrit ſon plus petit parallele OT. 3°, Pendant les trois mois ſuivants, le ſoleil allant de T en L, ſe rapproche de l'équateur, ſa déclinaiſon boréale diminue, ſes paralleles augmentent, en ſorte qu'étant en L à l'autre interſection de l'écliptique avec l'équateur, il n'a plus de déclinaiſon, il décrit encore ce jour-là l'équateur céleſte. 4°, Enſuite le ſoleil paſſant de L vers N, entre dans la partie auſtrale du ciel, ſa déclinaiſon auſtrale va en croiſſant, & ſes paralleles en diminuant juſqu'à ce qu'étant arrivé en N à trois ſignes du point L, il a la plus grande déclinaiſon auſtrale poſſible, & il décrit ſon plus petit parallele poſſible ND. 5°, Enfin, le ſoleil continuant ſa route de N en B, ſe rapproche de l'équateur, ſa déclinaiſon auſtrale diminue, de ſorte qu'étant arrivé en B un an après en être parti, il ſe retrouve ſans déclinaiſon & dans l'équateur, & recommence une nouvelle carriere accompagnée des mêmes phénomenes.

378. Il eſt évident qu'*à cauſe du mouvement continuel du ſoleil dans l'écliptique, les paralleles qu'il paroît décrire chaque jour ne ſont pas de vrais cercles, mais des eſpeces de ſpirales*, telles que ſeroient les courbes formées par un fil

dont on entoureroit une ſphere. Car après une révolution diurne entiere, le ſoleil ne ſe trouve pas au point du parallele où il étoit en la commençant, mais un peu plus haut ou un peu plus bas, ſelon la poſition que l'arc de l'écliptique qu'il a décrit dans cet intervalle a par rapport à l'équateur.

379. Les deux plus petits paralleles O T, N D, que le ſoleil décrive, s'appellent les *Tropiques*, parce que ce ſont les termes où ceſſant de s'éloigner de l'équateur, il commence à y *retourner*. On appelle *Tropique du Cancer*, celui qui eſt du côté du pole boréal; & *Tropique du Capricorne*, celui qui eſt du côté du pole auſtral, parce que le ſoleil dans ces tropiques, eſt, ou dans le troiſieme ſigne de l'écliptique qu'on appelle le ſigne du *Cancer*, ou dans le neuvieme ſigne qu'on appelle le ſigne du *Capricorne*.

380. Les interſections B, L, de l'écliptique & de l'équateur, s'appellent *points Equinoxiaux* pour la raiſon qu'on verra bientôt (408); le point B dans la route du ſoleil qui va du Tropique du Capricorne au Tropique du Cancer, s'appelle *le point de l'Equinoxe du Printemps*, ou *le premier point du Bélier*; & l'interſection L dans la route du Tropique du Cancer au Tropique du Capricorne, s'appelle *le premier point de la* ♎, ou *le point de l'Equinoxe d'Automne*.

381. Les points T, N, éloignés de 90° ou de trois ſignes des points Equinoxiaux, s'appellent *points Solſticiaux*, parce que le ſoleil étant aux environs de ces points, paroît comme *ſtationnaire* à l'égard du plan de l'équateur. Car ſoit B Z T (fig. 43.) la moitié de l'équateur, B L T la moitié de l'écliptique, B, T les points équinoxiaux, L un point ſolſticial; il paroît par cette figure que l'arc l L λ qui contient quelques degrés tant en-deçà qu'en-delà de L, eſt ſenſiblement parallele à l'arc correſpondant z Z ζ dans l'équateur; donc pendant tout le temps que le ſoleil décrit l'arc l L λ, il ne paroît preſque pas changer de diſtance par rapport à l'équateur, & ſa déclinaiſon paroît être la même pendant pluſieurs jours.

382. Nous appellons le point T (fig. 42) le plus près du pole boréal, le *point du ſolſtice d'Eté*, & le point N le

point du ſolſtice d'Hyver, parce que le ſoleil arrive à un de ces points-là, pendant que les Européens ſont en été, & à autre pendant qu'ils ſont en hyver.

383. Pour rapporter plus commodément les différentes poſitions des aſtres aux plans de l'écliptique & de l'équateur, on imagine deux grands cercles, l'un B S L R qui paſſe par les poles de l'écliptique R, S, & par les points équinoxiaux B, L, & que j'appellerai ici, contre l'uſage ordinaire, le *Colure* des équinoxes (*d*); & l'autre R P Z Q E qui paſſe par les poles de l'écliptique R, S, & par ceux de l'équateur P, Q. Ce cercle qui s'appelle le *Colure* des ſolſtices, eſt perpendiculaire (Trig. 20) à l'équateur & à l'écliptique, & il paſſe par les points ſolſticiaux T, N.

384. Entre les différents uſages de ces cercles qu'on verra dans la ſuite, il eſt bon de remarquer celui-ci, qui eſt propre au colure des ſolſtices; c'eſt que ce cercle coupant perpendiculairement l'équateur & tous ſes paralleles, il peut ſervir à meſurer leurs diſtances, ou la déclinaiſon de tous ces paralleles. Ainſi les arcs I Z ou V E, ſont la meſure de la déclinaiſon du parallele V A I, & par conſéquent de la déclinaiſon du ſoleil lorſqu'il étoit au point A de l'écliptique. De même, les arcs T Z ou O E, & Z D ou E N, ou même RP, Q S, ſont (Trig. 18) la meſure de la plus grande déclinaiſon du ſoleil poſſible, ou de l'angle formé par les plans de l'équateur & de l'écliptique. On appelle cet angle *l'obliquité de l'écliptique*.

(*d*) Les anciens Aſtronomes ont appellé *Colure des Equinoxes* le grand cercle qui paſſe par les poles de l'équateur & par les points équinoxiaux.



ARTICLE IV.

Recherche des Phénomenes particuliers qui doivent résulter du mouvement diurne de la terre, selon les différentes positions de l'Observateur sur sa surface.

385. SUPPOSONS I°, que l'observateur soit placé précisément sur un des poles de la terre, comme par exemple, sur le pole arctique : dans ce cas la ligne de son zénith est confondue avec l'axe de l'équateur ; son zénith répond au pole arctique céleste P, & son horizon est confondu avec l'équateur céleste E Z z (fig. 44). Donc tous les astres qui sont entre l'équateur & ce pole, ou dont la déclinaison est boréale, doivent paroître tourner autour de la ligne CP, & par conséquent parallélement à l'horizon de l'observateur; les astres qui sont dans l'équateur, doivent toujours raser l'horizon, & tous ceux dont la déclinaison est australe, sont perpétuellement invisibles à cause de l'opacité de la terre.

386. Donc en général, *lorsqu'on est placé sur un des poles de la terre, on ne voit que la moitié des étoiles ; en vertu du mouvement diurne aucun astre ne se leve ni se couche, ne s'éleve ni s'abaisse par rapport à l'horizon, ne va jamais obliquement, mais toujours parallélement à l'horizon, & sa hauteur est toujours égale à sa déclinaison.*

387. C'est à cause du parallélisme de tous ces mouvements à l'égard de l'horizon, qu'on dit que *la sphere est parallele* par rapport à un homme situé sur un des poles terrestres.

388. Mais parce que le soleil, les planetes & les cometes ont un mouvement de révolution périodique, par lequel ils répondent successivement à différentes étoiles fixes en décrivant chacun une orbite particuliere, qui est coupée par le plan de l'équateur en deux parties, l'une australe & l'autre boréale; il est clair que ces astres en se rapprochant ou en s'éloignant continuellement du point de l'intersection de leur orbite avec l'équateur, changent à chaque instant de parallele : de sorte qu'aucun ne peut paroître

ſur l'horizon de l'obſervateur pendant tout le temps qu'il décrit la partie auſtrale de ſon orbite, & il y doit paroître continuellement pendant tout le temps qu'il emploie à en décrire la partie boréale. Par exemple, le ſoleil qui décrit l'écliptique en un an, doit être ſix mois entiers ſur l'horizon, & ſix mois au-deſſous. Car ſuppoſons qu'il ſoit d'abord au point équinoxial du bélier, il doit paroître raſer l'horizon par ſon mouvement diurne, puis à meſure qu'en avançant vers le ♋, ſa déclinaiſon boréale augmente il doit paroître s'élever peu-à-peu en décrivant des ſpires qui ſont ſenſiblement des cercles paralleles à l'horizon. Au bout de trois mois le ſoleil étant arrivé au tropique de ♋, il eſt à ſa plus grande hauteur ſur l'horizon, laquelle eſt égale à l'obliquité de l'écliptique : après quoi il emploie trois mois à redeſcendre en ſpirale vers l'horizon, où il ſe trouve dans le point équinoctial de la balance, auquel étant arrivé, il raſe l'horizon, puis s'enfonce deſſous pour ne plus reparoître de ſix mois, qui eſt le temps qu'il emploie à décrire la partie auſtrale de l'écliptique. Ainſi *ſous les poles il n'y a qu'un jour & qu'une nuit dans toute l'année ; mais ils ſont chacun de ſix mois.*

389. Il en eſt de même des planetes & des cometes, dont les orbites étant dans des plans de grands cercles de la ſphere céleſte, ſont coupées en deux parties égales par l'équateur, ce qui fait que Saturne eſt viſible pendant 15 ans de ſuite, Jupiter pendant 6, &c.

390. II. Suppoſons l'obſervateur ſur l'équateur terreſtre : la ligne C Z de ſon zénith eſt alors couchée ſur le plan de l'équateur céleſte ; elle eſt par conſéquent perpendiculaire à l'axe de l'équateur P Q, & cet axe ſe trouve dans le plan de l'horizon de l'obſervateur. Ce plan paſſe donc par les centres A, B, D, C, F, G, H, &c. de tous les paralleles des aſtres, & par conſéquent il les coupe tous perpendiculairement en deux parties égales ; la moitié de chacun de ces paralleles qui eſt vers Z, eſt au-deſſus de l'horizon, & l'autre moitié qui eſt vers E, eſt toujours au-deſſous.

391. Donc en général, *lorſqu'on eſt placé ſur l'équateur, tous les aſtres doivent paroître chaque jour s'élever pendant*

ſix heures, redeſcendre pendant ſix autres heures, ſe coucher & reſter ſous l'horizon pendant douze heures : & leur direction au moment de leur lever ou de leur coucher doit être perpendiculaire à l'horizon ; c'eſt à cauſe de cette direction perpendiculaire, à l'horizon, qu'on dit qu'un homme ſitué ſur l'équateur, *a ſa ſphere droite.*

392. Pour ce qui eſt des planetes & des autres aſtres qui décrivent des cercles particuliers dans le ciel par leur mouvement propre, ils doivent auſſi être à peu-près ſix heures à s'élever, & autant à redeſcendre, & il n'y a de différence entre ces aſtres & les étoiles fixes, qu'en ce que les étoiles fixes décrivent toujours ſenſiblement le même parallele, au-lieu que ces aſtres décrivent chaque jour des paralleles un peu différents, & qui ſont plus ou moins grands ſelon qu'ils ont plus ou moins de déclinaiſon, ou ſelon qu'ils ſont dans des points de leur orbite plus ou moins éloignés de leur interſection avec l'équateur.

393. Donc, *par rapport à un homme placé ſur l'équateur de la terre, les jours ſont de douze heures, & les nuits de douze heures, en tous les temps de l'année.*

394. III°. Suppoſons que l'obſervateur aille de l'équateur vers un des poles, comme vers le pole arctique. Alors la ligne de ſon zénith s'écarte de plus en plus du plan de l'équateur, en s'inclinant vers la partie boréale de l'axe de l'équateur, & par conſéquent le plan de l'équateur paroît s'incliner de plus en plus vers la partie auſtrale de la terre. Le pole boréal paroît s'élever de plus en plus ſur ſon horizon, & le pole auſtral s'enfoncer deſſous à proportion. Si, par exemple, l'obſervateur s'arrête après s'être écarté de 30 degrés de l'équateur vers le pole arctique, en ſorte que la ligne de ſon zénith ſoit C*f* (fig. 44) le grand cercle *h*F*r* perpendiculaire à C*f* eſt ſon horizon, le plan de l'équateur E C Z ſera éloigné du zénith *f* de 30°, & par conſéquent incliné ſur l'horizon de 60°, meſurés par l'angle ZC*r*. Le pole P ſera élevé ſur l'horizon de 30°, meſurés par l'angle *h*C P, & le pole Q abaiſſé de 30° au-deſſous.

395. D'où il ſuit, I°. Qu'*en quelque endroit de la terre que ſoit ſitué un obſervateur, la diſtance de ſon zénith à l'é-*

quateur eſt égale à la hauteur du pole ſur ſon horizon, & la diſtance du pole au zénith eſt égale à la hauteur de l'équateur.

396. II°. Qu'à l'égard d'un homme placé entre un pole & l'équateur tous les plans des paralleles céleſtes ſont également inclinés ſur l'horizon, du côté oppoſé au pole élevé, & d'une quantité égale au complément de la hauteur de ce pole. C'eſt pour cela qu'on dit qu'un homme ſitué entre le pole & l'équateur, *a ſa ſphere oblique.*

397. III°. Donc *tous les aſtres* qui décrivent ces paralleles par le mouvement diurne, *doivent s'avancer obliquement en s'élevant ſur l'horizon, puis deſcendre obliquement en s'abaiſſant vers l'horizon.*

398. IV°. Tous les aſtres dont les paralleles ſont plus voiſins du pole élevé P que ce pole ne l'eſt de l'horizon, c'eſt-à-dire, *tous les aſtres dont le complément de la déclinaiſon eſt plus petit que la hauteur du pole de même nom, ſont perpétuellement ſur l'horizon, & ne ſe peuvent lever ni coucher.* Par exemple, l'aſtre qui décrit le parallele IK, ne peut ſe cacher ſous l'horizon, parce qu'en tournant autour du pole, le point I le plus bas de ſon parallele ne peut atteindre juſqu'à l'horizon *h* F *r*. *Au contraire tous les aſtres qui décrivent des paralleles*, comme XY, *dont le complément de la déclinaiſon eſt plus petit que la hauteur du pole d'une dénomination contraire*, c'eſt-à-dire, eſt plus petit que la baſſeſſe du pole abaiſſé Q, *ne peuvent jamais paroître ſur l'horizon*, parce que dans le point Y le plus élevé de leur parallele, ils ne peuvent atteindre cet horizon *r* F *h*.

399. V°. Dans la ſphere oblique tous les paralleles qui peuvent être coupés par l'horizon, le ſont en deux parties inégales (excepté l'équateur, parce que c'eſt un grand cercle), & à cauſe de l'uniformité du mouvement diurne, le temps que chaque aſtre reſte ſur l'horizon depuis ſon lever juſqu'à ſon coucher, eſt déterminé par le nombre de degrés de la portion de ſon parallele, qui eſt au-deſſus de l'horizon. (C'eſt pour cela que cette portion s'appelle *l'arc diurne* de cet aſtre; & celle qui eſt ſous l'horizon, s'appelle

l'arc nocturne). Les arcs diurnes *i* M *l*, *m* O *n*, sont d'un nombre de degrés d'autant plus grand, que ces paralleles sont plus près du pole élevé P; au contraire les arcs diurnes *s* S *t*, *u* V *x*, ont d'autant moins de degrés qu'ils sont plus près du pole abaissé, de sorte que l'équateur est le seul parallele qui soit coupé en deux parties égales *p* Z *q*, *p* E *q*, parce qu'il est le seul parallele qui soit un grand cercle.

400. VI°. L'arc diurne *i* M *l* d'un parallele, est égal à l'arc nocturne *u* T *x* d'un autre parallele de même déclinaison, mais de dénomination différente; parce que ces deux paralleles L *m* M *i* L, T *x* V *u* T sont égaux (364), & posés de la même maniere par rapport à l'axe P Q, & que la sphere étant coupée par l'horizon qui passe par le centre, l'hémisphere inférieur doit être semblable à l'hémisphere supérieur.

401. VII°. Donc *dans la sphere oblique tous les astres qui sont dans l'équateur restent douze heures sur l'horizon, & douze heures dessous; & les autres astres restent d'autant plus de douze heures sur l'horizon, que leur déclinaison du côté du pole élevé est plus grande, ou d'autant moins que de* 12 *heures, que leur déclinaison du côté du pole abaissé est plus grande. Et autant qu'un astre est plus de douze heures sur l'horizon, autant un autre qui a même déclinaison, mais de dénomination différente, y est moins que de douze heures.*

402. VIII°. A l'égard des plus grandes hauteurs auxquelles les astres puissent s'élever, ou ce qui est le même, des plus petites distances au zénith auxquelles ils puissent passer, il est clair que dans la supposition que nous avons faite de l'observateur sous le parallele de 30°, il n'y a que les astres dont la déclinaison boréale est de 30°, qui puissent passer par le zénith *f*, & que ceux dont la déclinaison boréale est de plus de 30°, passent d'autant plus loin du zénith du côté du pole : que ceux dont la déclinaison boréale est plus petite que de 30°, passent d'autant plus loin du zénith du côté opposé au pole élevé : que ceux qui sont dans l'équateur passent à 30° du zénith de ce même côté; qu'enfin ceux qui sont dans la partie australe du

ciel, paſſent à plus de 30° du zénith, & l'excès eſt égal au nombre de degrés de leur déclinaiſon auſtrale; de ſorte que ceux qui ont 60° de déclinaiſon auſtrale, ne font plus que raſer l'horizon ſans pouvoir s'élever au-deſſus. D'où il ſuit que *la plus grande hauteur poſſible d'un aſtre* (laquelle s'appelle *ſa hauteur méridienne*, parce qu'il y arrive au milieu de ſon arc diurne) *eſt facile à calculer, dès qu'on ſait la hauteur du pole d'un lieu, & la déclinaiſon de cet aſtre* (*d*).

403. IX°. Si on imagine un grand cercle PZQEP qui paſſe par les poles P, Q, & par le zénith *f*, il eſt clair (Trig. 10) que le plan de ce cercle coupe perpendiculairement les plans de l'équateur & de l'horizon; que l'axe PQ de l'équateur céleſte, & en même-temps les centres de tous les paralleles, ſe trouvent dans le plan de ce cercle, lequel par conſéquent diviſe chaque parallele perpendiculairement en deux parties égales, d'où il ſuit que l'arc de ce cercle compris entre le zénith & chaque parallele, meſure la vraie diſtance entre le zénith & chaque parallele; c'eſt-à-dire, entre le zénith & le point de chaque parallele qui en approche le plus, & où par conſéquent l'aſtre qui décrit ce parallele eſt dans ſa plus grande hauteur poſſible ſur l'horizon. Donc toutes les hauteurs méridiennes des aſtres doivent ſe meſurer par l'arc de ce cercle compris entre l'horizon & l'aſtre arrivé par ſon mouvement diurne dans le plan de ce cercle, lequel à cauſe de cette propriété ſera appellé le *Méridien*.

404. *Le Méridien eſt donc un grand cercle de la ſphere céleſte qui paſſe par les poles de l'équateur & par le zénith d'un lieu de la terre, qui diviſe en deux également les arcs diurnes de tous les paralleles, & dans le plan duquel un aſtre, en vertu de la rotation uniforme de la terre, arrive à l'inſtant où il eſt au milieu entre ſon lever & ſon coucher, & où il eſt dans ſa plus grande hauteur poſſible ſur l'horizon de ce lieu.*

(*d*) Tous ces problêmes de la ſphere ſont expliqués avec un plus grand détail dans la Géographie de Varenius, dans l'uſage des globes de Bion, &c.

405. Et parce que la terre eſt un globe concentrique à la ſphere céleſte, le plan d'un méridien céleſte, forme par ſon interſection avec la terre le plan d'un méridien terreſtre correſpondant.

406. Cela poſé, chaque point de la ſurface de la terre paroiſſant fixe, & ayant un zénith particulier, il doit paroître avoir ſon méridien fixe dans le ciel & ſur la terre; mais parce que tous les points de la circonférence d'un même méridien céleſte ſont autant de zéniths pour tous les points du méridien terreſtre correſpondant, il ſuit que *tous les points de la ſurface de la terre qui ſont dans le plan d'un même grand cercle qui paſſe par les poles de l'équateur, ſont ſous le même méridien tant céleſte que terreſtre.*

407. X°. De ce que le méridien coupe en deux également chaque parallele, & qu'il paſſe par leur point le plus élevé ſur l'horizon, il ſuit qu'il doit paſſer auſſi par leur point le plus abaiſſé vers l'horizon, ou même au-deſſous de l'horizon, & que par conſéquent les étoiles qui ſont de perpétuelle apparition à cauſe de leur voiſinage au pole élevé, étant dans leur plus grande hauteur comme en K, quand elles paſſent dans le plan du méridien entre le zénith *f* & le pole élevé P, elles ſont auſſi dans leur plus petite hauteur, quand 12 heures après, elles ſont retournées dans le même plan en I, entre le pole & l'horizon.

408. A l'égard des planetes, leurs phénomenes doivent ſe conformer à ceux des différents paralleles où elles ſe trouvent dans les points de leur orbite particuliere. Ainſi dans un lieu quelconque de la ſphere oblique, le ſoleil étant dans une de ſes interſections de l'équateur & de l'écliptique, ſera préciſément douze heures ſur l'horizon, & douze heures deſſous, par conſéquent le jour doit être égal à la nuit, & c'eſt ce qui a fait donner à ces interſections le nom de *points Equinoxiaux*. Le ſoleil étant en tout autre point de l'écliptique, le jour ſera plus ou moins long, ſelon que l'arc diurne du parallele où le ſoleil ſera, ſe trouvera une plus grande ou une plus petite portion de ce parallele.

409. Par exemple, ſi l'obſervateur eſt du côté du pole arctique, & le ſoleil dans le tropique du ♑, où il eſt (377)

dans ſa plus grande déclinaiſon auſtrale, ſon arc diurne eſt le plus petit qu'il eſt poſſible, & le jour par conſéquent le plus au-deſſous de 12 heures qu'il eſt poſſible. Cet arc diurne augmente à meſure que le ſoleil ſe rapproche de l'équateur, où étant arrivé trois mois après, le jour eſt alors de douze heures préciſes. Enſuite le jour continue de croître encore pendant trois mois; juſqu'à ce que le ſoleil arrivé au tropique du ♋, & ayant la plus grande déclinaiſon poſſible de même nom que le pole élevé, a par conſéquent le plus grand arc diurne poſſible; donc le jour eſt d'un nombre d'heures, d'autant plus au-deſſus de 12, qu'il en étoit au-deſſous dans le tropique du ♑. Après cela le ſoleil ſe rapprochant de l'équateur, le jour décroît par les mêmes degrés juſqu'à n'être plus que de 12 heures dans l'équinoxe ſuivant; & enfin, il redevient auſſi court qu'il avoit été d'abord, lorſqu'il ſe retrouve dans le tropique du ♑.

410. C'eſt de cette différence des jours jointe à l'inégalité des hauteurs où le ſoleil monte ſur l'horizon, ſelon les divers paralleles qu'il décrit, que vient la différence des *ſaiſons*. Car le ſoleil étant dans le tropique oppoſé au pole, il s'éleve très-peu ſur l'horizon, & il y demeure peu de temps; donc la chaleur de ſes rayons doit ſe faire peu ſentir, tant à cauſe qu'ils frappent très-obliquement, que parce qu'ils n'ont pas le temps d'échauffer l'air; & c'eſt ce qui fait l'hyver. Au contraire le ſoleil étant dans le tropique du côté du pole, s'éleve le plus haut qu'il eſt poſſible; il darde alors ſes rayons preſque perpendiculairement, & reſtant très-long-temps ſur l'horizon, il échauffe l'air; & c'eſt ce qui fait l'été. Vers les points équinoxiaux ces effets ſont dans un état moyen, d'où viennent les deux ſaiſons du printemps & de l'automne.



Article V.

Recherche de la maniere d'observer & de calculer toutes les circonstances des Phénomenes du mouvement diurne des Astres, par rapport aux cercles de la sphere qui conviennent à un lieu particulier sur la terre.

411. Par tout ce qui a été dit dans l'Article précédent, on doit avoir remarqué que *tous les phénomenes particuliers du mouvement diurne des astres dépendent de deux choses; de la position de l'observateur par rapport à l'équateur terrestre, ou ce qui revient au même, de la hauteur du pole sur son horizon;* & *de la déclinaison des astres.* D'où il suit que pour établir des regles propres à déterminer toutes les circonstances de ces phénomenes par rapport aux cercles qui conviennent à un lieu particulier, c'est-à-dire, par rapport au méridien & à l'horizon de ce lieu, il faut d'abord en connoître la hauteur du pole & la déclinaison des astres.

412. Pour déterminer par observation la hauteur P *h* du pole P (fig. 44) à l'égard de l'horizon *h n r s h*, la meilleure méthode, lorsque l'on est à quelques degrés de distance de l'équateur, consiste à observer avec un instrument exactement divisé en degrés, minutes & secondes, la plus grande hauteur *h*K (fig. 44), & 12 heures après la plus petite hauteur *h* I d'une de ces étoiles qui sont de perpétuelle apparition. Car, comme elles tournent toujours à égale distance du pole, la hauteur du pole *h* P est précisément moyenne entre leur plus grande & leur plus petite hauteur.

413. Si l'observateur est dans le voisinage de l'équateur, il observera les hauteurs méridiennes du soleil, lorsqu'il sera dans l'un & dans l'autre tropique. Car, si ces deux hauteurs sont égales, l'observateur est sous l'équateur même: si elles ne le sont pas, la moitié de leur différence sera égale à la hauteur du pole, & ce pole sera le pole arctique ou

antarctique, selon que la plus grande des deux hauteurs solsticiales se sera trouvée dans le tropique du ♋, ou dans celui du ♑.

414. La hauteur du pole d'un lieu étant ainsi déterminée, son complément Pf ou rZ est la hauteur de l'équateur (395). Il est maintenant facile de trouver la déclinaison d'un astre quelconque, en observant sa hauteur méridienne; puis en la comparant à la hauteur de l'équateur du lieu, on aura l'arc du méridien compris entre l'équateur céleste & le parallele de l'astre, ce qui est la mesure de sa déclinaison.

415. Pour observer une hauteur méridienne, on peut employer un instrument (*e*) fait en portion de cercle divisé en tous ses degrés, minutes, &c. On dispose son plan verticalement, à l'aide d'un poids qui pend du centre par le moyen d'un fil très-délié, lequel est alors dirigé exactement au zénith; on assujétit l'arc où les divisions sont marquées, à raser ce fil. Outre cela, on assujétit le plan de l'instrument à passer par le point du ciel où est le pole élevé. Alors l'instrument représente une portion du méridien céleste divisée en ses degrés. Lors donc qu'un astre est arrivé au méridien, & qu'il est par conséquent dans le plan de l'instrument, on y dirige, à l'aide d'une lunette ou d'une regle ou *alidade* préparée à cet effet, un rayon visuel qui passe par le centre de l'instrument, & l'angle entre ce rayon & le fil tendu par le poids étant connu par les divisions de l'instrument, on a l'arc céleste compris entre le zénith & l'astre; le complément de cet arc est la hauteur méridienne de l'astre.

416. De-là on peut tirer cette regle générale : *étant données deux de ces trois choses; savoir, la hauteur du pole, la*

(*e*) Le quart de cercle qui sert à mesurer les degrés de hauteur des astres est décrit dans le grand *Traité d'Optique* de Smith, dont il a paru deux traductions françoises en 1767; on en trouve aussi la description dans mon *Astronomie*, de même que de tous les autres instruments d'Astronomie, Lunettes méridiennes, Lunettes parallatiques, Muraux, Secteurs, &c.

déclinaison

déclinaiſon d'un aſtre, & ſa hauteur méridienne, on connoît facilement la troiſieme, parce que ce n'eſt que la ſomme ou la différence des arcs d'un même méridien.

417. A l'égard des autres circonſtances des phénomenes du mouvement diurne, on les calcule par les regles de la trigonométrie ſphérique; & pour diriger le calcul, on repréſente à peu-près par une figure, l'état du ciel au moment qu'on ſe propoſe.

418. Suppoſons, par exemple, que HPNH (fig. 38 & 39) repréſente le méridien d'un lieu, Z ſon zénith, P le pole élevé, HN la moitié de l'horizon, TV la moitié de l'équateur: dans ce cas PN eſt un arc égal à la hauteur du pole du lieu, & ſon complément ZP égal à la hauteur de l'équateur. Soit en E un aſtre quelconque dans le ciel hors du méridien, ſi par le pole P & par cet aſtre E on fait paſſer un arc de grand cercle PEA qui coupera perpendiculairement l'équateur, (Trig. 20) l'arc EA compris entre cet aſtre & l'équateur, repréſentera la déclinaiſon de l'aſtre, & EP ſera la diſtance de l'aſtre au pole élevé. Et ſi par le zénith & par le même aſtre E on fait paſſer un arc de grand cercle ZEB qui eſt perpendiculaire à l'horizon HN, l'arc EB exprimera la hauteur de l'aſtre ſur l'horizon, & ſon complément EZ ſa diſtance au zénith. Enfin, ſi par l'aſtre E on fait paſſer un petit cercle RL parallele à l'équateur, & qui repréſente le parallele de cet aſtre, l'arc RE compris entre le méridien & l'aſtre exprimera ſa diſtance au méridien, & l'arc RC compris entre le méridien & l'horizon, ſera l'arc ſemi-diurne de cet aſtre. Ainſi le point R repréſentera le point du méridien par où l'aſtre y doit paſſer; & le point C celui de l'horizon où l'aſtre doit ſe lever ou ſe coucher.

419. Mais pour embraſſer toutes les queſtions qu'on peut faire ſur la poſition d'un aſtre en vertu du mouvement diurne, il faut donner des noms à tous les arcs tirés dans ces figures, parce qu'ils ſont d'un très-grand uſage dans l'Aſtronomie-pratique.

420. Un quart de cercle, comme ZB, ZF, ZC, mené du zénith juſqu'à l'horizon, s'appelle *un Vertical*,

parce que son plan est (Trig. 22) perpendiculaire à l'horizon. C'est dans les verticaux que se prennent les hauteurs des astres. Parmi les verticaux, celui qui passe à l'intersection de l'équateur & de l'horizon, comme Z F, s'appelle le *premier Vertical*. Il coupe à angles droits le méridien au zénith Z.

421. L'arc de l'horizon H B compris entre le méridien & un vertical quelconque Z B, ou l'angle au zénith H Z B entre le méridien & un vertical quelconque Z B, s'appelle l'*Azimut* de ce vertical, ou de l'astre E qui est dans ce vertical.

422. L'arc de l'horizon F C ou l'angle F Z C, compris entre le premier vertical Z F & le point C, où l'horizon est rencontré par le parallele R E L d'un astre E quelconque, s'appelle l'*Amplitude* de cet astre, & on l'appelle *Amplitude Ortive*, ou *Amplitude Occase*, selon que le point C désigne le point du lever ou du coucher de l'astre.

423. De la construction de ces figures, & des propriétés de la sphere, il est facile de voir que dans la sphere oblique....

424. 1°. *Un astre dans sa révolution diurne change à chaque instant d'azimut & de vertical.*

425. 2°. *Un astre dont la déclinaison est d'une dénomination différente de celle du pole élevé, ne peut jamais passer par le premier vertical, ni avoir pour azimut un arc de 90°, ou plus grand.*

426. 3°. *Une étoile fixe* (qui par conséquent décrit toujours sensiblement le même parallele) *ne change pas d'amplitude*, c'est-à-dire, elle se leve & se couche toujours au même point de l'horizon. *Mais les astres qui ont un mouvement de révolution périodique, changent d'amplitude; ils en ont une chaque jour qui dépend de la déclinaison du parallele où ils se trouvent.*

427. 4°. *Les astres qui sont dans l'équateur n'ont pas d'amplitude ;* mais ils se levent & se couchent toujours en un point de l'horizon éloigné de 90° du méridien. C'est pour cela que le point de l'horizon éloigné de 90° du Méridien du côté de l'Orient, s'appelle *le vrai point d'Est*, & que celui

qui est à 90° du méridien du côté du couchant, s'appelle *le vrai point d'Ouest.*

428. 5°. *Deux astres qui sont dans un même parallele parviennent à l'horizon avec la même amplitude ; mais lorsqu'ils sont tous deux élevés sur l'horizon & placés du même côté par rapport au méridien, ils ne peuvent avoir en même temps le même azimut ni la même hauteur.*

429. 6°. *Deux astres qui sont dans un même vertical, ont le même azimut ; mais alors ils ne peuvent avoir ni la même hauteur, ni la même déclinaison, ni par conséquent parvenir à l'horizon avec la même amplitude.*

430. Cela posé, dans le triangle sphérique E Z P étant données trois de ces cinq choses ; savoir, Z P le complément de la hauteur du pole, l'angle Z P E de la distance de l'astre au méridien, (car (Trig. 12) cet angle est mesuré par l'arc R E), le côté P E complément de la déclinaison de l'astre, le côté Z E complément de sa hauteur, l'angle P Z E supplément de son azimut : il est facile de trouver par le calcul trigonométrique celle des deux autres qu'on voudra, & même l'angle Z E P formé à l'astre entre le vertical E Z & le cercle de déclinaison E P. Cet angle est d'usage dans plusieurs calculs astronomiques.

431. De même dans le triangle sphérique Z P C où Z C est toujours de 90°, étant données deux de ces quatre choses, le côté Z P complément de la hauteur du pole, le côté P C complément de la déclinaison d'un astre situé dans le parallele R C L, l'angle Z P C valeur de l'arc semi-diurne, l'angle P Z C complément de l'amplitude, ou somme de 90° & de l'amplitude : on a par le calcul trigonométrique (Trig. 241) celle des deux autres qu'on voudra.

432. Les calculs de ce second cas se font ordinairement par le moyen du triangle F C G rectangle en G, à cause que l'arc P C passant par le pole, coupe l'équateur perpendiculairement en G. Car dans ce triangle, l'angle C F G de l'horizon avec l'équateur est égal (395) au complément de la hauteur du pole, le côté G C est égal à la déclinaison du parallele R L, le côté F G est le complément de l'arc semi-diurne, puisque c'est le complément de l'arc de

l'équateur T G (*f*) égal (Trig. 12) à l'arc ſemi-diurne R C, l'hypoténuſe F C eſt l'amplitude. Etant donc données deux de ces quatre choſes, on calculera facilement celle des deux autres qu'on voudra.

433. REMARQUE. Puiſque tout parallele a 360 degrés, & emploie 24 heures à faire une révolution entiere, un arc quelconque d'un parallele, par exemple, la diſtance d'un aſtre au méridien, ſon arc ſemi-diurne, &c, ſe peut donner ou demander en temps ou en degrés. Pour réduire les degrés d'un arc en temps, il faut faire cette proportion; *Comme* 360° 0′ 0″ *ſont aux degrés, minutes & ſecondes de l'arc donné; ainſi les heures, minutes & ſecondes que l'aſtre a employé à faire une révolution diurne entiere, ſont aux heures, minutes & ſecondes de temps demandé.* Et pour réduire les temps donnés en degrés, on renverſe cette proportion, qui eſt fondée ſur l'uniformité des révolutions diurnes.

ARTICLE VI.

Recherche de la maniere d'obſerver & de calculer les poſitions des Aſtres par rapport aux cercles de la ſphere céleſte qui ſont fixes, ou qui conviennent à tous les lieux de la terre où un obſervateur peut être placé.

434. PUISQUE tous les aſtres font une révolution entiere chaque jour en paſſant ſucceſſivement par les plans des différents cercles particuliers, qu'on imagine dans la concavité indéfiniment grande de la ſphere céleſte, tels que l'horizon & le méridien, dont la ſituation n'eſt cenſée fixe qu'à l'égard de quelque lieu ſur la ſurface de la terre; il faut ſe ſervir de l'obſervation de ces phénomenes à l'égard de ces cercles particuliers, pour déterminer la poſition de ces mêmes aſtres à l'égard des cercles communs à tous les points de la ſurface de la terre, c'eſt-à-dire, à

(*f*) Dans la fig. 38. C'eſt ſon excès ſur 90°.

l'égard de l'équateur, de l'écliptique & des colures, qui, quoiqu'emportés par le mouvement diurne, ont cependant une situation fixe dans le ciel, de quelque point de la surface de la terre que l'observateur les considere.

435. Pour déterminer la position d'un point sur une surface, il faut nécessairement déterminer la distance de ce point à deux autres points fixes, ou bien à deux lignes différemment posées, & dont la situation soit fixe sur cette surface. Or quoique l'angle de ces deux lignes puisse être droit, aigu ou obtus, cependant il est beaucoup plus commode qu'il soit droit, parce que les deux distances du point à ces deux lignes étant des perpendiculaires, la construction & les calculs sont beaucoup plus faciles. *Donc, quoique absolument parlant, la position d'un astre puisse être déterminée dans le ciel à l'égard des cercles fixes de la sphere, par deux arcs de cercle qui mesureroient sa distance à deux points fixes, & déterminés à l'égard de ces cercles, ou à deux de ces cercles fixes quelconques; cependant il est plus convenable d'y employer les distances à deux cercles fixes perpendiculaires entr'eux.*

436. Ainsi pour déterminer commodément la position d'un astre, il faut avoir ou sa distance à l'écliptique & à un grand cercle perpendiculaire qui passe par un point déterminé de l'écliptique, ou sa distance à l'équateur & à un grand cercle perpendiculaire qui passe par un point déterminé de l'équateur, ou enfin sa distance à deux grands cercles fixes quelconques & perpendiculaires entr'eux, tels que sont les colures. Mais parce que des deux mouvements de la terre, l'un se fait dans l'écliptique, & l'autre dans le sens de l'équateur, il est clair que les deux premieres manieres sont préférables à toutes les autres.

437. Soit donc PBQDP (fig. 45) le colure des solstices, P, Q, les poles de l'équateur, BCD la moitié de l'équateur, E, T les poles de l'écliptique, GCI la moitié de l'écliptique : que son intersection C avec l'équateur soit le point équinoctial du ♈, G le point solsticial de ♋, & I le point solsticial de ♑. Soit ECT la moitié du colure des équinoxes. Puisque cette moitié de colure est celle d'un

grand cercle perpendiculaire à l'écliptique, & qui passe par un de ses points déterminés C, elle doit être propre à servir à la premiere maniere de déterminer la position des astres. C'est pourquoi, si par le même point C & par les poles de l'équateur, on fait passer une moitié de grand cercle P C Q, qui est perpendiculaire aussi à l'équateur (Trig. 20) elle sera propre à servir à la seconde maniere.

438. Soit un astre vu en un point quelconque A. 1°, si par le point A on fait passer un petit cercle K A L parallele à l'écliptique, & par ses poles E, T une moitié de grand cercle E A T perpendiculaire à l'écliptique, le point A sera déterminé par rapport à l'écliptique par la valeur de l'arc A R de sa distance à l'écliptique, & qu'on appelle *la latitude de l'astre*, & par rapport au colure E C T par la valeur de l'arc A N du parallele à l'écliptique, ou de l'arc R C de l'écliptique qui a même nombre de degrés (Trig. 12), & qu'on emploie dans le calcul préférablement à A N qui est un arc de petit cercle. On appelle l'arc R C *la longitude de l'astre.*

439. 2°. Si par le point A on fait passer le parallele à l'équateur H A F, & par les poles P, Q la moitié de grand cercle P A Q perpendiculaire à l'équateur, le point A sera déterminé par rapport à l'équateur par la valeur de l'arc A O de sa distance à l'équateur, qu'on appelle *la déclinaison de l'astre*, & par rapport au cercle fixe P C Q par la valeur de l'arc du parallele A M, ou plutôt de l'arc de l'équateur O C qui a même nombre de degrés, & qu'on appelle *l'ascension droite de l'astre.*

440. Donc, I°. *Les deux manieres les plus commodes de déterminer la position des astres par rapport aux cercles fixes de la sphere céleste, se réduisent, l'une, à trouver leur longitude & leur latitude; & l'autre, à trouver leur ascension droite & leur déclinaison.*

441. II°. *La longitude d'un astre est l'arc de l'écliptique compris entre le point équinoxial du ♈, & la rencontre de l'arc de grand cercle mené de l'astre perpendiculairement à l'écliptique.* Elle se compte de 30 en 30 degrés, ou de signe en signe depuis o signe jusqu'à 12 signes, en allant toujours selon l'ordre des constellations du Zodiaque.

442. *La latitude d'un aſtre eſt la valeur de l'arc de grand cercle mené de l'aſtre perpendiculairement ſur l'écliptique.* La latitude eſt *boréale* ou *auſtrale*, ſelon que l'aſtre eſt du côté du pole boréal de l'écliptique, ou du côté du pole auſtral.

443. III°. *L'aſcenſion droite d'un aſtre eſt l'arc de l'équateur compris entre le premier point du ♈, & la rencontre de l'arc de grand cercle mené de l'aſtre perpendiculairement à l'équateur.* Elle ſe compte par degrés depuis 0° juſqu'à 360°, en allant toujours ſelon l'ordre des conſtellations.

444. *La déclinaiſon d'un aſtre eſt la valeur de l'arc de grand cercle mené de l'aſtre perpendiculairement à l'équateur.* Elle eſt boréale ou auſtrale, comme on a déja vu (363).

445. IV°. Une moitié de grand cercle comme E A T qui paſſe par un Aſtre A, & qui ſe termine aux poles de l'écliptique, s'appelle *le cercle de latitude de l'aſtre*, parce que c'eſt ſur ce cercle qu'on meſure les latitudes des aſtres qui s'y trouvent. Et une moitié de grand cercle P A Q qui paſſe par un aſtre A, & qui ſe termine aux poles de l'équateur, s'appelle *le cercle de déclinaiſon de l'aſtre*, parce qu'on meſure les déclinaiſons par les arcs de ce cercle compris entre chaque aſtre qui s'y trouve, & l'équateur. On l'appelle auſſi *le cercle horaire de l'aſtre*, pour la raiſon qu'on verra plus bas (482).

446. Il ſuit de-là, 1°. Que *tous les aſtres qui ſont dans un même cercle de latitude ont une même longitude, & que tous ceux qui ſont dans le même cercle de déclinaiſon, ont une même aſcenſion droite.*

447. 2°. *Que l'aſcenſion droite* O C *d'un aſtre* A, *eſt auſſi repréſentée par l'angle* A P C *au pole de l'équateur entre le cercle de déclinaiſon* P C Q *qui paſſe par le premier point du ♈, & le cercle de déclinaiſon* P A Q *qui paſſe par l'aſtre. De même, la longitude* R C *d'un aſtre eſt repréſentée par l'angle* A E C *au pole de l'écliptique, entre le colure des équinoxes* E C T, *& le cercle de latitude de l'aſtre* EAT.

448. 3°. Donc dans le triangle P E A, étant donnés le côté P E (qui eſt égal à la diſtance des poles de l'équateur & de l'écliptique, ou (Trig. 18) à l'obliquité de l'écliptique,) & l'aſcenſion droite avec la déclinaiſon d'un aſtre A,

on peut calculer sa longitude & sa latitude; ou bien étant donnés P E avec la longitude & la latitude d'un astre A, on peut calculer son ascension droite & sa déclinaison. Car l'angle A P E de ce triangle est la somme des angles EPM de 90°, & M P A qui est l'ascension droite de l'astre. L'angle A E P est le complément de la longitude A E C; le côté A P est le complément de la déclinaison, & le côté E A le complément de la latitude. Etant donnés P E avec l'ascension droite & la déclinaison, dans le triangle P E A, on connoît P E, l'angle E P A & le côté P A; & étant donnés P E avec la longitude & la latitude, on a dans ce triangle les côtés P E, A E, & l'angle compris P E A. Ou plus généralement *étant données trois de ces cinq choses, l'obliquité de l'écliptique, l'ascension droite d'un astre, sa déclinaison, sa longitude, sa latitude, on peut trouver celle des deux autres qu'on voudra par les regles de la Trigonométrie-sphérique.*

449. Et comme *l'objet de l'Astronomie-pratique* est de déterminer la position des astres dans le ciel à un instant donné, il est évident qu'il *se réduit à ces trois choses* : 1°, *à connoître l'obliquité de l'écliptique* ; 2°, *à mesurer le temps* ; 3°, *à observer l'ascension droite & la déclinaison de chaque astre*, parce qu'on les déduit immédiatement des phénomenes du mouvement diurne, & qu'ensuite il est facile de trouver par le calcul leur longitude & leur latitude.

450. Lorsque l'on connoît exactement la longitude & la latitude, ou bien l'ascension droite & la déclinaison de deux astres, on peut déterminer par leur moyen, celles d'un autre astre, en observant avec un instrument les arcs compris dans le ciel entre cet astre & les deux autres : car alors ces trois astres forment un triangle sphérique dont on a mesuré actuellement deux côtés, & dont le troisieme, s'il n'est pas mesuré, peut se déduire facilement de la position respective des deux astres connus; on peut donc déterminer par le calcul la position de cet astre à l'égard des deux autres, & par conséquent à l'égard de l'équateur & de l'écliptique. On peut, en opérant ainsi successivement, déterminer la position de tous les astres. C'est ainsi qu'on le pratiquoit avant l'invention des pendules.

Article VII.

Recherche de l'obliquité de l'écliptique, & du rapport des points de l'écliptique à ceux de l'équateur.

451. L'obliquité de l'écliptique est un des plus importants éléments de l'Astronomie, parce qu'il entre dans tous les calculs des triangles sphériques, où il est question de l'équateur & de l'écliptique.

452. Il est évident que l'obliquité de l'écliptique étant (384) égale à la plus grande déclinaison possible du soleil, c'est-à-dire, à celle qu'il a dans l'un des tropiques, il faut observer avec un bon instrument la hauteur méridienne du centre du soleil lorsqu'il est dans un des solstices ; & que la différence entre cette hauteur & celle de l'équateur au lieu où l'observation aura été faite, doit donner la déclinaison du tropique. Ou bien, ce qui est encore plus exact, il faut observer la distance méridienne du soleil au zénith dans chaque tropique ; leur différence, si les deux distances ont été prises du même côté, ou leur somme, si elles ont été observées l'une au nord, l'autre au sud, donnera la distance des deux tropiques, dont la moitié est la distance de chaque tropique à l'équateur, c'est-à-dire, est égale à l'obliquité de l'écliptique.

453. Par exemple. En 1751 le soleil étant dans le tropique du ♑, la distance vraie de son centre au zénith a été observée au Cap de Bonne-Espérance de $10^{\circ}\ 26'\ 57''$ du côté du nord & dans le tropique du cancer en 1752, de $57^{\circ}\ 23'\ 29''$ du même côté. La différence $46^{\circ}\ 56'\ 32''$ donne l'intervalle des deux tropiques, & la moitié $23^{\circ}\ 28'\ 16''$ est l'obliquité de l'écliptique.

454. Rem. I. On verra dans la suite que l'obliquité de l'écliptique est sujette à une variation périodique de $18''$, en vertu de laquelle l'obliquité observée ci-dessus devoit paroître à la fin de 1751, plus petite de $4''\frac{1}{2}$ qu'elle n'eût été sans cette variation ; de sorte que l'obliquité moyenne de l'écliptique étoit alors de $23^{\circ}\ 28'\ 20''\frac{1}{2}$.

455. II. Il paroît indubitable que l'obliquité de l'écliptique va en décroissant fort lentement, & d'une minute environ en 130 ans. Car

tous les Observateurs des siecles précédents, Grecs, Arabes, Chinois, l'ont trouvée plus grande de quelques minutes que nous ne l'observons à présent. Tous les Observateurs du siecle passé l'ont faite constamment de 23° 29′ au moins; aucun de ceux d'à présent ne la fait de plus de 23° 28′ 30″. Par un milieu pris entre un grand nombre d'observations solsticiales faites au méridien de S. Pétrone de Bologne en Italie, depuis 1667 jusqu'en 1670, ayant égard à tout, même à la variation dont il est parlé dans la remarque précédente, elle résulte de 23° 28′ 54″ pour l'année 1668; & par un grand nombre de pareilles observations faites au même instrument bien vérifié, depuis 1731 jusqu'en 1734, réduites par les mêmes éléments, on la trouve de 23° 28′ 29″ pour l'année 1733. Toutes ces raisons suffisent pour établir par observation la réalité de cette diminution. On connoît d'ailleurs la cause physique qui en établit la nécessité. On sait que c'est l'effet des actions des planetes, & principalement de Jupiter & de Vénus sur la terre. (Voyez Mémoires de l'Académie de Berlin, année 1754, pag. 296).

456. L'obliquité de l'écliptique étant ainsi connue, on rapporte à l'équateur, par un calcul très-simple, tous les points de l'écliptique : c'est-à-dire, qu'on trouve très-facilement l'ascension droite & la déclinaison de chacun de ses points. Soit, par exemple, S (fig. 45) un point donné sur l'écliptique I C G, éloigné du premier point du ♈ qui est en C, de 28 degrés. Ayant abaissé du point S l'arc S O perpendiculaire sur l'équateur D C B, cet arc est la déclinaison du point S & l'arc C O de l'équateur est son ascension droite : l'angle C S O est celui de l'inclinaison du cercle de déclinaison à l'égard de l'écliptique. Cet angle sert dans un grand nombre de calculs astronomiques. Or dans le triangle rectangle O S C, où l'angle S C O est égal à l'obliquité de l'écliptique, que je suppose ici de 23° 28′ 20″, on trouve (Trig. 117 ou 119) la déclinaison O S de 10° 46′ 38″, l'ascension droite O C (Trig. 116 ou 120) de 25° 59′ 56″, & l'angle C S O de l'écliptique & du cercle de déclinaison (Trig. 117) de 69° 1′ 22″. On trouve dans les tables astronomiques, des calculs semblables tout faits pour chaque degré de l'écliptique.

457. Nous supposerons dans les trois articles suivants, que l'on sache calculer par les Tables Astronomiques la longitude, l'ascension droite, & la déclinaison du soleil, (g)

(g) Voyez les Tables astronomiques de Cassini, celles de Halley, ou celles qui sont dans mon *Astronomie*.

quoique nous ne donnions les détails des mouvements du soleil que dans la Section suivante. Si l'on ne sait pas ce calcul, il suffira d'en supposer la possibilité.

Article VIII.

Recherche de la mesure du temps, avec l'explication du temps vrai & du temps moyen.

458. La rotation de la terre sur son axe étant (357) uniforme, les révolutions diurnes des astres autour de la terre se font en temps égaux ; elles sont donc très-propres à désigner les temps. Mais comme tous les astres tournent successivement les uns après les autres & par un mouvement perpétuel, il faut en choisir un seul qui serve à mesurer le temps par ses révolutions, & choisir aussi un terme fixe, pour compter le commencement de chacune de ses révolutions. Or le soleil est, par rapport à la terre, un astre infiniment plus éclatant que tous les autres ensemble; il paroît donc naturel de choisir ses révolutions diurnes pour la mesure du temps, & l'horizon pour le terme de ses révolutions. Cependant comme le lever ou le coucher du soleil ne se font, par rapport à un habitant de la terre, qu'à l'horizon sensible, qui est un cercle fort irrégulier, rarement confondu avec l'horizon rationel, souvent entouré de vapeurs qui cachent le soleil, & qui le défigurent en détournant ses rayons, & que d'ailleurs les jours terminés par l'horizon vont en croissant & en décroissant très-sensiblement, & sont par conséquent trop inégaux ; l'Observateur prendra par préférence le méridien pour terme des révolutions diurnes ; & pour le premier instant d'un jour, l'instant de midi, c'est-à-dire, l'instant auquel le soleil sera dans le plan de son méridien.

459. Ainsi *un jour astronomique est l'intervalle du temps qui s'écoule, entre l'instant auquel le centre du soleil est dans le plan du méridien, & l'instant auquel il y retourne après une révolution entiere.*

460. Si le ſoleil n'avoit pas d'autre mouvement apparent que celui de ſa révolution diurne, il ne paroîtroit jamais changer d'aſcenſion droite; il reviendroit chaque jour au méridien avec les mêmes étoiles, ſavoir, avec celles qui auroient la même aſcenſion droite que celle du point du ciel où répondroit le ſoleil. Mais à cauſe du mouvement annuel apparent du ſoleil, qui lui fait faire dans l'écliptique une révolution entiere tous les ans, en s'avançant toujours vers l'orient, (en ſens contraire à celui du mouvement diurne, qui eſt d'orient en occident) & qui par conſéquent fait répondre chaque jour le ſoleil à un nouveau point de l'équateur; il eſt clair que lorſque le ſoleil a paſſé au méridien, avec une étoile, le lendemain au moment du retour de l'étoile au méridien, & par conſéquent lorſqu'une rotation de la terre eſt achevée, le ſoleil eſt à l'orient du méridien de toute la quantité dont la portion du mouvement annuel qu'il a faite dans cet intervalle, l'a éloigné du point de l'équateur auquel il répondoit le jour précédent : il ne paſſe donc au méridien que quelque temps après l'étoile, ſavoir, lorſque le nouveau point de l'équateur auquel il répond alors, eſt arrivé au méridien. Le jour ſuivant il paſſe encore plus long-temps après l'étoile, en ſorte qu'au bout de ſix mois elle a 12 heures d'avance ſur le ſoleil : & au bout d'un an, lorſque le ſoleil a achevé le tour du zodiaque, l'étoile a un jour entier d'avance ſur le ſoleil; elle a paſſé 366 fois au méridien, tandis que le ſoleil n'y a paſſé que 365 fois.

461. Donc le jour aſtronomique eſt égal à la ſomme du temps d'une révolution diurne d'une étoile, & de la 365e partie d'une révolution; ou plus exactement, *le jour aſtronomique eſt meſuré par les 360 degrés de l'équateur céleſte, plus l'arc de l'équateur qui répond à l'arc de l'écliptique, que le ſoleil a parcouru pendant ce jour-là*, & qu'on appelle *le mouvement diurne du ſoleil en aſcenſion droite.*

462. D'où il ſuit : I°. Que quoique les révolutions de la terre ſoient toujours égales, *les jours aſtronomiques doivent être un peu inégaux entr'eux*, par la complication de deux inégalités : la premiere eſt celle du mouvement réel de la

terre dans son ellipse, ou du mouvement apparent du soleil dans l'écliptique, qui lui fait décrire chaque jour un arc, tantôt plus petit & tantôt plus grand; la seconde inégalité est celle qui se trouve nécessairement entre les arcs de l'équateur & les arcs correspondants de l'écliptique, à cause de l'obliquité de ces deux cercles, de sorte que quand même le soleil parcourroit tous les jours des arcs égaux sur l'écliptique, les arcs correspondants de l'équateur seroient inégaux. Ainsi une horloge dont le mouvement seroit très-uniforme, ne doit presque jamais donner 24 heures justes d'un midi à l'autre; mais elle doit marquer quelques secondes de plus ou de moins d'un jour à l'autre, selon que l'arc de l'équateur qui mesure le mouvement diurne du soleil en ascension droite, est agrandi ou diminué par l'effet combiné de ces deux inégalités.

463. II°. Que pour mesurer les parties du temps par le moyen d'une horloge, de laquelle on ne doit exiger qu'un mouvement uniforme, il faut distinguer deux sortes de jours, & deux sortes de temps; savoir, un jour *vrai* ou *apparent*, c'est celui qui est déterminé par l'intervalle entre l'instant du passage réel du centre du soleil au méridien, & l'instant de son retour réel; & un jour *moyen*, & c'est l'intervalle d'un midi à l'autre tel qu'on l'observeroit tous les jours, si le mouvement diurne du soleil en ascension droite étoit uniforme. Il faut aussi distinguer le *temps vrai* & *le temps moyen*. Le temps moyen est celui que doivent montrer les horloges qui sont bien réglées, & le temps vrai est celui qu'on déduit des observations du soleil, & qu'un bon cadran solaire doit montrer: il résulte de l'accumulation des jours vrais, & le temps moyen résulte de l'accumulation des jours moyens.

464. Un jour, soit vrai, soit moyen, se divise toujours en 24^h justes, ou en $86400''$. Les Astronomes sont dans l'usage de les compter de suite d'un midi à l'autre, sans les partager en douze heures du soir & douze heures du matin. Ils attribuent les heures du matin au jour précédent, & disent, par exemple, le 15 Janvier à 17 heures, au lieu de dire comme on a coutume dans l'usage civil, le 16 Jan-

vier à 5 heures du matin. C'eſt ce qui a introduit la diſtinction entre le *temps civil* & *le temps aſtronomique*. Pendant un jour moyen les 360 degrés de l'équateur paſſent ſous le méridien, plus 59′ 8″, qui eſt la 365e partie de l'équateur ou le mouvement diurne moyen du ſoleil en aſcenſion droite. Pendant un jour vrai les 360 degrés de l'équateur paſſent ſous le méridien, plus *le mouvement diurne véritable en aſcenſion droite.* Ainſi lorſque le ſoleil eſt apogée, ſon mouvement vrai en aſcenſion droite pendant un jour eſt de 1° 2′ 6″; donc alors 361° 2′ 6″ paſſent par le méridien pendant un jour vrai. Et ſi on fait cette analogie: Comme 360° 59′ 8″, ſont à 24^h^ 0′ 0″ de temps moyen; ainſi 361° 2′ 6″, ſont à 24^h^ 0′ 12″ de temps vrai; on verra que lorſque le ſoleil eſt apogée, le jour vrai eſt plus grand de 12″, que le jour moyen.

465. La différence entre un jour vrai & un jour moyen ſe calcule plus facilement en réduiſant en temps, à raiſon de 24^h^ 0′ 0″ pour 360° 59′ 8″, la différence entre le mouvement diurne vrai du ſoleil en aſcenſion droite, & ſon mouvement diurne moyen 59′ 8″. Ainſi, on trouvera que 2′ 58″, différence entre 1° 2′ 6″ & 59′ 8″, valent 11″ 50‴ de temps.

466. La différence entre le temps vrai & le temps moyen eſt donc meſurée par la différence ainſi réduite en temps, entre la ſomme des mouvements diurnes du ſoleil en aſcenſion droite, & la ſomme d'autant de fois 59′ 8″, ou ce qui revient au même, entre l'aſcenſion droite vraie actuelle du ſoleil & ſon aſcenſion droite moyenne correſpondante, (laquelle eſt égale à la longitude moyenne du ſoleil, puiſque les 360 degrés d'aſcenſion droite moyenne ſont décrits dans le même eſpace de temps périodique que les 360 degrés de longitude moyenne du ſoleil) : d'où il ſuit que *le temps vrai s'accorde avec le temps moyen, lorſque l'aſcenſion droite vraie du ſoleil eſt égale à ſa longitude moyenne.* Ce qui arrive quatre fois dans l'année; ſavoir, vers le 14 Avril, le 15 Juin, le 30 Août & le 23 Décembre. C'eſt-à-dire, que ſi par le calcul des Tables aſtronomiques on a trouvé que l'aſcenſion droite vraie du ſoleil eſt égale à ſa

longitude moyenne à $6^h\ 18'\ 24''$, il sera alors $6^h\ 18'\ 24''$ de temps vrai & de temps moyen en même-temps : mais quelques instants après l'ascension droite vraie du soleil commençant à différer de la longitude moyenne, le temps vrai commence à différer du temps moyen. Cette différence s'accumule ensuite de jour en jour, jusqu'à ce que la différence entre l'ascension droite vraie du soleil & sa longitude moyenne cesse de croître & soit prête à commencer à diminuer : alors le temps vrai s'est écarté le plus du temps moyen, & va s'en rapprocher : c'est ce qui arrive le 11 Février, où le temps moyen excede le vrai de $14'\ 40''$, le 14 Mai où le temps vrai surpasse le moyen de $4'\ 2''$, le 26 Juillet où le temps moyen excede le temps vrai de $5'\ 58''$, & le 1 Novembre où le temps vrai surpasse le temps moyen de $16'\ 8''$. Mais ces jours-là même, la longueur du jour vrai s'accorde avec celle du jour moyen, parce que la différence entre l'ascension droite vraie du soleil & sa longitude moyenne ne croissant plus & ne diminuant pas encore, le mouvement diurne en ascension droite vraie se trouve de $59'\ 8''$. Ainsi, *le jour vrai ne s'accorde avec le jour moyen, que lorsque le temps vrai differe le plus du temps moyen.*

467. On trouve dans presque tous les livres de Calculs Astronomiques, des Tables toutes dressées pour avoir égard à cette différence. On les appelle *Tables de l'Equation du temps* ou *des Horloges.*

468. Il suit delà, 1°. Que si une horloge est parfaitement réglée au temps moyen, à chaque seconde de temps qu'elle marque, un arc de l'équateur de $15''\ 2'''\ 28''''$ passe par le méridien. Car c'est la valeur de $360^o\ 59'\ 8''$ divisés par $86400''$.

469. 2°. Qu'une révolution entiere d'une étoile répondant aux 360 degrés de l'équateur, tandis qu'un jour moyen répond à $360^o\ 59'\ 8''$, la différence $59'\ 8''$ réduite en temps est de $3'\ 56''$, & fait voir que les étoiles doivent anticiper chaque jour sur le temps moyen de $3'\ 56''$; ou ce qui est la même chose une révolution diurne des étoiles, ou une rotation de la terre, se fait en $23^h\ 56'\ 4''$ de temps moyen.

470. 3°. Et par conséquent pour examiner si une horloge est réglée au temps moyen, il faut voir si elle marque pré-

ciſément 23^{h} 56$'$ 4$''$ d'intervalle entre le moment du paſſage d'une étoile quelconque par un certain terme fixe, & l'inſtant de ſon retour à ce terme après une révolution. Et cette horloge avancera ou retardera ſur le temps moyen, à proportion du plus grand ou du plus petit intervalle qu'elle marquera entre ces deux inſtants.

471. Maintenant pour connoître le temps vrai, il faut déterminer par obſervation, quel inſtant l'horloge marquoit lorſque le centre du ſoleil étoit réellement dans le méridien. Or le ſoleil eſt dans le méridien à l'inſtant où il ceſſe de monter ſur l'horizon, & où il va commencer à deſcendre ; & comme cette alternative n'eſt cauſée que par la rotation uniforme de la terre, l'inſtant du midi eſt également éloigné des deux inſtants auquels il eſt parvenu à une même hauteur en montant & en deſcendant. Donc ſi quelque temps avant midi on marque l'inſtant à l'horloge, auquel on a obſervé une hauteur du centre ou d'un bord du ſoleil, & après-midi l'inſtant à l'horloge auquel le centre ou le même bord du ſoleil eſt retourné à la même hauteur, l'inſtant moyen entre ces deux, eſt celui que l'horloge a marqué lorſqu'il étoit midi.

472. Par exemple, à Paris le 29 Septembre 1744, on a obſervé avec un inſtrument (*h*), la hauteur du bord ſupérieur du ſoleil de 22°, lorſque l'horloge marquoit 8^{h} 19$'$ 52$''$ du matin, & 3^{h} 16$'$ 18$''$ du ſoir; le milieu entre ces deux inſtants eſt 11^{h} 48$'$ 5$''$; c'eſt l'heure marquée à la pendule, lorſque le centre du ſoleil étoit dans le méridien.

473. Par la même méthode on peut déterminer les inſtants des paſſages des étoiles & des planetes par le méridien.

474. REMARQUE. Cette méthode qu'on appelle *la méthode des hauteurs correſpondantes*, eſt la plus naturelle qu'on puiſſe imaginer; elle eſt en même-temps la plus exacte, parce qu'il eſt très-facile de déterminer à moins d'une ſeconde près, l'inſtant auquel un aſtre paroît toucher un fil extrêmement fin tendu au foyer de la lunette d'un inſtru-

---

(*h*) Le quart de cercle qui ſert à prendre les hauteurs correſpondantes eſt celui dont j'ai parlé dans la note de l'art. 415. A l'égard des horloges à pendule, V. le Traité d'Horlogerie de Thiout, celui de M. Berthoud, & celui de M. le Paute, imprimé en 1755.

ment

ment propre à obſerver des hauteurs : l'obſervation s'en fait avec d'autant plus de préciſion que l'aſtre eſt plus éloigné du méridien ou plus près du premier vertical, parce qu'alors il monte ou deſcend le plus rapidement. Il n'eſt pas néceſſaire que l'inſtrument ſoit excellent, ni qu'il donne une hauteur juſte; il ſuffit qu'il puiſſe ſervir à déterminer une même hauteur quelconque. Il faut pour cet effet qu'il ait deux ou trois pieds de rayon. Il faut encore prendre pluſieurs hauteurs avant & après le paſſage au méridien, afin d'avoir pluſieurs concluſions du même paſſage, leſquelles ſe vérifient mutuellement, & entre leſquelles on prend un milieu, ſi l'on y trouve quelque différence.

475. Cependant cette méthode n'eſt bonne rigoureuſement que pour les étoiles, ou lorſque l'aſtre n'a pas changé de déclinaiſon dans l'intervalle des obſervations correſpondantes. Car ſi l'aſtre a eu un mouvement en déclinaiſon, tel qu'il s'approche du pole élevé, & qu'ainſi ſa hauteur méridienne aille tous les jours en augmentant, cet aſtre en deſcendant parviendra plus tard à la hauteur qui aura été obſervée à l'orient, & par conſéquent le milieu entre les deux inſtants obſervés donnera l'inſtant du paſſage par le méridien plus tard qu'il n'eſt arrivé réellement. Au contraire, ſi la déclinaiſon de l'aſtre le rapproche du pole abaiſſé, il arrivera plutôt à la même hauteur qui a été obſervée avant ſon paſſage, & le milieu entre les deux inſtants obſervés donnera un inſtant du paſſage plutôt qu'il n'eſt arrivé réellement. C'eſt le cas de l'exemple propoſé. La déclinaiſon du ſoleil tendoit au pole auſtral, & par-là contribuoit à abaiſſer le ſoleil de plus en plus, de ſorte que le ſoleil après midi eſt parvenu plutôt à 22 degrés de hauteur, & qu'ainſi le midi conclu à $11^h\ 48'\ 5''$, a précédé le vrai inſtant du paſſage du centre par le méridien.

476. Quoique l'erreur cauſée par le changement de déclinaiſon du ſoleil ne puiſſe jamais excéder $30''$ de temps ſur le midi vrai, dans quelque pays habité que ce ſoit; cependant lorſqu'on veut connoître exactement le temps vrai, il faut calculer cette erreur pour rectifier l'inſtant trouvé.

477. Pour cela, ſoit R P Z H (fig. 48) le méridien du lieu où l'obſervation a été faite, Z le zénith, H R l'horizon, P le pole, E Q l'équateur, S le lieu où étoit le ſoleil par rapport à l'horizon & au méridien à l'inſtant de l'obſervation du matin; ſa hauteur obſervée S D. Ayant mené par le point S l'arc au pole S P, l'arc S I eſt la déclinaiſon du ſoleil, & l'angle E P S exprime ſa diſtance au méridien (430). Prolongez D S juſqu'au zénith, & S Z eſt le complément de la hauteur obſervée. Par le point S menez le petit cercle A S V parallele à l'horizon, (on appelle ces ſortes de petits cercles paralleles à l'horizon, des *Almicantarats*) & le petit cercle B S L parallele à l'équateur, qui eſt le parallele du ſoleil à l'inſtant de l'obſervation du matin. Soit maintenant M T N le parallele du ſoleil à l'inſtant de l'obſervation du ſoir, de ſorte que M B exprime la diſtance de ces paralleles ou le changement en déclinaiſon dans l'intervalle des obſervations correſpondantes, il eſt clair que l'inſtant obſervé le ſoir eſt celui où le

parallele du soleil M T N rencontre l'almicantarat A S V, c'est-à-dire, où le soleil est en T, en sorte que les hauteurs TF, S D, sont égales. Or si par T on mene T P, l'angle E P T exprime la distance du soleil au méridien à l'instant de l'observation du soir, sa différence avec E P S est T P S, dont la moitié réduite en temps est l'équation qu'il faut appliquer au midi trouvé, pour avoir le vrai midi.

478. Pour avoir cet angle T P S, il faut remarquer que le triangle T Z P ne differe du triangle S Z P, qu'à cause que le côté T P differe du côté S P de toute la quantité M B du changement en déclinaison; on pourra donc calculer cet angle T P S par une des formules différentielles de la Trigonométrie-sphérique (Trig. 302).

479. Il n'est pas nécessaire que les côtés P Z, P S, S Z, soient exactement connus, il suffit de savoir précisément la quantité de la variation B M.

480. C'est sur ce principe, que les Astronomes ont calculé des tables de l'*équation des hauteurs correspondantes*, qui se trouvent dans les livres de calculs Astronomiques (*i*).

ARTICLE IX.

Recherche de l'ascension droite & de la déclinaison des astres.

481. LA déclinaison des astres se connoît facilement en observant leurs hauteurs méridiennes (416), & en les comparant à la hauteur de l'équateur au lieu où l'observation a été faite.

482. *On détermine les ascensions droites par la mesure des temps.* Car puisque tous les astres qui sont dans un même cercle de déclinaison ont la même ascension droite (446), & qu'un cercle de déclinaison est un grand cercle perpendiculaire à l'équateur, il suit que lorsque tout le ciel fait une révolution, tous les plans des cercles de déclinaisons viennent successivement & uniformément se confondre avec le plan du méridien, qui est aussi un grand cercle perpendiculaire à l'équateur. Et c'est pour cela qu'un cercle de

(*i*) Par exemple, dans la *Connoissance des temps*, éphéméride que l'Académiedes Sciences publie chaque année pour l'usage des Astronomes & des Navigateurs, & dont tous les volumes depuis 1760 renferment quelques Tables nouvelles.

déclinaiſon s'appelle auſſi *un cercle horaire*, parce que tous ſes points ſe trouvent dans le méridien à la même heure ou au même inſtant. Donc, 1°. *Tous les aſtres qui paſſent en même-temps par le méridien, ont alors une même aſcenſion droite.* 2°. *Les aſtres qui paſſent au méridien en des temps différents, ont des différences d'aſcenſions droites proportionnelles à l'intervalle des temps de leur paſſage au méridien.*

483. Par exemple, les étoiles doivent faire une révolution entiere pendant l'intervalle de $23^h\ 56'\ 4''$ meſuré par une horloge réglée au temps moyen (470) : ſi donc à l'aide d'une pareille horloge, & d'un inſtrument fixé dans le plan du méridien, ou ce qui eſt encore plus sûr, ſi par des hauteurs correſpondantes, on a obſervé qu'une étoile a paſſé au méridien une heure avant ou après un autre aſtre, on trouvera combien cette étoile a de degrés d'aſcenſion droite de moins ou de plus que cet aſtre, en faiſant cette analogie : Comme $23^h\ 56'\ 4''$, temps d'une révolution entiere, ſont aux $360^o\ 0'\ 0''$ de l'équateur qui paſſent au méridien pendant ce temps; ainſi une heure de différence, eſt à $15^o\ 2'\ 28''$ de différence entre les aſcenſions droites; de ſorte que l'aſcenſion droite d'un des deux aſtres étant connue, celle de l'autre le devient par cette obſervation.

484. Si l'horloge dont on ſe ſert n'eſt pas réglée au temps moyen, alors il faudra faire cette analogie : *Comme le temps que l'horloge a marqué dans l'intervalle d'une révolution entiere d'une étoile, eſt à 360 degrés; ainſi le temps marqué à cette horloge entre le paſſage de deux aſtres par le méridien, eſt à leur différence d'aſcenſion droite.*

485. D'où il ſuit que *pour déterminer l'aſcenſion droite d'un aſtre quelconque*, & même de tous les aſtres, *il ſuffit de connoître l'aſcenſion droite d'une ſeule étoile, d'avoir une horloge dont le mouvement ſoit uniforme, & de pouvoir déterminer les temps marqués à cette horloge, auxquels cet aſtre & l'étoile paſſent au méridien, ou à un même cercle horaire.*

486. Voici la meilleure méthode de trouver l'aſcenſion droite de l'étoile principale, à laquelle on peut rapporter

les autres (*k*). Lorſque le ſoleil eſt dans le voiſinage d'un des équinoxes, ou que du moins ſon mouvement diurne en déclinaiſon n'eſt pas plus petit que de 17 à 18 minutes, il faut obſerver ſa hauteur méridienne, & ſa différence d'aſcenſion droite avec l'étoile choiſie. Il faut faire de ſemblables obſervations lorſque le ſoleil après le ſolſtice ſuivant, eſt revenu à la même hauteur méridienne, en ſorte qu'on puiſſe en conclure la différence d'aſcenſion droite entre le ſoleil & cette étoile pour chacun des deux moments où le ſoleil a paſſé par le même parallele. Par le moyen de ces différences il eſt aiſé de calculer l'arc de l'équateur qui meſure le mouvement du ſoleil en aſcenſion droite, dans l'intervalle de temps qu'il a employé à retourner au même parallele, c'eſt-à-dire, à ſe retrouver à la même diſtance du ſolſtice; car alors il eſt évident que la moitié de cet arc eſt la diſtance du ſoleil au colure des ſolſtices meſurée ſur l'équateur, & ſon complément eſt l'aſcenſion droite du ſoleil : on peut donc par ce moyen avoir l'aſcenſion droite du ſoleil, & par la différence obſervée avec l'étoile, on a l'aſcenſion droite de l'étoile.

487. Par exemple, le 12 Avril 1749, j'ai obſervé à Paris la hauteur méridienne du centre du ſoleil de $49^{\circ}\ 58'\ 33''$; & par un grand nombre de hauteurs correſpondantes du ſoleil & de la lyre, j'ai conclu leur différence d'aſcenſion droite à midi de $103^{\circ}\ 50'\ 54''$. Le 30 Août ſuivant, j'ai obſervé de même la hauteur méridienne du ſoleil de $50^{\circ}\ 3'\ 8''$, & la différence d'aſcenſion droite avec la lyre de $241^{\circ}\ 43'\ 26''$. Par la différence $4'\ 35''$ entre les hauteurs méridiennes, on voit que ſi la hauteur méridienne du ſo-

(*k*) Cette méthode employée par Flamſteed, en 1690, (*Hiſtoria Cœleſtis*) a été employée par M. le Monnier dans ſon *Hiſtoire Céleſte* publiée en 1741, où il décrit auſſi l'inſtrument des paſſages ou la Lunette méridienne qui lui ſervit à rétablir les aſcenſions droites des principales étoiles. M. de la Caille qui s'eſt ſervi de la même méthode, déterminoit les paſſages au méridien par des hauteurs correſpondantes; on en trouve une multitude dans ſon Livre intitulé : *Aſtronomiæ fundamenta*, Livre extrêmement rare actuellement, parce qu'on en tira très-peu d'exemplaires.

leil, ou ce qui eſt le même, ſi ſa déclinaiſon eût été le 12 Avril plus grande de $4' 35''$, il eût été dans le même parallele que le 30 Août à midi. Et parce que les mouvements diurnes du ſoleil ſont très-bien repréſentés par les Tables Aſtronomiques, je trouve par le calcul, que du 12 au 13 Avril à midi, le ſoleil a parcouru $55' 10'',4$ en aſcenſion droite, & $21' 45'',4$ en déclinaiſon. Je fais : Comme $21' 45'',4$ ſont à $55' 10'',4$: ainſi $4' 35''$ ſont à $11' 37''$, & je vois que tandis que la déclinaiſon du ſoleil croiſſoit le 12 Avril de $4' 35''$, la différence d'aſcenſion droite entre la lyre & le ſoleil croiſſoit de $11' 37''$. Donc au moment que le ſoleil eſt parvenu le 12 Avril à la même déclinaiſon qu'il avoit le 30 Août à midi, la différence entre l'aſcenſion droite du ſoleil & celle de la lyre étoit de $104^{\circ} 2' 31''$.

488. Otant $104^{\circ} 2' 31''$ de $241^{\circ} 43' 26''$, j'ai le mouvement du ſoleil en aſcenſion droite dans l'intervalle de ſon retour au même parallele, de $137^{\circ} 40' 55''$. J'y ajoute $18''$, parce que dans ce même intervalle, l'étoile a eu un petit mouvement apparent en aſcenſion droite dans le même ſens que le ſoleil, en vertu des trois différentes cauſes qui font varier les poſitions des étoiles, & dont on parlera dans la ſuite (voyez Section VI. Chap. I. Art. 9.) & j'ai $137^{\circ} 41' 13''$. Le colure du ſolſtice paſſant par le milieu de cet arc, la moitié $68^{\circ} 50' 36'',5$ eſt l'arc de l'équateur compris entre le colure des ſolſtices & le point où répondoit le ſoleil le 12 Avril, au moment qu'il paſſoit par le même parallele que le 30 Août : & le complément $21^{\circ} 9' 23'',5$ eſt la vraie aſcenſion droite que le ſoleil avoit pour lors. Et comme ſa différence avec l'aſcenſion droite de la lyre étoit $104^{\circ} 2' 31''$ dont la lyre précédoit le ſoleil, l'aſcenſion droite apparente de la lyre, étoit au même inſtant de $277^{\circ} 6' 52'',5$.

489. Cette méthode eſt dans le fond la même que celle des hauteurs correſpondantes, pour trouver le paſſage d'un aſtre au méridien. Elle peut par conſéquent ſervir à trouver le moment du paſſage du ſoleil par le colure des ſolſtices, ou même par le colure des équinoxes, pourvu que l'on obſerve encore la différence d'aſcenſion droite entre le ſoleil & la même étoile vers le temps du ſolſtice, ou vers le temps de l'équinoxe.

490. Par exemple. Puisqu'à égale distance du soleil au solstice, les différences d'ascensions droites entre le soleil & la lyre étoient 104° 2′ 31″, & 241° 43′ 26″, le milieu 172° 52′ 58″ $\frac{1}{2}$ doit être la différence d'ascension droite entre le ☉ & l'étoile au moment du solstice. Or le 19 Juin 1749 à midi, j'ai observé 170° 53′ 10″ $\frac{1}{2}$ de différence entre le soleil & la lyre. Donc le 19 Juin à midi le soleil avoit encore 1° 59′ 48″ à faire en ascension droite pour atteindre le solstice. Mais selon les Tables Astronomiques le soleil fait 1° 2′ 23″ en ascension droite chaque jour vers le 19, 20 & 21 Juin; donc il a employé 46 heures 5′ $\frac{1}{3}$ à décrire 1° 59′ 48″. Donc le solstice a dû arriver le 20 Juin à 22^h 5′ 20″. Dans ce calcul, comme dans le suivant, où la méthode n'est proprement qu'indiquée, on a négligé de petites corrections à faire aux observations, tant pour les petits mouvements apparents de l'étoile, que pour les petites perturbations du soleil dont on parlera dans la suite.

491. De même ôtant 21° 9′ 23″, 5 de 104° 2′ 31″, restent 82° 53′ 7″,5 pour la différence qu'il doit y avoir entre les ascensions droites du soleil & de la lyre au moment de l'équinoxe qui a précédé le 12 Avril. Or le 21 Mars à midi la différence a été trouvée de 83° 49′ 18″,8. Donc le soleil avoit déja parcouru 56′ 11″,3 en ascension droite depuis l'équinoxe. Mais selon la théorie du soleil, il ne fait le 20 & 21 Mars que 54′ 32″ en ascension droite par jour : donc il y avoit 24^h 44′ que l'équinoxe étoit passé. Donc il étoit arrivé le 19 Mars à 23^h 16′.

ARTICLE X.

Des principaux usages de l'ascension droite, & de la déclinaison des Astres.

492. UN des principaux usages de l'ascension droite & de la déclinaison des astres, est de servir à calculer leur longitude & leur latitude, comme on a vu (448).

493. L'ascension droite sert à marquer l'ordre, suivant

lequel la révolution diurne des astres se fait, & les intervalles de temps qu'ils emploient à se succéder les uns aux autres, principalement par rapport au méridien.

494. Elle sert encore *à calculer à quelle heure un astre passe par le méridien :* en voici la méthode. *Prenez la différence entre l'ascension droite de l'astre & celle du soleil pour le midi du jour dont il s'agit ; convertissez cette différence en temps à raison d'une heure pour 15 degrés ; & vous aurez à-peu-près l'intervalle de temps entre midi & le passage de l'astre par le méridien.* Si l'astre est à l'occident du soleil, ou si son ascension droite est plus petite que celle du soleil, cet intervalle étant retranché de 12 heures, donnera à-peu-près le moment du passage de l'astre avant midi. Mais si l'astre est à l'orient du soleil, ou si son ascension droite est plus grande que celle du soleil, cet intervalle donnera l'heure du passage de l'astre après-midi.

495. Ce premier calcul ne donne le moment du passage au méridien qu'à-peu-près, parce qu'il suppose que dans cet intervalle le soleil ni l'astre n'ont aucun mouvement particulier en ascension droite. Il faut donc, pour avoir le véritable instant de ce passage, calculer l'ascension droite du soleil & celle de l'astre pour l'instant qu'on vient de trouver, & leur différence réduite en temps donnera le véritable instant du passage par le méridien.

496. Par exemple, supposons qu'un certain jour à midi l'ascension droite de Mars soit de $112^{\circ}\ 18'$, & celle du soleil de $183^{\circ}\ 42'$, la différence $71^{\circ}\ 24'$ réduite en temps est de $4^{h}\ 45'\ 36''$. Et parce que l'ascension droite de Mars est plus petite que celle du soleil, il doit précéder le soleil au méridien (493), & y passer vers $7^{h}\ 14'\ 24''$ du matin. Ayant calculé l'ascension droite de Mars & celle du soleil pour cet instant, & ayant trouvé l'une de $112^{\circ}\ 13'\ 12''$, & l'autre de $183^{\circ}\ 30'\ 10''$, la différence $71^{\circ}\ 16'\ 58''$ convertie en temps, donne le vrai moment du passage de Mars au méridien à $7^{h}\ 14'\ 52''$ du matin.

497. Il est clair que ce calcul est l'inverse de celui par lequel on trouve (482) l'ascension droite des astres par l'observation de leurs passages par le méridien.

498. Le même calcul sert à vérifier les temps marqués par une horloge : car si on observe à quel instant de cette horloge un astre dont l'ascension droite est connue, passe par le méridien, on verra par la comparaison de l'instant calculé avec celui qui a été observé, si l'horloge est conforme au temps vrai, ou de combien elle s'en écarte.

499. Un quatrieme usage à-peu-près semblable au précédent, est de *trouver à un instant donné la distance d'un astre au méridien d'un lieu;* ou ce qui est la même chose (430) l'angle au pole formé entre le méridien d'un lieu & le cercle de déclinaison qui passe par l'astre. Pour cela *convertissez en degrés* (à raison de 15 degrés par heure) *l'intervalle du temps entre l'instant donné & le midi précédent. Ajoutez-les à l'ascension droite du soleil*, calculée par les Tables Astronomiques *pour l'instant donné*, la somme donne le point de l'équateur qui passe au méridien à cet instant. *De cette somme* (ou de 360 degrés plus cette somme, si elle se trouve trop petite) *ôtez l'ascension droite de l'astre;* le reste est l'angle au pole qu'on cherche.

500. Comme (466) l'équation du temps est la différence entre la longitude moyenne du soleil & son ascension droite vraie : si l'instant est donné en temps moyen, le même calcul se fera en convertissant ce temps en degrés, à raison de 15° pour chaque heure, en ajoutant ces degrés à la longitude moyenne du soleil, tirée des Tables pour cet instant, & en retranchant de la somme, l'ascension droite de l'astre.

501. Et parce qu'en vertu du mouvement diurne l'angle au pole compris entre le méridien & le cercle de déclinaison sur lequel un astre est placé, varie uniformément à mesure que l'astre s'éloigne ou s'approche du méridien; un angle au pole entre le méridien & un astre dont l'ascension droite soit connue, étant donné, il est facile de calculer à quel instant cet angle s'est trouvé de la grandeur donnée, pourvu qu'on sache si l'astre étoit à l'orient ou à l'occident du méridien. A *l'angle donné* (si l'astre est à l'occident, ou à son supplément à 360 degrés si l'astre est à l'orient) *ajoutez l'ascension droite de l'astre, & retran-*

chez-en celle du soleil, le reste converti en temps à raison de 15 degrés par heure, donne le temps vrai cherché; ou bien à cet angle ou à son supplément à 360 degrés, ajoutez l'ascension droite de l'astre, & retranchez-en la longitude moyenne du soleil, le reste converti de même en temps, donne l'instant cherché en temps moyen. Ce calcul est l'inverse du précédent.

502. De-là il suit qu'un des principaux usages de l'ascension droite & de la déclinaison d'un astre, est de *trouver l'heure vraie par le moyen des mouvements connus du soleil & d'une hauteur de cet astre observée à l'orient ou à l'occident du méridien:* car à l'aide de cette hauteur, de la déclinaison de l'astre & de la hauteur du pole du lieu, on calcule (430) l'angle au pole ZPE (fig. 38 & 39) entre l'astre E & le Méridien PZ; par cet angle & par l'ascension droite de l'astre, on trouve (501) l'instant auquel l'observation de la hauteur a été faite (*i*).

503. Réciproquement, (& c'est un autre usage de l'ascension droite & de la déclinaison des astres), on peut calculer à un instant donné la hauteur d'un astre en cherchant sa distance au méridien pour cet instant, & en calculant le côté EZ du même triangle sphérique EPZ.

504. Enfin la déclinaison d'un astre sert à trouver (416) sa hauteur méridienne par le moyen de la hauteur du pole donnée, ou la hauteur du pole par le moyen de la hauteur méridienne de l'astre. Elle sert à calculer l'amplitude ortive ou occase de l'astre (431), son arc semi-diurne (432), & par conséquent l'heure de son lever ou de son coucher, en réduisant cet arc semi-diurne en temps, & l'ôtant du temps du passage du même astre au méridien, ce qui donne le moment du lever; ou bien l'ajoutant au temps du passage de l'astre au méridien, ce qui donne le

(*i*) Cette méthode est sur-tout utile pour trouver l'heure en mer, & par conséquent pour avoir les longitudes; V. le *Traité de Navigation* de Bouguer, édition de la Caille, in-8°. le Guide du Navigateur, par M. Levêque, 1778, & le 24e Livre de mon Astronomie.

moment du coucher; le tout en ſuppoſant que la déclinaiſon de l'aſtre ne varie pas ſenſiblement dans l'intervalle du paſſage au méridien, au lever ou au coucher, ce qui ſe peut dire de tous les aſtres, excepté de la lune.

CHAPITRE II.

Des illuſions optiques cauſées dans les aſtres par le mouvement annuel de la Terre.

505. APRÈS avoir expliqué les circonſtances des illuſions optiques produites par le mouvement diurne ou de rotation de la terre, il faut maintenant examiner celles que le mouvement annuel y doit occaſionner. Mais il faut auparavant donner une théorie des mouvements affectés d'illuſions optiques, qu'on appelle *mouvements apparents & relatifs.*

ARTICLE PREMIER.

Théorie des mouvements apparents & relatifs, & de leurs Projections Ortographiques.

506. ON appelle *mouvement apparent* d'un objet, celui qu'un obſervateur en mouvement, & qui cependant s'imagine être en repos en quelque point fixe, attribue à un objet réellement en repos; & *mouvement relatif* d'un objet, celui qu'un obſervateur en mouvement & qui ſe croit en repos, attribue à cet objet auſſi en mouvement.

507. J'appellerai dans la ſuite *le vrai lieu de l'œil*, le point de l'Univers où ſe trouve réellement l'œil de l'obſervateur à un inſtant donné; & *le lieu imaginaire de l'œil*, le point de l'univers où l'obſervateur s'imagine être en repos.

508. Comme il ne s'agit ici que de mouvements circulaires, j'appellerai l'*orbite de l'œil*, la route que l'Obſervateur décrit réellement dans l'Univers; *le plan de l'orbite de*

l'œil, le plan ſur lequel cette orbite eſt couchée ; *orbite optique*, la route que l'objet paroît décrire dans le ciel.

509. J'appellerai *projection de l'orbite optique*, la figure que forment ſur un plan ſitué au-delà de l'orbite optique, les rayons viſuels tirés du lieu imaginaire de l'œil à tous les points de cette orbite, & interceptés par ce plan. Ou pour en donner une idée plus ſenſible, la figure qu'auroit ſur un plan l'ombre de l'orbite éclairée par une lumiere placée au lieu imaginaire de l'œil.

510. Si les rayons viſuels interceptés par le plan ſont tous perpendiculaires à ce plan, la projection s'appelle *ortographique*.

511. J'appellerai *plan de comparaiſon* un plan qui paſſe par le lieu imaginaire de l'œil & par l'objet, & qui eſt perpendiculaire au plan de l'orbite de l'œil. De ſorte que ſi l'objet eſt fixe, le plan de comparaiſon eſt fixe, & ſi l'objet eſt mobile, ce plan eſt mobile, & a la même vîteſſe angulaire que l'objet.

512. Probleme. *Etant donnés de poſition le lieu imaginaire* S (fig. 46) *de l'œil, & tant de points* A, B, C *qu'on voudra de la route réelle d'un mobile dans un plan quelconque, avec les points* a, b, c *où l'œil ſe trouve réellement aux mêmes inſtants, déterminer la route optique de ce mobile.*

513. Solution. Ayant tiré les lignes A*a*, B*b*, C*c*, par le point S, menez Sα, Sβ, Sγ, égales & paralleles à chacune ; & les points α, β, γ, ſeront ceux de la route optique. Car, par exemple, la droite Sα étant égale & parallele à *a*A, le point α eſt ſitué de la même maniere & à la même diſtance du point S, que le point A par rapport au point *a*. Donc l'obſervateur s'imaginant avoir ſon œil en S, il doit s'imaginer voir l'objet en α. Il en eſt ainſi des autres points β, γ, &c.

514. Coroll. I. *Le lieu vrai & le lieu imaginaire de l'œil, le lieu vrai & le lieu optique de l'objet, forment donc toujours un parallélogramme.* Le lieu vrai de l'objet & le lieu imaginaire de l'œil, ſont toujours aux extrêmités d'une des deux diagonales du parallélogramme, & le lieu optique de

l'objet avec le vrai lieu de l'œil, font aux extrêmités de l'autre diagonale.

515. Coroll. II. *Donc le lieu optique de l'objet eſt toujours dans une ſituation oppoſée à celle du vrai lieu de l'œil.*

516. Coroll. III. *Si l'objet eſt immobile en* A, (fig. 47) *l'orbite optique* α β γ *eſt une ligne égale à l'orbite réelle* a b c *de l'œil, & ſituée dans un plan parallele.* Car à cauſe des parallélogrammes *a* α, b β, c γ, dont S A eſt une diagonale commune, & une interſection commune de leurs plans, & dont les baſes S *a*, S *b*, S *c*, ſont ſituées ſur un même plan, qui eſt celui de l'orbite de l'œil, leurs paralleles & égales A α, A β, A γ, doivent être auſſi dans un même plan parallele au plan de l'orbite de l'œil, & former les angles α A β, β A γ, égaux aux angles *a* S *b*, *b* S *c*. Donc les points α, β, γ, doivent être dans une ligne égale à la ligne *a b c*, & dans un plan parallele, mais dans une ſituation oppoſée.

517. Coroll. IV. *Si l'objet eſt immobile & dans le plan de l'œil, ſon orbite optique eſt auſſi dans ce plan.*

518. Coroll. V. *Si l'objet eſt immobile & ſitué dans le lieu imaginaire de l'œil, il paroît être à l'extrémité d'un rayon égal, & dans la même direction que celui qui eſt tiré du vrai lieu de l'œil au centre.* Ainſi ſi l'œil décrit un cercle ou une ellipſe dont l'objet & le lieu imaginaire de l'œil occupent le centre, l'objet paroît à l'extrêmité du diametre qui paſſe par l'œil, & par conſéquent il paroît décrire la même orbite que l'œil.

519. Coroll. VI. *Si l'objet eſt immobile, l'arc qu'il décrit dans ſa route optique eſt égal à celui que l'œil decrit réellement dans ſon orbite.*

520. Remarque. Nous ſuppoſerons dans la ſuite que la route de l'œil eſt un cercle, & que le lieu imaginaire eſt au centre. Dans cette hypotheſe ſi l'objet eſt immobile, ſoit en-dedans ſoit en-dehors de cette orbite, il eſt clair (516) que ſa route optique ſera auſſi un cercle que j'appellerai dans la ſuite l'*Epicycle* de l'objet.

521. Lemme I. *Le plan d'un petit cercle* H L (fig. 50)

parallele au plan d'un grand cercle Q I *de la sphere, est incliné au plan* F G *qui touche la sphere en un point* H *par où passe le parallele, du complément de l'arc de la distance* QH *du parallele au grand cercle; & son rayon* H L *est au rayon* Q I *du grand cercle, comme le cosinus de la distance* Q H, *est au sinus total.*

522. Car l'angle M H L de l'inclinaison du plan FG avec le plan du parallele H L, est le complément de l'angle L H I qui est égal à l'angle H I Q, mesuré par l'arc Q H. On voit aussi que H L est le cosinus de Q H.

523. LEMME II. *Si de tous les points* A, M, D, B, C, (fig. 53) *de la circonférence d'un cercle situé sur un plan* O N C *incliné à un autre plan* N O G I, *on abaisse sur ce plan* O G *des perpendiculaires* A a M m, B b, C c, *&c. elles aboutiront toutes dans la circonference d'une ellipse* a D b c, *dont le grand axe* a b *sera égal & parallele à celui des diametres du cercle qui se trouvera parallele au plan* N O G I, *ou à son intersection* O N : *& le petit axe* c D *sera dans un même plan que le diametre* C D *qui se trouvera perpendiculaire au plan* O G *ou à son intersection* O N, *de sorte que ce petit axe* c D, *sera au grand axe* a b, *comme le cosinus de l'inclinaison des plans* O G, O N C, *est au sinus total.*

524. DEM.. Le diametre A B étant celui des diametres du cercle A C B D qui est parallele au plan O G, & les perpendiculaires A*a*, B*b*, étant aussi paralleles, la figure A *a b* B est un parallélogramme rectangle, donc A B = *a b*. Le diametre C D perpendiculaire à O N & à A B, coupe en deux également ces deux droites; ainsi le plan *c* D C dans lequel se trouvent le point commun D, & la perpendiculaire C*c*, est un plan perpendiculaire au plan O G, & également éloigné des plans paralleles *b* N B, *a* O A. Donc, 1°. *c*D coupe perpendiculairement *a b* en deux parties égales. 2°. L'angle *c* D C est égal (Elem. 630) à l'inclinaison des deux plans O G, O N C. 3°. A cause des triangles rectangles semblables *c*D C, *f* D F, les parties *c f*, *f* D de la droite *c* D sont égales entr'elles aussi bien que C F, F D. Si donc *ab* est un axe de l'ellipse, *c* D qui la coupe perpendiculairement en deux parties égales, & qui est coupée de même doit être l'autre axe. 4°. Dans le triangle D *c* C rectangle en *c*, le côté D *c* est à l'hypoténuse D C = *ab*, comme le sinus de D*c*C, complément de *c*D*c*, est au sinus total. Donc les axes *c*D, *ab*, sont entr'eux comme le cosinus de l'inclinaison des plans est au sinus total.

525. Reste donc à faire voir que la courbe *a c b* D est une ellipse.

Menez une ordonnée quelconque MP au cercle, & abaissez sur le plan OG les perpendiculaires M*m*, P*p*. Le point P étant dans le diametre AB, la perpendiculaire P*p* est parallele à A*a* ou à B*b*, & dans le plan du rectangle A*ab*B. Elle tombe par conséquent sur la ligne *ab* en un point tel que $ap = AP$, & $pb = PB$. Mais parce que PM est perpendiculaire à AB & à ON, & parallele à DC, le plan PX*p* où se trouvent les deux perpendiculaires P*p*, M*m*, est parallele au plan *c*DC; donc *pm* est perpendiculaire sur *ab*, & est une ordonnée à la courbe *ac*D*b*; par la même raison les triangles *p*XP, *m*XM, *c*DC, sont semblables; donc $pm : PM :: cD : CD$ ou *ab*. Donc (Elem. 308) $pm^2 : PM^2 :: cD^2 : ab^2$. Or (Elem. 565) $PM^2 = AP \times PB = ap \times pb$. Donc $pm^2 : ap \times pb :: cD : ab^2$. Donc la courbe *acb*D est une ellipse (Elem. 820).

526. COROL. I. L'ellipse *acb*D est la projection ortographique du cercle ACBD (509).

527. COROLL. II. A cause du parallélisme des plans semblables *f*DF, *pm*MP, on a $pm : PM :: pX : PX :: Df : DF$; & à cause du parallélisme des droites *ab*, AB, on a $pf = PF$: donc *la projection* Dm *d'un arc quelconque* DM *est telle, que l'ordonnée* mH *au petit axe de l'ellipse est égale à* PF *sinus de l'arc* DM : car $mH = pf = PF$: *& l'ordonnée* mp *au grand axe, est au cosinus* MP *de ce même arc* DM, *comme* fD *à* FD, *ou comme le petit axe de l'ellipse est au grand axe* (Elem. 895).

528. COROLL. III. Etant donc donnée une ellipse *acbd* (fig. 49) qui soit la projection ortographique d'un cercle, pour la diviser en degrés, ou en arcs d'un certain nombre de degrés, il faut décrire un cercle *a*MD*b*C sur le grand axe de cette ellipse; & ayant divisé ce cercle en degrés ou en arcs DM, DM, &c. suivant le nombre de degrés donnés, en commençant par un des diametres comme CD qui sont dans la direction des axes, il faut abaisser de tous les points de divisions M, M, &c, des perpendiculaires MP, MP, &c. qui détermineront sur l'ellipse les points de projections *m*, *m*, &c. Car les abscisses FP, FP, &c. sont comme les sinus des arcs DM, DM, &c. & les ordonnées P*m*, P*m*, &c. sont aux PM, PM, &c. correspondantes, comme le petit axe est au grand axe.

529. COROLL. IV. Si une ellipse de projection étoit infiniment étroite, ou réduite à son seul grand axe *ab*, (ce

qui doit toujours arriver (535) lorſque l'œil eſt dans le plan du cercle projetté), on diviſeroit cette projection en degrés, en prenant ſur ce grand axe depuis ſon milieu F, des parties F P, F P, &c. qui fuſſent dans le rapport des ſinus du nombre des degrés donné.

550. SCHOLIE. *On peut encore diviſer une ellipſe en ſes degrés par le moyen d'un cercle* CNdO *décrit ſur ſon petit axe*, & diviſé en arcs *d*I, *d*I, &c. d'autant de degrés que les arcs DM, DM, &c. & en menant les ſinus IH, IH, &c. prolongés juſqu'à la rencontre de l'ellipſe qui ſe fera aux mêmes points *m*, *m*, &c. Car à cauſe des arcs DM, *d*I d'un égal nombre de degrés, leurs ſinus & leurs coſinus ſont entr'eux comme les rayons FD, F*d*: donc, 1°, KM ou FP : HI : : FD : F*d*. Or (Elem. 895) H*m* : HI : : FD : F*d*; donc H*m* = FP, donc les deux cercles donnent le point *m* à la même diſtance de l'axe *cd*. 2°. PM ou FK : FH : : FD, F*d*; or PM : P*m* : : FD : F*d*; donc FH = P *m*, donc les deux cercles donnent le point *m* à la même diſtance de l'axe *ab*. Donc ils donnent le même point de l'ellipſe.

531. *Delà on tire une maniere fort commode de décrire ſur deux axes donnés* ab, cd, *une ellipſe ou une portion d'ellipſe qui ſoit en même-temps diviſée comme on voudra.* Car ayant décrit un cercle ſur chaque axe, & ayant diviſé leurs circonférences en arcs ſemblables DM, *d*I, ſuivant le nombre de degrés donnés, & en commençant la diviſion par un diametre CD commun aux deux cercles; chaque droite MP parallele au diametre commun CD, & paſſant par tous les points M, donnera autant de points *m*, *m*, &c. de l'ellipſe par ſon interſection avec chaque droite H *m* qui paſſant par les points I, correſpondants aux points M, ſera perpendiculaire au même diametre commun CD.

523. THEOR. I. *Si la vraie orbite de l'œil qui ſe croit immobile en* S (fig. 53) *eſt un cercle fini, & ſi l'objet* F *eſt immobile & à une diſtance immenſe de l'œil, l'orbite optique* ACBD *de cet objet* F, *ne répondra qu'à une très-petite partie du fond du ciel, qu'on pourra par conſéquent conſidérer comme plane, & ſa projection ſera une ellipſe* acbD, *dont le grand axe* ab *ſera parallele au plan* QRS *de l'orbite de l'œil, & égal à l'arc céleſte* ab *intercepté par les deux rayons menés du lieu imaginaire* S *de l'œil par les deux extrêmités* A, B, *du diametre* AB, *qui ſe trouve parallele au plan* ONGI; *& dont le petit axe* cD *eſt dans le plan de comparaiſon, ou dans le plan* QDS *perpendiculaire au plan* QRS *de l'orbite de l'œil. Enfin le petit*

axe est au grand, comme le sinus de l'arc Q D *qui mesure la distance du plan* Q R S *de l'orbite de l'œil au plan* O N C *de la route optique, est au sinus total.*

533. DEM. Puisqu'on a supposé que le cercle A C B D est à une distance comme infinie de l'œil S, & puisque les rayons qui aboutissent du centre d'une sphere à sa circonférence y sont perpendiculaires, il est clair que les droites A*a*, B*b*, C*c*, &c., sont censées des paralleles qui aboutissent perpendiculairement à la petite partie N O G I du fond du ciel, qui fait un plan incliné au plan O N C. Donc (525) la courbe *a c b* D est une ellipse dont le grand axe *a b* est égal au diametre A B du cercle A C B D, & par conséquent au diametre de l'orbite de l'œil, & le petit axe *c* D est perpendiculaire au plan de l'orbite de l'œil, & est au grand axe *a b*, comme le sinus de l'arc Q D ou Q *f* au sinus total.

534. COROLL. I. La projection *a c b* de la partie A C B qui est du côté de l'œil, ou qui en est la plus proche, est la partie de l'ellipse la plus éloignée du plan de l'œil : au contraire, la projection *b* D *a* de la partie du cercle B D A qui est du côté opposé à l'œil, ou qui en est la plus éloignée, est la partie de l'ellipse la plus proche du plan de l'orbite de l'œil.

535. COROLL. II. Plus la droite S F tirée de l'œil à l'objet, approche d'être perpendiculaire au plan de l'orbite véritable de l'œil, plus l'arc Q *f* approche de 90°, & par conséquent, plus la projection de l'orbite optique est une ellipse ouverte & approchante du cercle; de sorte que si l'orbite optique répondoit au pole Z du grand cercle dans le plan duquel est l'orbite de l'œil, sa projection seroit un cercle, parce qu'alors les deux axes de l'ellipse seroient égaux : mais si l'orbite optique est dans le même plan que l'orbite de l'œil, alors Q *f* étant infiniment petit ou nul, la projection de l'orbite optique est une ellipse si étroite, qu'elle n'est proprement qu'une ligne droite égale au grand axe de l'ellipse, ou au diametre de l'orbite optique.

536. COROLL. III. Donc quand un objet céleste F est immobile dans le ciel, & à une très-grande distance de l'œil de

de l'obſervateur qui ſe croit en repos en S au centre du cercle qu'il décrit réellement, 1°, cet objet ne doit jamais paroître au vrai lieu *f* où aboutit le rayon viſuel ; mais il doit paroître décrire autour de ce vrai lieu *f* une ellipſe *a c b* D à chaque révolution réelle de l'œil dans ſon orbite, & par conſéquent il doit paroître aller tantôt dans un ſens *a c b* en décrivant une demi-ellipſe, tantôt dans un ſens contraire *b* D *a*, en décrivant l'autre demi-ellipſe. On appelle cela être *direct*, puis *rétrograde*. 2°. Il doit avoir des vîteſſes fort inégales ; car lorſqu'il eſt vers un des bouts *c* ou D du petit axe, l'eſpace qu'il parcourt étant expoſé directement à la vue, l'objet paroît aller fort vîte, enſuite il rallentit ſon mouvement à meſure qu'il approche d'un des ſommets *a* ou *b* de ſon ellipſe ; parce que les arcs qu'il décrit ſont plus obliques aux rayons viſuels, de ſorte que l'objet étant à l'extrêmité de chaque grand axe de ſon ellipſe, il paroît comme *ſtationnaire* ou immobile à l'égard de chacun des deux ſens oppoſés dont on vient de parler, puis il change de direction, & ainſi de ſuite.

537. COROLL. IV. *Connoiſſant la grandeur du diametre de l'orbite réelle de l'œil, & par conſéquent celle du grand axe* a b *de la projection de l'orbite optique qui lui eſt égale, on peut en conclure la diſtance réelle du lieu imaginaire de l'œil au centre de l'orbite optique de l'objet, c'eſt-à-dire, à l'objet même.*

538. Car alors les deux rayons viſuels qui vont du lieu imaginaire S de l'œil aux deux extrêmités de cet axe *a b*, ſont les deux côtés égaux d'un triangle iſoſcele dont cet axe eſt la baſe. La droite menée du lieu imaginaire de l'œil S au milieu *f* de cet axe diviſe donc (Elem. 500) ce triangle iſoſcele en deux triangles rectangles égaux dans chacun deſquels on connoît un angle qui eſt meſuré par la moitié de l'arc *a b*, & un côté oppoſé qui eſt la moitié de l'axe *a b* : on peut donc calculer par la Trigonométrie la valeur de cette perpendiculaire S *f*, tirée au centre de l'orbite optique.

539. LEMME III. Si ſur la circonférence & dans le plan d'un cercle ABC (fig. 56), on ſuppoſe un autre cercle AMDP, qui n'ait d'abord d'autre mouvement que de tourner ſur ſon centre O dans le

ſens des lettres A, M, D, P; il eſt clair que quoiqu'un point quelconque A de ſa circonférence ait en tournant toutes les directions poſſibles, cependant à l'égard du centre S, il n'a proprement que deux directions oppoſées, l'une que j'appellerai *directe* lorſqu'il décrit le demi-cercle MDP, que je nommerai *le demi-cercle ſupérieur*, & l'autre que j'appellerai *rétrograde*, lorſqu'il décrit le demi-cercle inférieur PAM.

540. Mais ſi on ſuppoſe que le centre O du cercle AMDP ſoit entraîné dans le ſens direct OIN, en ſorte que ce cercle ſoit obligé de rouler comme une roue ſur la circonférence ABC, alors il eſt clair, 1°. que la route de ce centre eſt un cercle OIN concentrique, & par conſéquent plus grand que le cercle ABC.

541. 2°. Que le retour du point A ſur la circonférence du cercle ABC ne ſe fait que lorſqu'il a décrit un tour entier ſur ſon centre O, plus un arc BL de ſon cercle, d'un nombre de degrés égal à celui des degrés de l'arc AB compris entre le point A de départ, & le point de retour B. Car ſi le point A en partant, eſt vu d'un point fixe infiniment éloigné dans la direction du rayon OH, ſa révolution entiere autour de ſon centre eſt achevée réellement, lorſqu'il ſe retrouve dans le rayon dirigé à ce même point fixe; car alors le cercle ABC vu d'une diſtance infinie, eſt cenſé n'avoir aucune étendue ſenſible. Lors donc que le point A eſt retourné en B ſur le cercle ABC, ſi par le centre I on tire IL*h* parallele à AH, ces deux droites ſe confondront au point fixe, & le point L eſt celui où devroit être le point A s'il n'avoit fait réellement qu'un tour ſur ſon centre O; donc étant en B, il a décrit ſon cercle entier plus l'arc BL, qui a un même nombre de degrés que OI ou AB à cauſe des paralleles I*h*, AH : quoiqu'à l'égard du point S, le point A paroiſſe n'avoir fait réellement qu'un tour autour de ſon centre.

542. 3°. Que ſi on marque la trace A*e*Q*g*BKC que le point A décrit à chaque retour au cercle ABC, on aura au premier une courbe A*e*Q*g*B, qu'on appelle *Epicycloïde*, au ſecond retour une autre épicycloïde BKC, & ainſi de ſuite. Or il peut arriver trois cas....

543. I. CAS. Si le cercle ABC reſte immobile pendant que AMDP roule ſur ſa circonférence (fig. *56*), alors chaque épicycloïde comme A*e*Q*g*B eſt appellée *ſimple* ou *ordinaire*, & l'on voit évidemment qu'elle doit avoir les propriétés ſuivantes.

544. 1°. Avec quelque inégalité de vîteſſe que le cercle roule, l'arc AB, (que j'appellerai *la baſe* de l'épicycloïde) eſt égal à la circonférence AMDP de ce cercle.

545. 2°. Si on diviſe l'arc OI, ſemblable à l'arc AB, en quatre parties égales aux points E, F, G, on aura le point E pour le lieu du centre du cercle AMDP, à l'inſtant que le point A avoit décrit en tournant, un quart de ſon chemin pour retourner ſur le cercle ABC. Il en eſt de même des points F, G, I où le centre du cercle AMDP ſe trouve à la fin de chaque quart de ſon retour ſur la circonférence ABC. Ainſi, ſi par le point F on prolonge un rayon SF

il déterminera le point Q du ſommet de l'épicycloïde, & la partie QT de ce rayon en ſera l'axe, lequel eſt égal au diametre du cercle AMDP. Et ſi du point E comme centre, avec un rayon égal à OA, on décrit vers O un arc de cercle, il rencontrera l'épicycloïde au point *e* où étoit le point A, lorſque le centre O étoit en E. On trouvera de même que le point A étoit au point *g*, lorſque le centre étoit en G; d'où il ſuit, que l'arc A*e* a été décrit, tandis que le point A rétrogradoit, en décrivant une moitié de ſon demi-cercle inférieur; que l'arc *e*Q*g* a été décrit, tandis que A décrivoit ſon demi-cercle ſupérieur par un mouvement direct; qu'enfin l'arc *g*B a été décrit, tandis que le point A rétrogradoit dans l'autre moitié de ſon demi-cercle inférieur.

546. 3°. Le ſommet Q de l'épicycloïde eſt au milieu des branches A*e*Q, Q*g*B, égales & ſemblablement poſées à l'égard de l'axe TQ.

547. 4°. Les arcs A*e*, *g*B, doivent être recourbés vers l'axe TQ, parce qu'ils répondent au mouvement rétrograde du point A qui le porte en ce ſens; mais ils ne doivent pas rentrer en-dedans comme dans la fig. 54, parce que la route OI du centre A étant plus grande à chaque révolution, que n'eſt l'arc AB qui eſt égal à la circonférence du cercle AMDP, le mouvement de ce centre dans le ſens OIN entraîne plus le point A vers K, que le mouvement rétrograde de ce point autour du centre O, ne le porte dans le ſens oppoſé.

548. 5°. Le paſſage du point décrivant A d'une branche Q*g*B, dans la branche BK de l'épicycloïde ſuivante, ſe fait par un angle en B, parce que dès l'inſtant que le point décrivant eſt arrivé en B, en décrivant le dernier côté infiniment petit de l'épicycloïde AQB, il remonte auſſi-tôt par le premier côté infiniment petit de l'autre épicycloïde BKC, & ne décrit aucun eſpace entre ces deux côtés.

549. 6°. Le point A conſidéré du point S, paroît donc toujours direct; mais la vîteſſe angulaire paroît s'accélérer tout le long de la branche A*e*Q, être la plus grande au ſommet Q, puis diminuer le long de la branche Q*g*B, en ſorte qu'au point B elle eſt comme nulle, puis elle paroît s'accélérer de nouveau dans la branche BK.

550. II. CAS. Si pendant que le cercle AMDP roule ſur ABC, celui-ci vient à tourner ſur ſon centre S dans le même ſens ABC (fig. 55). ou en général, ſi le centre du cercle AMDP s'avance dans le cercle OFI avec une vîteſſe angulaire plus grande que celle avec laquelle le corps A tourne dans le cercle AMDP, alors l'épicycloïde décrit pendant l'intervalle d'un retour du point A eſt *allongée;* & il eſt clair qu'elle doit avoir les propriétés ſuivantes.

551. 1°. Puiſque tous les points de l'épicycloïde ſimple ſont avancés vers C, quoique le cercle ABC ſoit en repos, ſi ABC s'avance lui-même dans ce ſens, la vîteſſe du point décrivant doit être plus grande dans cette direction, & en rendre par conſéquent les eſpaces plus longs, de ſorte que la baſe AB de l'épicycloïde doit être égale à la ſomme de la circonférence du cercle AMDP, & de l'arc du cercle ABC révolu pendant l'intervalle d'un retour.

552. 2°. Si les mouvements des deux cercles sont uniformes, les points E, F, G qui partagent OI en quatre parties égales, détermineront de même que ci-dessus les arcs d'épicycloïdes A e, e Q, Q g, g B, qui répondent au mouvement du point A dans les parties inférieures & supérieures de son cercle, & on aura de même l'axe T Q égal au diametre AD, & les branches A e Q, Q g B égales & semblablement posées à l'égard de cet axe.

553. 3°. Les arcs A e, g B, sont d'autant moins recourbés vers l'axe T Q, que la vîtesse du cercle ABC est plus grande.

554. 4°. Le passage du point décrivant de la branche Q g B dans la branche BK, ne se fait pas par un angle, mais par une courbure en B d'autant plus ouverte, que la vîtesse du cercle ABC est plus grande. Car alors cette vîtesse fait descendre le point A d'autant plus obliquement le long de la branche Q g B; & lorsque ce point est en B, elle lui fait décrire un petit espace sur ACB, avant qu'il remonte dans la branche BK, de sorte que ce passage se fait par la courbe g BK.

555. 5°. Le point A considéré du point S, est toujours direct, & sa vîtesse angulaire s'accélere toujours depuis A jusqu'en Q, puis va en diminuant de Q en B, où elle ne paroît pas nulle, mais seulement égale à la vîtesse angulaire du cercle ABC.

556. III. Cas. Si pendant le temps du retour du point A sur le cercle ABC, ce cercle tournoit lui-même sur son centre dans un sens opposé, ou en général si le centre du cercle AMDP s'avance dans le cercle OFI avec une vîtesse angulaire moindre que celle avec laquelle le corps A tourne dans le cercle AMDP, l'épicycloïde deviendroit *accourcie*. Ce cas pourroit être subdivisé en plusieurs autres; mais pour ne pas compliquer inutilement cette théorie, nous supposerons seulement que la vîtesse rétrograde du cercle ABC est moindre que celle du point A dans son cercle AMDP. Dans cette hypothese. . . .

557. 1°. Si le cercle ABC (fig. 54) eût resté immobile, aucun des points de l'épicycloïde n'auroit rétrogradé; mais parce que ABC rétrograde, son mouvement doit augmenter la vîtesse angulaire du point A dans le demi-cercle inférieur où il rétrograde, & la diminuer dans le demi-cercle supérieur où il est direct. D'où il suit que l'étendue de l'épicycloïde en sera diminuée dans le sens ABC, & que sa base AB sera égale à la différence entre la circonférence du cercle AMDP, & l'arc du cercle ABC révolu pendant le temps du retour du point A.

558. 2°. En supposant les deux mouvements uniformes, on trouvera comme ci-dessus les arcs A e, e Q, Q g, g B, qui répondent aux parties inférieures & supérieures du cercle AMDP; l'axe TQ = AD, & les branches A e Q, Q g B égales & semblablement posées à l'égard de l'axe T Q.

559. 3°. Les arcs A e, g B qui répondent au mouvement rétrograde du point A, sont d'autant plus recourbés vers l'axe T Q, que la vîtesse du cercle ABC est plus grande, & ils doivent rentrer en-dedans,

parce que le point A se meut alors par la somme des deux mouvements contraires à la tendance vers C.

560. 4°. Le passage du point A par le point B se doit faire par une courbe rentrante $g B m$, parce qu'à l'instant où il est arrivé en B, en décrivant le dernier côté infiniment petit de la branche $Q g B$, la vîtesse rétrograde du cercle ABC l'entraîne, & lui fait décrire un petit espace vers m avant que le point A remonte par la branche $B m K$.

561. 5°. Le point A considéré du point S, doit paroître tantôt direct, tantôt rétrograde, tantôt immobile ou *stationnaire*. Car si du point S on tire les tangentes $S m$, $S n$, $S t$, $S y$, on verra que le point A doit paroître direct en décrivant tout l'arc $n Q g t$, parce que tous les points de cet arc sont dirigés vers C : que le point A étant dans la tangente $S t$, doit paroître *stationnaire*, c'est-à-dire, ne tendre ni vers C, ni vers O, pendant tout le temps employé à décrire l'arc de la courbe confondu avec cette tangente : qu'ensuite le point A doit aller en rétrogradant dans l'arc $t B m$, c'est-à-dire, dans l'arc compris entre les deux tangentes ; qu'étant au point m il doit paroître encore stationnaire ; qu'enfin il doit paroître direct dans l'arc $m K y$ jusqu'à ce qu'il redevienne stationnaire en y pour commencer à rétrograder de nouveau, & ainsi de suite. Ainsi pendant chaque révolution du point A dans son cercle, il paroît deux fois stationnaire, une fois direct, & une fois rétrograde.

562. 6°. On voit aussi que la vîtesse angulaire du point A doit paroître nulle dans les points de stations, puis s'accélérer jusqu'au sommet ou au bas de la courbe, où elle paroît la plus grande, parce que les arcs décrits sont exposés directement à l'œil, ensuite diminuer depuis ces points jusqu'au point de station suivant.

563. 7°. L'arc de rétrogradation $t B m$ doit être d'autant plus grand, que la vîtesse angulaire rétrograde du cercle ABC est plus grande.

564. COROLLAIRE. On voit donc en général que dans ces sortes de mouvements, l'espece de l'épicycloïde dépend du rapport de la grandeur de sa base AB à celle de la circonférence du cercle que parcourt le point décrivant.

565. SCHOLIE. Si dans le second & le troisieme cas, le mouvement des deux cercles n'étoit pas uniforme, l'épicycloïde seroit moins réguliere, l'arc TQ ne seroit pas au milieu entre les branches $A e Q$, $Q g B$, & ces branches ne seroient ni égales, ni semblablement posées) l'une seroit plus allongée que l'autre, selon que la combinaison des deux vîtesses y contribueroit plus d'un côté que d'un autre. Mais l'épicycloïde auroit toujours à-peu-près la même figure ; c'est-à-dire, elle auroit toujours une courbure vers B, disposée de la même maniere qu'elle est représentée dans les figures 54 & 55.

566. De cette théorie générale, nous ne déduirons que ce qui s'en doit appliquer aux phénomenes des mouvements des planetes, telles qu'elles sont arrangées dans notre systême solaire.

567. THEOREME II. *Si un objet & un œil tournent dans le même sens avec des vîtesses angulaires uniformes* V, u, *dans deux cercles concentriques dont le lieu imaginaire de l'œil occupe le centre, & dont les rayons soient* R, r : *l'orbite optique de l'objet est une courbe composée d'autant d'épicycloïdes que l'œil se trouvera de fois dans le plan de comparaison du même côté ; & ces épicycloïdes sont simples, allongées ou accourcies, selon que* V R — V r *est égal, plus grand ou plus petit que* u r — V r, *si l'œil parcourt le cercle intérieur ; mais s'il parcourt le cercle extérieur, l'espece des épicycloïdes dépend du rapport de* u r — u R *à* V R — u R.

568. DEM. Quand l'objet est immobile, & l'œil mobile dans un cercle, l'œil qui se croit immobile au centre de son orbite ne voit jamais l'objet dans son vrai lieu ; mais il lui paroît décrire autour de ce vrai lieu un cercle égal à celui que décrit l'œil, & avec une même vîtesse (518). Donc si l'objet & l'œil sont en même temps mobiles dans des cercles concentriques, le mouvement de l'objet par rapport au lieu imaginaire de l'œil doit paroître composé d'un mouvement de révolution dans un épicycle autour du vrai lieu de l'objet, & du mouvement réel du centre de cet épicycle dans l'orbite de l'objet. Donc cet objet, par rapport au lieu imaginaire de l'œil, est dans le même cas que le point A (fig. 54, 55, 56), considéré du point S ; donc la route optique de l'objet doit être une suite d'autant d'épicycloïdes que l'œil retournera de fois du même côté dans le plan de comparaison, (car ce n'est qu'à ce retour que l'objet paroît, à l'égard du point S, avoir fait une révolution entiere dans son épicycle) & l'espece de ces épicycloïdes dépend du rapport de la grandeur absolue de la circonférence de l'épicycle ou de l'orbite de l'œil, à la grandeur de l'arc AB semblable à l'arc O I, que l'objet a parcouru réellement pendant l'intervalle du retour de l'œil au plan de comparaison.

569. I°. Pour trouver les expressions de ces deux grandeurs, il faut remarquer qu'à cause que l'œil & l'objet vont dans le même sens, l'œil ne retourne dans le plan de comparaison, qu'en vertu de l'excès de sa vîtesse sur celle de

l'objet. Si donc on fait cette analogie : Comme l'excès $u - V$ des vîtesses angulaires de l'œil & de l'objet pendant un même temps, est à la vîtesse V de l'objet pendant ce même temps, ainsi $360°$, somme des excès de vîtesses angulaires que l'œil doit acquérir par rapport à l'objet, pour se retrouver dans le plan de comparaison, sont à $\frac{360° \times V}{u - V}$, somme des vîtesses angulaires de l'objet pendant l'intervalle de ce retour ; on aura $\frac{360° \times V}{u - V}$ pour l'expression de l'angle OSI ou ASB qui est la somme des vîtesses angulaires de l'objet. Or le rayon de l'arc AB qui mesure l'angle ASB est $SO - AO = R - r$, & (124) un arc = angle × rayon : Donc la grandeur absolue de l'arc AB est $\frac{360° \times V}{u - V}(R - r)$. Par la même raison, celle de l'épicycle APDM est $360° \times r$: donc l'arc AB est à l'épicycle APDM, comme $\frac{360° \times V}{u - V}(R - r)$ à $360° \times r$, ou comme $\frac{V}{u - V}(R - r)$ à r, ou comme $VR - Vr$ à $ur - Vr$; ou enfin comme $\frac{R - r}{r}$ à $\frac{u - V}{V}$.

570. II°. Si l'orbite MDP de l'objet (fig. 57) est renfermée dans celle de l'œil, comme si l'œil parcourt réellement l'arc ab dans l'intervalle d'un retour de l'œil au plan de comparaison du même côté, le centre S de l'orbite réelle de l'objet paroîtra (519) parcourir l'arc égal OI, & parce que l'objet fait en même temps une révolution réelle dans son cercle MDP, il paroît à l'œil situé au lieu imaginaire S, que cet objet tourne dans un cercle égal à MDP, tandis que le centre de ce cercle décrit l'arc OI. Donc l'orbite optique de l'objet doit encore être une courbe AQBKC composée d'épicycloïdes dont l'espece dépend du rapport de l'arc AB à la circonférence du cercle MDP. Or l'arc AB est égal à la somme des vîtesses angulaires de l'œil pendant l'intervalle d'un de ses retours au plan de comparaison, le rayon de cet arc est

$r - R$, & on voit, comme ci-dessus, que MDP $= 360^\circ \times R$, l'arc AB $= \frac{360^\circ \times u}{V - u} (r - R)$. Donc l'espece de ces épicycloïdes dépend du rapport de $ur - uR$ à $VR - uR$, ou de $\frac{r - R}{R}$ à $\frac{V - u}{u}$.

571. COROLL. I. *Soit que les vîtesses de l'objet & de l'œil soient uniformes ou non, le lieu apparent de l'objet est toujours au sommet de l'épicycloïde, lorsque le vrai lieu de l'œil étant dans le plan de comparaison, le lieu imaginaire est entre lui & l'objet; & le lieu apparent de l'objet est toujours au bas de l'épicycloïde, lorsque le vrai lieu de l'œil étant dans le plan de comparaison, il est entre l'objet & le lieu imaginaire de l'œil, ou que l'objet est entre le vrai lieu de l'œil & son lieu imaginaire.* Car le sommet de l'épicycloïde est le point le plus éloigné du centre S qu'il est possible, & le bas de l'épicycloïde en est le point le plus près. Or il est évident (Elem. 546) que quand l'œil est dans le plan de comparaison, & au-delà du lieu imaginaire de l'œil par rapport à l'objet, il est le plus loin de l'objet qu'il est possible; au lieu que quand il est en-deçà, ou que l'objet est entre lui & le lieu imaginaire S de l'œil, l'œil est le plus près de l'objet qu'il est possible. Donc dans le premier cas, le lieu apparent de l'objet est le plus loin qu'il est possible du lieu imaginaire de l'œil; & dans les deux autres cas, il en est le plus près qu'il est possible.

572. COROLL. II. *Les projections des épicycloïdes dans le fond du ciel, doivent être des especes d'épicycloïdes elliptiques, dont les axes TQ sont entr'eux comme les sinus des arcs célestes qui mesurent la distance du plan de l'œil au plan de l'épicycle de l'objet* (532), *& dont les sommets Q, K doivent paroître les points les plus près du plan de l'œil, & les extrémités A, B, C, doivent paroître les points les plus éloignés du plan de l'orbite de l'œil* (534) (*m*).

(*m*) V. l'application aux rétrogradations des planetes (596).

ARTICLE II.

Application de la Théorie précédente aux phénomenes causés par le mouvement annuel de la Terre.

573. POUR appliquer la théorie précédente aux phénomenes que le mouvement annuel de la terre doit produire, il faut remarquer, 1°. que ce que nous avons appellé en général *le plan de l'orbite de l'œil* est le plan de l'écliptique. 2°. Que l'orbite de l'œil est l'ellipse que la terre décrit réellement chaque année autour du soleil, & qui ne différe pas beaucoup d'un cercle, puisque son grand axe est à son petit comme 2000,142 à 1999,857. 3°. Que comme il paroît que c'est le soleil lui-même qui décrit cette ellipse autour de la terre, & que la terre occupe le centre de tous les mouvements célestes, quoique ce soit le contraire, ce que nous avons appellé *le lieu imaginaire de l'œil*, est le vrai lieu du centre du soleil. 4°. Que le plan de comparaison est le plan d'un grand cercle perpendiculaire à l'écliptique qui passe par le soleil & par l'astre qu'on observe. C'est donc (445) le plan d'un cercle de latitude; lorsque l'œil se trouve dans ce plan, & qu'il voit le soleil & l'astre du même côté, l'astre paroît avoir la même longitude que le soleil, ce qui s'appelle *être en conjonction avec le soleil*, & ce cas ne peut arriver que d'une maniere, si l'orbite de l'astre renferme celle de la terre : mais il peut arriver de deux manieres, si l'orbite de la terre embrasse celle de l'astre. Car alors on peut voir le soleil & l'astre du même côté, mais l'astre au-delà du soleil & cette conjonction s'appelle *Supérieure ;* ou bien l'astre peut être endeçà entre la terre & le soleil, & cette conjonction s'appelle *Inférieure.* Mais lorsque l'œil se trouve dans le plan de comparaison entre l'astre & le soleil, ces deux objets lui paroissent différer de 180 degrés en longitude; alors on dit que l'astre *est en opposition avec le soleil.* En général, on dit qu'un astre est dans *les syzygies*, lorsqu'il est en con-

jonction ou en opposition. Enfin, lorsque l'œil est tellement éloigné de ce plan, que l'arc de l'écliptique compris entre le soleil & le plan du cercle de latitude de l'astre est de 90°, on dit que l'astre *est en quadrature avec le soleil.*

ARTICLE III.

Recherche des mouvements apparents des Etoiles fixes, causés par le mouvement annuel de la terre; Théorie de l'aberration des Etoiles causée par le mouvement successif de la lumiere.

574. SELON la théorie des mouvements apparents, si les étoiles sont réellement fixes, elles doivent paroître décrire tous les ans chacune une petite ellipse dans le ciel, qui est la projection de leur épicycle ou orbite optique. Le grand axe de cette ellipse doit être parallele au plan de l'écliptique (532), & égal à la corde de l'arc du fond du ciel que peut soutendre le diametre de l'épicycle de l'étoile, ou celui de l'orbite de la terre qui lui est égal (516), & par conséquent cet axe doit soutendre un arc d'autant plus petit, que l'étoile, (qui paroît située sur le fond même du ciel) sera plus éloignée de la terre (43). Le petit axe doit être perpendiculaire au plan de l'écliptique, c'est-à-dire, dans le plan du cercle de latitude qui détermine sur l'écliptique la longitude de l'étoile; & ce petit axe doit être au grand comme le sinus de la latitude de l'étoile, est au sinus total. L'étoile doit paroître située à l'extrêmité inferieure du petit axe, ou plus exactement à l'extrêmité la plus près du plan de l'écliptique, quand elle est en conjonction avec le soleil (534). Elle doit paroître située à l'extrêmité supérieure de ce petit axe, quand elle est en opposition avec le soleil : elle doit paroître à l'extrêmité orientale de son grand axe, lorsque la terre étant dans la partie occidentale de son orbite, l'étoile est en quadrature avec le soleil; & à l'extrêmité occidentale lorsque la terre étant dans la partie orientale de son orbite, l'étoile est en quadrature avec le soleil.

575. D'où il suit, I°. Que *lorsque l'étoile est en conjonction ou en opposition avec le soleil, on la doit voir dans sa vraie longitude*, parce qu'on la voit dans le plan du cercle de latitude qui passe par l'étoile, le soleil & l'œil; *mais on ne la doit pas voir dans sa vraie latitude;* car dans la conjonction où l'étoile est à l'extrêmité inférieure du petit axe, sa latitude apparente est la plus petite, ou différe de sa vraie latitude le plus qu'il est possible. Par une raison contraire elle est la plus grande dans l'opposition. *Et lorsque l'étoile est dans les quadratures, sa latitude apparente doit être égale à la vraie*, parce que l'étoile se trouve dans son grand axe, qui est parallele à l'écliptique, & qui passe par le vrai lieu de l'étoile; *mais sa longitude doit différer le plus qu'il est possible de la vraie.* Enfin, lorsque l'étoile est dans quelque situation autre qu'un de ces quatre, son lieu apparent doit différer tant en longitude qu'en latitude de son vrai lieu.

576. On appelle *Parallaxe de l'orbe annuel*, la différence entre le vrai lieu d'un astre vu du soleil, & son lieu apparent vu de la terre. Les différences en longitude s'appellent *Parallaxes de longitude*, & les différences en latitude s'appellent *Parallaxes de latitude.* Ainsi, on dit que *dans les syzygies la parallaxe de l'orbe annuel est nulle en longitude, mais elle est la plus grande en latitude; & dans les quadratures la parallaxe de l'orbe annuel est nulle en latitude, & la plus grande en longitude.*

577. II°. *Chaque étoile doit paroître directe pendant six mois;* dans la moitié inférieure de son ellipse, c'est-à-dire, en allant d'une quadrature par la conjonction à l'autre quadrature, *& rétrograde pendant six mois* dans la partie supérieure de son ellipse, en allant d'une quadrature par l'opposition à l'autre quadrature. Enfin elle doit paroître *stationnaire* dans chaque quadrature avec le soleil.

578. Par les observations les plus exactes qui ayent été faites de nos jours avec les instruments les plus excellents, ces mouvements sont absolument insensibles, de sorte que les Astronomes sont assurés que le grand axe des ellipses des plus belles étoiles, ne soutend gueres un arc céleste de plus

de 3 à 4 secondes ; parce que s'il étoit plus grand, on s'en appercevroit : d'où on peut calculer (537) que ces astres doivent être à une distance comme infinie, & qui excede 280000000000 de nos lieues, puisque le diametre de l'orbite de la terre est d'environ 54525000 lieues, comme on le verra dans le Chapitre suivant (*n*).

579. Les Astronomes du derniere siecle ayant cependant remarqué des variations annuelles assez sensibles dans toutes les étoiles (*o*), ils ont été surpris de ce qu'elles suivoient une loi très-différente de celle que nous venons d'expliquer. Les étoiles étoient aux extrêmités du petit axe de leur ellipse apparente, tandis que selon les regles précédentes, elles devoient être aux extrêmités du grand axe. Cette contrariété avoit obligé les Astronomes de prendre le parti de ne se servir des étoiles, qu'avec beaucoup de précautions dans les opérations délicates, pour éviter l'effet de ces mouvements inconnus, qu'on a appellés l'*Aberration des fixes*. Mais M. Moulineux, & ensuite M. Bradley, s'étant attachés à observer ces variations avec la plus grande précision possible, celui-ci a enfin découvert la vraie cause Physique de ce mouvement apparent, & il a donné les regles du calcul qu'il faut faire pour y avoir égard dans les observations des étoiles (*p*). C'est ce qu'il faut expliquer ici en peu de mots.

580. 1°. C'est un fait constant par les observations des Satellites de Jupiter, (comme on verra dans la suite) que la lumiere par laquelle nous voyons les objets, emploie un temps assez sensible à parvenir de l'objet à l'œil, lorsqu'il en est fort éloigné. Par exemple, le rayon qui part

---

(*n*) On peut même dire que cette distance est beaucoup plus grande, parce que la distance du soleil est plus considérable que ne l'estimoit notre Auteur, & la parallaxe annuelle des étoiles est encore moindre que 3 à 4 secondes.

(*o*) Picard, Flamsteed.

(*p*) C'est dans les Transactions philosophiques de la Société Royale de Londres, pour 1728 que fut annoncée cette belle découverte.

du soleil n'arrive à la terre qu'après plus de 8 minutes de temps.

581. 2°. Il est certain encore, que la présence des objets ne se manifestant à nous que par l'impression que les rayons lumineux qui en viennent font dans notre œil, nous ne jugeons de la figure & de la position de ces objets que par cette impression; ainsi nous les croyons toujours placés dans la ligne droite, suivant laquelle cette impression se fait dans notre œil. De sorte que si les rayons de lumiere qui viennent des objets, ne parviennent à notre œil qu'après avoir été réfléchis, brisés ou détournés de leur chemin par quelque accident physique que ce soit, nous jugeons les objets situés, non dans la ligne droite suivant laquelle les rayons sont partis de l'objet, mais dans la ligne droite suivant laquelle ils entrent dans notre œil, ou plutôt nous les jugeons situés à l'extrêmité de la droite selon laquelle se fait la réaction que les fibres de notre organe opposent à l'action des rayons qui viennent les frapper.

582. Cela posé, si la terre n'avoit aucun mouvement annuel, un rayon de lumiere parti d'une étoile avec une vîtesse finie quelconque, & arrivé à notre œil sans avoir été détourné de la ligne droite par aucune cause Physique, feroit voir l'étoile dans sa vraie situation, quelque temps qu'il employât à venir de l'étoile à l'œil; la même chose arriveroit quand même la terre seroit mobile, si la vîtesse de la lumiere étoit infinie, parce que la terre seroit comme en repos à l'égard d'une vîtesse infiniment grande. Mais si la vîtesse de la lumiere a un rapport fini avec celle de la terre, l'impression du rayon dans l'œil ne se fait sentir ni dans la direction du rayon, ni dans celle de la terre; mais semblable à l'impression d'un coup donné sur un plan mobile, elle se fait sentir dans la direction de la diagonale d'un parallélogramme formé sur les directions du rayon & de la tangente à l'orbite de la terre au point où elle se trouve à l'instant que le rayon y arrive, (car cette tangente est la direction du mouvement actuel de la terre), & dont les côtés sont dans le rapport des vîtesses ou des espaces parcourus en même-temps par la lumiere & par la terre. De

ſorte que le lieu apparent de cette étoile doit être au point du ciel où cette diagonale paroît aboutir.

583. Soit, par exemple, TLQI (fig. 60) un cercle infiniment grand qui repréſente l'écliptique, P ſon pole, S ſon centre où le Soleil eſt ſitué, CBFD l'orbite de la terre, QPET un cercle de latitude qui paſſe par une étoile E quelconque, & dont il détermine la longitude en T & la latitude TE. Soit TQ l'interſection du plan du cercle de latitude avec le plan de l'écliptique. Soit d'abord le lieu de la terre en C, & par conſéquent lorſque l'étoile eſt (573) en conjonction avec le ſoleil, ayant joint CE, & tiré la tangente C*c*, qui eſt alors perpendiculaire au plan du cercle de latitude TPQ, il faut prendre ſur CE, une portion quelconque CB, & faire : Comme la vîteſſe de la lumiere eſt à celle de la terre dans un même temps, ainſi CB eſt à C*o*. (Par exemple, ſachant que la lumiere emploie 8′ 7″ de temps à venir du ſoleil à la terre, & qu'en 8′ 7″ de temps la terre décrit un arc de 20″ dans ſon orbite, on peut faire CB = CS, & dire : *Comme le rayon eſt à la tangente de* 20″, *ainſi* CB *eſt à* C*o*). Sur CB & C*o* conſtruiſez le parallélogramme CBA*o*, il eſt évident que ſa diagonale CA fera toujours avec le côté BC un angle de 20″, & qu'étant prolongée juſques dans le ciel en χ, elle y déterminera le lieu apparent de l'étoile.

584. En ſuppoſant l'orbite de la terre circulaire, & les vîteſſes de la terre & de la lumiere uniformes, & par conſéquent dans un rapport conſtant, il eſt clair que ſi on connoiſſoit le temps que la lumiere emploie à venir des étoiles juſqu'à nous, on auroit la valeur de CE, & qu'en faiſant : Comme le rayon eſt à CE ; ainſi la tangente de l'arc que la terre décrit pendant que la lumiere parcourt CE, eſt à C*c*, on auroit un parallélogramme C*c*χE ſemblable au parallélogramme CBA*o* : Je l'appellerai *le parallélogramme d'aberration*. Or il eſt évident que le plan de ce parallélogramme doit faire tous les ans une révolution entiere, puiſque ſa ſituation dépend de la poſition de l'étoile qui eſt fixe, & de celle de la tangente à chaque point où ſe trouve la terre dans ſon orbite. Mais parce que

la distance presque infinie des étoiles au soleil & à la terre, réduit toute l'orbite terrestre B D C à un seul point sensible S, il suit qu'on peut supposer que le plan du parallélogramme d'aberration tourne sur la droite S E qui va de l'étoile au soleil, & que sa vîtesse angulaire de rotation est égale à celle de la terre autour du soleil.

585. Cela posé, le côté C *c* étant couché sur le plan de l'écliptique, le côté parallele Eχ qui mesure la distance du vrai lieu E de l'étoile à son lieu apparent χ, doit décrire un cercle dont le plan est parallele à celui de l'écliptique; & par conséquent ce cercle se projette dans le ciel de la même maniere que les épicycles; c'est-à-dire, qu'il se projette en une ellipse, dont le grand axe est parallele au plan de l'écliptique, le petit axe lui est perpendiculaire, & le rapport de ces axes est celui du rayon au sinus de la latitude de l'étoile. Mais le mouvement apparent de l'étoile dans cette ellipse doit faire un effet tout différent de celui de son mouvement apparent dans l'ellipse de son épicycle. Car quand le plan du parallélogramme d'aberration est perpendiculaire au plan T P Q du cercle de latitude, ce qui est le cas de la syzygie, à cause qu'alors Eχ est perpendiculaire au plan T P Q, elle devient un arc du petit cercle parallele à l'écliptique qui passe par le vrai lieu de l'étoile; donc *dans les syzygies l'aberration est toute en longitude*, & en même-temps la plus grande qu'il est possible, au-lieu que la parallaxe de l'orbe annuel est la plus grande en latitude & nulle en longitude. Quand le plan de l'angle d'aberration est devenu coïncident avec le plan T P Q, (c'est le cas où la terre a parcouru 90° depuis la syzygie, & où par conséquent l'étoile est *en quadrature avec le soleil*) *l'angle de l'aberration est tout en latitude*, l'étoile paroît à l'extrêmité du petit axe de son ellipse, l'aberration en latitude est donc la plus grande qu'il est possible, & elle est nulle en longitude, ce qui est encore le contraire de l'effet de la parallaxe de l'orbe annuel. Dans les autres positions du plan de l'angle d'aberration, elle est partie en longitude, partie en latitude.

586. Si on imagine maintenant un cercle de déclinaison

RVX, qui paſſe par l'étoile E, & par conſéquent par le centre de ſon ellipſe d'aberration, il eſt clair que quand l'étoile paroîtra aux points d'interſection de l'ellipſe avec ce cercle, elle paroîtra n'avoir aucune aberration en aſcenſion droite, puiſque (446) ſon lieu vrai & ſon lieu apparent ſeront dans le même cercle de déclinaiſon : & lorſque l'étoile ſera dans les points où ſon ellipſe eſt coupée par un diametre perpendiculaire au cercle R V X, elle n'aura aucune aberration en déclinaiſon, parce que ſon lieu vrai & ſon lieu apparent ſeront dans un même parallele à l'équateur.

587. Mais parce que tous les cercles de déclinaiſon ſont obliques à l'écliptique, (excepté le colure des ſolſtices), on voit que l'étoile ne parvient pas du terme de l'aberration nulle en aſcenſion droite, au terme de l'aberration nulle en déclinaiſon dans un intervalle de temps que la terre emploie à décrire 90° de ſon orbite, & que par conſéquent quand l'aberration en aſcenſion droite eſt la plus grande, elle n'eſt pas nulle en déclinaiſon, & réciproquement.

588. Les aberrations d'une étoile ſe déterminent graphiquement pour un inſtant donné en décrivant un cercle $\delta\chi\beta\varphi$ (fig. 58) dans lequel on tire un diametre horizontal $\delta\beta$ qui repréſente une portion du parallele à l'écliptique ſur lequel l'étoile eſt placée, & un diametre vertical $\chi\varphi$ qui repréſente une portion de ſon cercle de latitude; le centre E eſt donc le vrai lieu de l'étoile. Diviſez les rayons $E\delta$, $E\beta$ en autant de parties égales que vous en trouverez par cette analogie : *Comme le coſinus de la latitude de l'étoile eſt au ſinus total, ainſi* 20″, *ſont au nombre cherché* ; & vous aurez diviſé les arcs de petit cercle $E\delta$, $E\beta$, ſelon le nombre des ſecondes qu'ils contiennent. Diviſez les rayons $E\chi$, $E\varphi$ en 20″, parce que ce ſont des arcs de grand cercle. Diviſez encore le cercle $\delta\chi\varphi\beta$ en ſignes & en degrés, en ſorte que le point δ réponde à la longitude de l'étoile; écrivez l'ordre & le nom des ſignes en allant de gauche à droite dans la partie ſupérieure du cercle, afin que δ marque l'Occident, β l'Orient, χ le Nord, φ le Sud. Prenez ſur $E\chi$ une partie EC, qui ſoit à $E\chi$, comme le ſinus de la latitude

latitude de l'étoile, est au rayon; & décrivez (531) sur les axes $\beta\delta$, CD, l'ellipse $\beta C \delta D$, qui sera la projection du cercle de l'aberration de l'étoile.

589. Supposons que cette ellipse ait été faite pour une étoile dont la longitude soit dans 12° ♉, & la latitude de 36° boréale, & que le soleil soit à l'instant donné dans 14° . Du point *m* qui répond à 14° ♍ sur le cercle, abaissez sur $\beta\delta$ la perpendiculaire *m*N, & le point M de l'ellipse est (528) le lieu apparent de l'étoile; la perpendiculaire MP ou NE son égale, sera l'aberration en longitude, ou la quantité de secondes dont l'étoile paroît plus orientale qu'elle n'est réellement; & la perpendiculaire MN = EP sera l'aberration en latitude.

590. Si on veut avoir l'aberration en ascension droite & en déclinaison, il faut auparavant déterminer la situation du cercle de déclinaison de l'étoile par rapport à son cercle de latitude. Pour cela soit (fig. 45) le vrai lieu de l'étoile dans le ciel en A; (voyez n°s. 437 & 438 les noms des parties de cette figure); EA est de 54°, c'est le complément de la latitude AR; l'arc GR ou l'angle PEA est de 48°, c'est la distance du 12° ♉ au plus proche colure des solstices. Et dans le triangle sphérique APE, où l'on a AE = 54°, EP = 23° 28′ ½, & l'angle AEP, on calculera (Trig. 210) AP complément de la déclinaison de l'étoile de 41° 0′, & l'angle PAE de 26° 50′, dont la partie boréale du cercle de déclinaison de l'étoile AP s'écarte vers l'orient par rapport au cercle de latitude AE. Il faut donc tirer le diametre FG (fig. 58) qui fasse à l'orient de Eχ, l'angle χEF de 26° 50′, & qui représentera le cercle de déclinaison de l'étoile; divisez-en les rayons EG, EF en 20 secondes, tirez le diametre IH perpendiculaire à FG, & qui représentera une portion du parallele à l'équateur qui passe par l'étoile, divisez-en les rayons EI, EH en autant de secondes qu'on en trouve par cette analogie : *Comme le cosinus de la déclinaison de l'étoile est au rayon, ainsi* 20″ *sont au nombre cherché*, (c'est 30″ ½ dans cet exemple). Enfin, abaissez sur FG, IH les perpendiculaires ML, MQ, & vous aurez EQ = ML pour

la mesure de l'aberration en ascension droite, & EL = MQ sera celle de l'aberration en déclinaison (q).

Calcul de l'aberration causée dans les Etoiles & dans les Planetes par le mouvement successif de la Lumiere.

591. POUR abréger, nous ne donnerons pas ici les démonstrations des regles suivantes, parce qu'elles sont un peu compliquées, & qu'on peut les tirer de la construction précédente.

592. *Pour l'aberration en longitude & en latitude.* Otez la longitude du soleil de la longitude de l'étoile, vous aurez l'*argument annuel*, & l'aberration en longitude sera = $\frac{20'' \times \text{cos. Arg. ann.}}{\text{cos. latit. de l'Et.}}$, laquelle est soustractive dans les trois premiers & les trois derniers signes de l'argument annuel, & additive dans les six autres. L'aberration en latitude sera = $20'' \times$ *sin. latit. de l'Et.* $\times$ *sin. Arg. ann.* laquelle est additive dans les six premiers signes de l'argument annuel, & soustractive dans les six autres, pour avoir la longitude & la latitude affectée de l'aberration.

593. *Pour l'aberration en ascension droite.* Dans les Tables Astronomiques, ou dans quelque Calendrier qui donne la longitude, l'ascension droite & la déclinaison du soleil, cherchez la longitude & la déclinaison du point de l'écliptique qui répond au point de l'équateur qui marque l'ascension droite de l'étoile (r) : de cette longitude ôtez celle du soleil pour le jour donné, vous aurez l'argument annuel

---

(q) Les regles & les calculs de l'aberration ont été données en détail, par M. Clairaut, dans les Mémoires de l'Académie, pour 1737, par M. Euler, dans les Mémoires de Petersbourg, pour 1739, par M. Simpson, dans *ses Essais* 1740; on en trouve des Tables détaillées pour les principales étoiles dans la *Connoissance des Temps*, pour 1781, & dans un vol. séparé, publié par M. Mezger, à Manheim, en 1778.

(r) On trouve des tables très-amples des ascensions droites & des déclinaisons de tous les points de l'écliptique dans le 7e tom. des Ephémérides que j'ai publié; & des Tables générales d'aberration dans le second volume des Tables de Halley que j'ai publié en 1759.

de l'aberration en aſcenſion droite, & l'aberration cherchée ſera $= \frac{20'' \times \textit{coſ. Arg. ann.} \times \textit{coſ. obliq. de l'Ecliptique}}{\textit{coſ. déclin. de l'Et.} \times \textit{coſ. décl. du point de l'Ecl.}}$, laquelle eſt ſouſtractive dans les trois premiers & les trois derniers ſignes de l'argument annuel, & additive dans les ſix autres, pour avoir l'aſcenſion droite affectée de l'aberration.

594. *Pour l'aberration en déclinaiſon.* Dans les Tables Aſtronomiques ou dans un calendrier, cherchez la déclinaiſon qui répond au point de l'équateur qui marque l'aſcenſion droite de l'étoile : appellez X la ſomme ou la différence de cette déclinaiſon & de celle de l'étoile, ſelon qu'elles ſont de différente ou de même dénomination. Faites enſuite : *Le coſinus de la déclinaiſon trouvée eſt au coſinus de l'obliquité de l'écliptique, comme le coſinus de* X *eſt au coſinus d'un arc* Y. Puis *le ſinus de l'arc* Y, *eſt au coſinus de l'aſcenſion droite de l'étoile, comme le ſinus de la déclinaiſon de l'étoile, eſt au ſinus d'un arc* Z; or Z ſera toujours moindre que de 90° tant que l'étoile ſera en-dedans des tropiques, & tant que l'aſcenſion droite de l'étoile $\left\{\begin{matrix}\text{boréale}\\ \text{auſtrale}\end{matrix}\right\}$ ſera entre $\left\{\begin{matrix}180^\circ \text{ \& } 360^\circ\\ 0^\circ \text{ \& } 180^\circ\end{matrix}\right\}$. Dans les autres cas, faites : *Le rayon eſt à la tangente de l'obliquité de l'écliptique, comme la cotangente de la déclinaiſon de l'étoile, eſt au ſinus d'un arc* A; & l'arc Z ſera de plus de 90°, lorſque l'aſcenſion droite de l'étoile $\left\{\begin{matrix}\text{boréale}\\ \text{auſtrale}\end{matrix}\right\}$ ſera entre $\left\{\begin{matrix}0^\circ + A \text{ \& } 180^\circ - A\\ 180^\circ + A \text{ \& } 360^\circ - A\end{matrix}\right\}$. L'arc Z $\left\{\begin{matrix}\text{s'ajoute à } 0^s\\ \text{s'ôte de } 6^s\end{matrix}\right\}$ pour les étoiles $\left\{\begin{matrix}\text{boréales}\\ \text{auſtrales}\end{matrix}\right\}$, lorſque leur aſcenſion droite eſt dans le premier ou dans le dernier quart de l'équateur; & il $\left\{\begin{matrix}\text{s'ôte de } 12^s\\ \text{s'ajoute à } 6^s\end{matrix}\right\}$ lorſque l'aſcenſion droite eſt dans le ſecond & le troiſieme quart de l'équateur. La ſomme ou la différence trouvée eſt un point de l'écliptique duquel il faut ôter la longitude du ſoleil au jour donné, & on a l'argument annuel de l'aberration en déclinaiſon : cette aberration ſera $= 20'' \times \textit{ſin}\ Y \times \textit{coſ. Arg. ann.}$ ſouſtractive dans les trois premiers & les trois derniers

ſignes de l'argument annuel, & additive dans les ſix autres, pour avoir la déclinaiſon de l'étoile affectée de l'aberration de la lumiere.

595. Les regles du calcul de l'aberration pour les planetes ſont fort différentes de celles qui ſervent pour les étoiles : en voici une générale donnée par M. Clairaut, (Mém. de l'Acad. des Sciences, année 1746, pag. 565), pour dépouiller une poſition obſervée quelconque de l'effet de l'aberration : *Comme le mouvement horaire moyen du ſoleil 2' 28'', multiplié par ſa diſtance moyenne à la terre, eſt au mouvement horaire de l'aſtre vu de la terre (en longitude, en latitude, en aſcenſion droite, en déclinaiſon), multiplié par la diſtance actuelle de cet aſtre à la terre, en mêmes parties que celles de la diſtance moyenne de la terre au ſoleil ; ainſi 20'' ſont à la quantité dont on doit diminuer la longitude, la latitude, l'aſcenſion droite ou la déclinaiſon géocentrique de cet aſtre, ſi elles vont en augmentant ; ou les augmenter, ſi elles vont en diminuant.* Ce qui peut s'appliquer auſſi aux cometes, pourvu qu'on connoiſſe à-peu-près les éléments de leur théorie, afin de calculer leurs mouvements horaires géocentriques, & leurs diſtances à la terre.

ARTICLE IV.

Recherche des mouvements relatifs des Planetes, cauſés par le mouvement annuel de la Terre.

596. IL eſt évident qu'à l'égard d'un obſervateur, qui placé ſur la terre, en attribue le mouvement annuel aux planetes, leſquelles ont d'ailleurs un mouvement propre dans des orbites particulieres dont les plans ſont très-peu inclinés (34) à celui de l'écliptique, ces planetes doivent paroître décrire dans le ciel des épicycloïdes elliptiques très-applaties. Mais parce que l'orbite de la terre eſt renfermée (page 115) entre les orbites de ♂, de ♃ & de ♄, & qu'elle embraſſe celles de ♀ & de ☿, il eſt à propos de diſtinguer ces planetes en deux eſpeces à l'é-

gard de la terre, & d'appeller ♂ ♃ & ♄ *planetes supérieures*, & ♀ & ☿ *planetes inférieures.*

597. Pour savoir maintenant quelle espece d'épicloïde (*f*) chacune de ces planetes doit décrire, il faut pour les supérieures prendre l'expression des rapports de $RV - rV$ à $ru - rV$, & pour les inférieures celle de $ru - Ru$ à $RV - Ru$, dans lesquels V exprime la vîtesse angulaire de la planete, R le rayon de son orbite; u la vîtesse angulaire de la terre, & r le demi-diametre de son orbite.

598. Or en prenant tout sur le pied moyen, & les vîtesses angulaires pour un jour, $u = 59'$, & $r = 100$.

Pour ♄, $R = 953$, $V = 2'$	Donc	$RV - rV : ru - rV :: 1706 : 5700.$
Pour ♃ $R = 520$, $V = 5'$		$RV - rV : ru - rV :: 2100 : 5400.$
Pour ♂, $R = 152$, $V = 31'\frac{1}{2}$		$RV - rV : ru - rV :: 1638 : 2750.$
Pour ♀, $R = 72$, $V = 96'$		$ru \quad Ru : RV - Ru :: 16\ 2 : 2664.$
Pour ☿, $R = 38$, $V = 245'\frac{1}{2}$		$ru - Ru : RV - Ru :: 3658 : 7082.$

599. Donc I°. *Toutes les planetes décrivent des épicycloïdes accourcies*, & d'autant plus accourcies que l'antécédent de chacun de ces rapports, est plus petit que son conséquent.

600. II°. *Toutes les planetes supérieures sont directes dans le temps de leur conjonction avec le soleil* (561), *rétrogrades dans celui de leur opposition, & stationnaires quelque temps avant & après leur opposition.* Et parce que les planetes inférieures ne peuvent être en opposition avec le soleil, (puisque la terre ne peut passer entr'elles & le soleil), mais qu'elles doivent avoir deux conjonctions (573), il est évident que *les planetes inférieures sont directes dans leurs conjonctions supérieures, rétrogrades dans leurs conjonctions inférieures, & stationnaires quelque temps avant & après.*

601. III°. *Les vîtesses apparentes des planetes soit directes, soit rétrogrades, s'accélerent depuis une station jusqu'à la station suivante* (562) : *leur plus grande vîtesse directe est dans leurs conjonctions, & leur plus grande vîtesse rétrograde est dans l'opposition des planetes supérieures, ou dans la conjonction inférieure des planetes inférieures.*

(*f*) V. la nature des épicycloïdes (567).

602. IV°. *Lorſque les planetes ſont dans leurs ſyzygies, elles n'ont pas de parallaxe de l'orbe annuel en longitude, c'eſt à-dire, leur longitude vue de la terre eſt la même que leur longitude vue du ſoleil; ou ſi c'eſt une conjonction inférieure d'une planete inferieure, ſa longitude vue de la terre differe preciſement de* 180 *degrés de ſa longitude vue au ſoleil.* Parce qu'alors le ſoleil, la terre & l'aſtre ſont dans le plan d'un même cercle de latitude (573). Mais comme les planetes ſe meuvent dans des orbites dont les plans ſont un peu inclinés à l'écliptique, & que par conſéquent elles ont toujours un peu de latitude, excepté lorſqu'elles ſont dans l'interſection du plan de leur orbite avec le plan de l'écliptique; *dans les ſyzygies la parallaxe de l'orbe annuel en latitude eſt très-ſenſible, & hors des ſyzygies la parallaxe de l'orbe annuel eſt ſenſible tant en longitude qu'en latitude.*

603. REMARQUE. On auroit eu des rapports plus exacts en prenant dans les Tables Aſtronomiques les vraies vîteſſes angulaires des planetes & leurs vraies diſtances au ſoleil au temps de leurs ſyzygies. Par exemple, lorſque Mars en oppoſition eſt en même-temps aphélie, (ce qui arrive lorſque ſon oppoſition tombe vers le 20 de Février), il eſt le plus éloigné de la terre qu'il puiſſe être dans cette ſituation, & on a $V = 26' \, 12''$ ou $1572''$, $R = 16652$; $u = 1°0' \, 20''$, $r = 9898$; donc alors $RV - rV : ru - rV :: 100 : 191$. Et lorſque dans ſon oppoſition il eſt périhélie (ce qui arrive lorſque l'oppoſition tombe vers le 25 Août) alors il eſt le plus près de la terre qu'il eſt poſſible, on a $V = 38' \, 2''$, $R = 13822$; $u = 58' \, 0''$, $r = 10099$. Donc $RV - rV : ru - rV :: 100 : 143$.

604. Il paroît donc que l'épicycloïde de Mars aphélie eſt plus accourcie que celle de Mars périhélie, & qu'ainſi *Mars aphélie doit rétrograder plus long-temps & avec plus de vîteſſe que Mars périhélie.*

605. Il eſt aiſé de décrire à-peu-près les épicycloïdes de chaque planete ſur un plan qui repréſentera celui de l'écliptique : car à cauſe du peu d'inclinaiſon de ces orbites, leurs projections ſur ce plan ſont ſenſiblement égales à ces

orbites mêmes, & à cause de leur peu d'excentricité, ces orbites sont sensiblement des cercles concentriques, décrits uniformément par leur planete. Décrivez donc deux cercles concentriques, dont les diametres soient dans le rapport du grand axe de l'orbite de la terre au grand axe de l'orbite de la planete dont il s'agit : & ayant divisé celui de ces cercles qui représente l'orbite de la terre en tant de parties égales que vous voudrez, comme de 10 en 10 degrés, faites : Comme 365 jours $\frac{1}{4}$ sont au temps de la révolution de la planete, ainsi 10 degrés sont au nombre de degrés que la planete décrit dans son orbite, tandis que la terre en décrit 10 dans la sienne : portez ce nombre de degrés dans toute la circonférence de l'orbite de la planete ; & ayant supposé la terre en quelque point de son orbite, & la planete en quelque point dans la sienne, cherchez (512) le lieu optique de cette planete, & en continuant cette même opération sur tous les points de division consécutifs des deux orbites, vous aurez tous les lieux optiques de la planete correspondants à tous les vrais lieux de la terre & de cette planete : faisant passer une courbe par tous ces lieux optiques, elle représentera une suite des épicycloïdes de la planete. On auroit ces épicycloïdes plus exactement, en marquant sur un plan de dix en dix jours, par exemple, le vrai lieu de la terre & celui de la planete selon une proportion exacte de leurs mouvements & de leurs distances au soleil (*t*).

(*t*) Le problême des stations & des rétrogradations des planetes a été traité par plusieurs Géometres ; mais ces problêmes ne peuvent être d'aucun usage dans l'Astronomie, à cause des changemens continuels qui arrivent dans les vitesses & les distances des planetes. Le seul moyen d'avoir la durée & l'étendue de la rétrogradation est de consulter les Ephémérides où les Longitudes des planetes sont calculées de trois en trois jours. M. de la Caille a donné des Ephémérides pour 1745-74, & moi pour 1775-84. V. aussi la *Connoissance des Temps*, le *Nautical Almanac* de Londres, les Ephémérides de Berlin, celles de Bologne, de Milan, & de Vienne en Autriche.

CHAPITRE III.

Des illusions optiques causées dans les Phénomenes du mouvement diurne par la position de l'Observateur sur la surface de la Terre.

606. PAR une suite des illusions optiques exposées ci-dessus (344), l'observateur situé sur la surface de la terre, doit s'imaginer que toutes les révolutions diurnes des astres se font autour de son œil comme centre ou comme axe, quoique cela ne doive convenir qu'au centre ou qu'à l'axe de la terre ; il doit donc appercevoir des inégalités dans ces révolutions, quoiqu'uniformes, & c'est ce qui nous reste à expliquer ici en suivant toujours les mêmes principes.

607. Soit P (fig. 61) le lieu d'un observateur sur la surface de la terre *h* P *r* G. Soit *h r* D le plan de son horizon rationel, Z son zénith dans le ciel, C le centre de la révolution diurne, & par conséquent le lieu imaginaire de l'œil. Soit H A *a* R le cercle de l'horizon terminé dans le ciel. Soit H Z R le plan du premier vertical de l'observateur, & C Z L A le plan du méridien. Soit I L K le parallele céleste qu'un astre L paroît décrire dans sa révolution diurne.

608. Soit l'astre en *l* dans un point quelconque de son parallele ; le rayon par lequel l'observateur voit réellement cet astre, est P *l*; mais parce qu'il s'imagine être en C, le rayon par lequel il croit voir l'astre est C *m* égal & parallele à P *l*, ainsi le lieu apparent de l'astre est en *m*, tandis que le vrai lieu est en *l* (513). Par la même construction on trouvera les lieux apparents M, μ, qui répondent aux vrais lieux L, λ.

609. L'angle *l* C *m* au centre de la terre compris entre le vrai lieu & le lieu apparent de l'astre, s'appelle simplement *la parallaxe* de l'astre. Cet angle, à cause du parallé-

logramme P l m C, eſt égal à l'angle P l C. Donc *la parallaxe d'un aſtre par rapport à un obſervateur, eſt l'angle à l'aſtre compris entre le centre de la terre, & le point de la ſurface où eſt ſitué l'obſervateur.* Ou bien encore *la parallaxe d'un aſtre par rapport à un obſervateur, eſt l'inclinaiſon des deux rayons viſuels menés à l'aſtre, l'un du centre de la terre, & l'autre du point de la ſurface de la terre où l'obſervateur eſt placé.*

610. Il ſuit delà, I°, que *la parallaxe eſt, abſolument parlant, indépendante des phénomenes du mouvement diurne des aſtres;* mais que ſes effets ſe font ſentir principalement dans ces phénomenes.

611. II°. Que la parallaxe faiſant voir les aſtres en d'autres points du ciel que ceux où ils ſont réellement par rapport au centre de la terre, elle doit altérer les longitudes, les latitudes, les aſcenſions droites, & les déclinaiſons des aſtres. C'eſt pourquoi on appelle *parallaxe de longitude* la différence entre la longitude vue du centre qu'on appelle *la longitude vraie*, & celle qui eſt vue du lieu où eſt l'obſervateur, qu'on appelle *la longitude apparente.* Il en eſt de même de la *parallaxe de latitude, d'aſcenſion droite, de déclinaiſon, de hauteur, de diſtance, &c.*

612. Le triangle C P l ou ſon égal l C m, s'appelle *triangle parallactique.*

613. THEOR. I. *La parallaxe d'un aſtre eſt nulle à l'égard du grand cercle dont le plan paſſe par l'œil & par l'aſtre, mais ſon effet s'exerce tout entier à l'égard du grand cercle perpendiculaire.*

614. DEM. Quand l'œil de l'obſervateur, & l'aſtre ſe trouvent dans le plan d'un des grands cercles quelconques A le plan du triangle parallactique eſt confondu dans le plan de ce grand cercle A, & par conſéquent l'aſtre ne peut paroître hors de ce plan, il ne peut donc paroître que plus ou moins éloigné d'un point fixe quelconque B pris ſur le cercle A : donc la parallaxe de l'aſtre eſt nulle à l'égard du grand cercle A; elle ſe meſure dans le plan de ce cercle A, mais ſon effet s'exerce tout entier à l'égard du point B, ou du grand cercle perpendiculaire qui paſſe par le point B.

615. COROLL. I. Un astre paroissant toujours dans quelque vertical, dont le plan passe nécessairement par l'œil de l'observateur & par le centre de la terre, la parallaxe d'un astre est nulle à l'égard des verticaux, & toute entiere à l'égard de l'horizon, c'est-à-dire, qu'*un astre ne peut avoir de parallaxe d'azimut, mais que sa parallaxe est toute en hauteur.*

616. COROLL. II. *Si deux astres paroissent être dans un même vertical, ils y sont réellement.*

617. COROLL. III. Lorsqu'un astre est dans le méridien, qui est un vertical, sa parallaxe est nulle à l'égard de ce cercle, & toute entiere à l'égard de l'équateur : c'est-à-dire, que *dans le méridien la parallaxe d'un astre est nulle en ascension droite, & toute en déclinaison.*

618. COROLL. IV. *Lorsque l'astre dans sa révolution diurne passe par le point où son vertical coupe perpendiculairement l'écliptique, alors sa parallaxe est nulle en longitude, elle est toute en latitude*, puisque l'astre, l'œil & le centre de la terre se trouvent dans un même plan perpendiculaire à l'écliptique. Le point où l'écliptique est coupée perpendiculairement par un vertical, s'appelle le *Nonagesime*, parce que c'est le point de l'écliptique qui est à égale distance de part & d'autre (& par conséquent à 90 degrés) des deux points de son intersection avec l'horizon. Car l'écliptique étant un grand cercle incliné à l'horizon, elle est oblique à l'égard de tous les verticaux, excepté à l'égard de celui dont le plan passe par son pole. Or le vertical qui passe par le pole d'un grand cercle, est en même-temps perpendiculaire à ce grand cercle & à l'horizon : donc (Trig. 22) il les rencontre à 90° de leur intersection commune.

619. THEOR. II. *Tant qu'un astre ne change pas de distance au centre de la terre, le sinus de sa parallaxe de hauteur est toujours comme le sinus de sa distance apparente au zénith, ou comme le cosinus de sa hauteur apparente.*

620. DEM. Car dans le triangle PCL, on a (Elem. 746) PC : CL : : *sin* PLC : *sin* LPC = *sin* ZPL (Elem. 727) = *sin* ZCM. Et dans le triangle PC*l*, on a de même, PC : C*l* ou CL : : *sin* P*l*C : *sin* CP*l*, = *sin* ZP*l*

= ſin ZCm. Donc ſin PLC : ſin ZCM ou ZPL : : ſin P l C : ſin ZCm ou ZP l.

621. COROLL. I. *La parallaxe eſt nulle quand l'aſtre paroît au zénith, & elle eſt la plus grande quand l'aſtre paroît à l'horizon.* Car dans le premier cas le triangle parallactique eſt réduit à la droite CPB, & la parallaxe répond au ſinus de 0° : dans le ſecond cas, le triangle parallactique eſt rectangle comme CPλ, & la parallaxe répond au ſinus total. C'eſt pour cela que la plus grande parallaxe d'un aſtre s'appelle *la parallaxe horizontale.*

622. COROLL. II. *Par l'effet de la parallaxe, le diametre d'un aſtre paroît plus grand à meſure que cet aſtre s'éleve ſur l'horizon, quoique ſa diſtance au centre de la terre demeure conſtante.* Car puiſque les parallaxes ſont plus grandes, plus près de l'horizon, la parallaxe du bord inférieur de cet aſtre eſt plus grande que celle du bord ſupérieur; donc ces deux bords paroiſſent plus écartés l'un de l'autre de la différence de leurs parallaxes particulieres; donc le diametre paroît augmenté. Mais les ſinus des parallaxes ſont comme les ſinus des diſtances au zénith, & les différences des ſinus deviennent plus grandes, à meſure que les ſinus même ſont plus petits; donc les différences des parallaxes ſont plus grandes à meſure que l'aſtre approche plus du zénith, ou qu'il s'éleve ſur l'horizon; donc ſon diametre paroît d'autant plus augmenté (*u*).

623. THEOR. III. *Les ſinus des parallaxes des aſtres qui ſont à la même hauteur apparente ſur l'horizon, mais à différentes diſtances du centre de la terre, ſont en raiſon inverſe de ces diſtances.*

624. DEM. Car ſi ſur P *l* on ſuppoſe deux aſtres, l'un en *l* & l'autre en *t*; ou ſi l'on ſuppoſe qu'un aſtre ayant

(*u*) On pourroit objecter à ce raiſonnement que les deux bords qui ſont à la même hauteur ont la même parallaxe, & cependant forment un diametre horizontal augmenté de la même quantité que le diametre vertical; ainſi, c'eſt moins la différence des parallaxes que la diminution de la diſtance qu'on doit conſidérer dans l'explication de ce phénomene.

été en l, se trouve une autre fois en t, par l'inégalité des dimensions de son orbite; alors dans les triangles P l C, P t C on a PC : C l : : *sin* P l C : *sin* lP C. Et P C : C t : : *sin* P t C : *sin* C P t ou l P C. Donc P C × *sin* l P C = C l × *sin* P lC = C t × *sin* P t C. Donc (Elem. 302) C l : C t : : *sin* P t C : *sin* P l C.

625. COROLL. *Les sinus des parallaxes horizontales, sont en raison inverse des distances au centre de la terre.*

626. THEOR. IV. *Le sinus de la parallaxe horizontale d'un astre, est toujours comme le sinus de l'angle sous lequel on voit le demi-diametre horizontal de cet astre.*

627. DEM. La parallaxe horizontale P λ C est la mesure de l'angle sous lequel le demi-diametre P C de la terre est vu du centre de l'astre en λ. Par la même raison l'angle sous lequel du centre de la terre on voit le demi-diametre de l'astre en λ, est à l'égard de cet astre la parallaxe horizontale de la terre, & les sinus des parallaxes horizontales de la terre doivent être aussi en raison inverse de ses distances véritables au centre de l'astre en λ (623). D'où il suit que les sinus des parallaxes horizontales de l'astre λ par rapport à la terre, sont en même raison que les sinus des parallaxes horizontales de la terre par rapport à l'astre λ : ou ce qui est le même, les sinus des parallaxes horizontales d'un astre vu de la terre, sont en même raison que les sinus des demi-diametres horizontaux de cet astre.

628. COROLL. *Il suffit donc d'avoir déterminé une fois par de bonnes observations la parallaxe horizontale d'un astre & son demi-diametre horizontal, pour pouvoir toujours conclure l'un par la mesure actuelle de l'autre.*

629. REMARQUE. *Si l'astre est assez éloigné de la terre pour que sa parallaxe horizontale n'excede pas un degré*, alors les sinus de ses différentes parallaxes sont confondus avec les arcs qui les mesurent; on peut donc mettre par-tout *la parallaxe* simplement, au-lieu du *sinus de la parallaxe.*

630. THEOR. V. *Etant données trois de ces cinq choses, la distance réelle de l'œil à l'astre, la distance réelle de l'astre au centre de la terre, la grandeur absolue du demi-diametre de la terre, la hauteur vraie ou apparente*

d'un astre, & l'angle de parallaxe; on a celle des deux autres qu'on voudra.

631. DEM. Car alors dans le triangle rectiligne parallactique, on a trois choses capables de donner la solution des deux autres par le calcul Trigonométrique.

632. COROLL. *Un observateur situé sur la terre peut donc connoître la distance absolue des astres au centre de la terre par le moyen de leur parallaxe, & sur-tout de la parallaxe horizontale*, qui est la plus propre à cet effet, étant la plus grande.

633. THEOR. VI. *La parallaxe des astres les fait paroître plus écartés du plan du meridien, qu'ils ne le sont réellement.*

634. DEM. Tous les verticaux sont des arcs qui partent du zénith, & s'écartent ensuite les uns des autres d'autant plus qu'ils approchent plus de l'horizon. Or (615) la parallaxe maintient les astres dans les verticaux; mais elle les fait paroître plus près de l'horizon qu'ils ne le sont réellement; donc elle les écarte du méridien qui est le vertical, dans lequel l'astre a le moins de parallaxe.

635. COROLL. I. *Par l'effet de la parallaxe, les astres paroissent se lever plus tard, & se coucher plutôt.*

636. COROLL. II. *Si un astre sujet à la parallaxe tend par son mouvement propre d'Occident en Orient à se joindre à une étoile, la conjonction paroîtra arriver plutôt* (qu'elle ne seroit arrivée réellement, s'il n'avoit point eu de parallaxe) *si l'astre est dans la partie orientale du ciel; & plus tard si l'astre est dans la partie occidentale.*

Recherche de la Parallaxe horizontale des Astres, & des conséquences qu'on en tire.

637. PARMI les différentes méthodes que les Astronomes ont imaginées pour observer la parallaxe horizontale des astres, en voici deux qui sont préférables à toutes les autres (*v*).

(*v*) On peut encore y ajouter la méthode des plus grandes latitudes, qui a été employée avec succès pour la lune; par Ptolomée,

638. La premiere, qui eſt la plus ſûre dans la pratique, exige deux obſervateurs placés ſur le même méridien terreſtre ou à-peu-près, l'un dans la partie boréale de la terre, & l'autre, s'il eſt poſſible, dans la partie auſtrale, de ſorte que l'arc du méridien céleſte compris entre leurs zéniths ſoit le plus grand qu'il eſt poſſible. Chaque obſervateur doit déterminer à l'inſtant que l'aſtre dont on veut avoir la parallaxe paſſe au méridien, de combien & en quel ſens la hauteur méridienne de cet aſtre differe de la hauteur méridienne d'une étoile connue & peu éloignée du parallele de cet aſtre. Alors ſi la différence entre ces hauteurs eſt de part & d'autre préciſément la même & vers la même région du ciel, l'aſtre n'a pas de parallaxe ſenſible; mais ſi cette différence n'eſt pas la même de part & d'autre, l'excès de la plus grande ſur la plus petite, ſi elles ſont du même côté, ou leur ſomme, ſi elles ſont l'une vers le nord, l'autre vers le midi, ſera une quantité qui fera connoître la parallaxe horizontale par cette analogie : *Comme la ſomme des ſinus des diſtances de l'aſtre à chaque zénith, eſt au ſinus total, ainſi la quantité trouvée eſt à la parallaxe horiz. de l'aſtre.*

639. Par exemple, le 5 Octobre 1751 à la ville du Cap de Bonne-Eſpérance, dont la latitude eſt de 33° 55′ auſtrale, j'ai obſervé à 10 heures 33′ 37″ du ſoir, que Mars étant dans le méridien, à la diſtance de 25° 0′ du zénith, ſon bord boréal étoit plus auſtral que l'étoile λ du Verſeau, de 1′ 25″, 8. A Stockholm, dont la latitude eſt 59° 21′ boréale, ſuivant l'obſervation de M. Wargentin faite le même jour, & réduite au même temps, Mars étant au méridien à 68° 14′ du zénith, ſon bord boréal étoit plus auſtral que la même étoile, de 1′ 57″, 7; d'où l'on voit que la parallaxe de Mars étoit ſenſible, & que la différence 31″,9 doit ſervir à la trouver; or le ſinus de 68° 1′ eſt

---

Tycho, Flamſteed, & M. le Monnier, & celle des paſſages de Vénus qui a ſervi pour déterminer la parallaxe du ſoleil; je l'ai expliqué dans mon *Aſtronomie*, & M. Euler dans le ſecond volume des Mémoires de Pétersbourg pour 1769.

9287, celui de 25° 0′ eſt 4226 : donc comme leur ſomme 13513 eſt au ſinus total 10000, ainſi 31″,9 ſont à 23″,6 parallaxe horizontale de Mars.

640. Car à cauſe que Stockholm & le Cap de Bonne-Eſpérance ſont à très-peu près ſous le même méridien, & que le plan de l'équateur paſſe entre ces deux lieux, les 31″9 ſont la ſomme des quantités dont la parallaxe de Mars l'a fait paroître en ces deux villes, plus près de l'équateur qu'il n'étoit réellement ; & cette parallaxe étant (617) toute en déclinaiſon, elle étoit en même temps la parallaxe de hauteur : or (619) les parallaxes de hauteur ſont comme les ſinus des diſtances apparentes au zénith, & la parallaxe horizontale comme le ſinus total.

641. REM. I. En quelque hémiſphere que chacun des deux obſervateurs ſoit placé, lorſque le rayon qui va du centre de la terre juſqu'à l'aſtre paſſera entre les deux zéniths, l'analogie précédente ſera bonne ; mais ſi ce rayon ne paſſe pas entre les deux zéniths, il faudra employer la différence des ſinus des diſtances au zénith, à la place de leur ſomme.

642. II. Si les deux obſervateurs n'étoient pas ſous le même méridien, il faudroit avoir égard au mouvement de l'aſtre en déclinaiſon dans l'intervalle du temps entre le paſſage de l'aſtre par les deux méridiens. Par exemple, le 25 Octobre 1751, à 0h 31′ 44″ du ſoir, à la même ville du Cap, j'obſervai que Vénus étant dans le méridien, éloignée de 12° 21′ du zénith, ſon bord ſeptentrional étoit plus auſtral que le parallele de l'étoile *b* ♒, de 7′ 26″,2. Le même jour à Gréenwich en Angleterre, Vénus étant dans le méridien, éloignée de 73° du zénith, M. Bradley obſerva que le même bord de Vénus paroiſſoit plus auſtral que le parallele de *b* ♒, de 7′ 15″, ou, ayant égard à la réfraction dont on parlera dans le Chapitre ſuivant, & à la différence des longueurs des lunettes, de 7′ 15″,3. M. Bradley obſerva de plus que 23h 54′ après, Vénus étant de retour au méridien, elle étoit devenue plus boréale de 17′ 21″,5, ou, ayant égard à la réfraction, de 17′ 25″. Cela poſé, le méridien de Gréenwich étant de 18° plus occidental que celui du Cap, on compte à Gréenwich 1h 14′

de moins qu'au Cap, & par conséquent la premiere observation de M. Bradley fut faite 1^{h} 14$'$ après celle du Cap : pour la réduire à celle qu'il eût faite à la même heure, il faut dire : Comme 23^{h} 54$'$ sont à 1^{h} 14$'$, ainsi 17$'$ 25$''$ sont à 53$''$,9, qu'il faut ajouter à 7$'$ 15$''$,3 pour avoir 8$'$ 9$''$,2 distance des paralleles du bord de Vénus & de l'étoile qu'on eût vue à Gréenwich au moment de l'observation faite au Cap. La différence entre 8$'$ 9$''$2 & 7$'$ 26$''$,2 est 43$''$,0 : je fais comme 11699 somme des sinus de 12° 21$'$ & de 73°, est au rayon 10000; ainsi 43$''$,0 sont à 36,$''$8, parallaxe horizontale de Vénus, le 24 Octobre 1751 à 23^{h} 27$'$ de temps vrai compté sur le méridien de Paris.

643. III. La parallaxe horizontale de Mars étant supposée de 23$''$,6 le 5 Octobre 1751, il est facile de calculer (Elem. 756) dans le triangle rectangle C P λ, ou C P = 1, que sa distance C λ à la terre étoit alors de 8740 demi-diametres terrestres. Et parce que la théorie physique nous a donné (279) non-seulement le rapport exact des dimensions des orbites des planetes rapportées à une échelle commune, que nous avons supposée (280) de 20000 parties égales, mais encore la maniere de calculer pour un instant donné le lieu & la distance d'une planete au soleil en parties de la même échelle, si à l'aide de cette théorie & de la méthode que nous enseignerons bientôt (733), on cherche la distance de Mars à la terre le 5 Octobre 1751 à 10^{h} 33$'$ 37$''$ au méridien du Cap, on aura la grandeur absolue de cette échelle, en faisant cette analogie : *Comme la distance de Mars à la terre en parties de l'échelle*, (ce sont dans cet exemple 4327), *est à la distance de Mars en demi-diametres terrestres* 8740 : ainsi les 20000 parties de l'échelle commune, sont à 40398 demi-diametres terrestres, vraie & absolue grandeur de l'échelle, selon cette observation. Par un semblable calcul de la parallaxe horizontale de Vénus 36,$''$8, on conclud que le 24 Octobre à 23^{h} 27$'$ temps vrai, cette planete étoit éloignée de la terre de 5605 demi-diametres terrestres. Or selon le calcul des Tables Astronomiques, la distance de Vénus à la terre étoit de 2776 parties dont l'échelle commune en contient 20000;

donc

donc la valeur de cette échelle est de 40382 demi-diametres terrestres. Et par un milieu pris entre ces deux déterminations, on peut supposer la grandeur de l'échelle de 40390 demi-diametres terrestres.

644. IV. On peut donc, après avoir observé la parallaxe horizontale d'une planete, évaluer en mesures connues, comme en lieues, en toises, &c, toutes les dimensions rapportées dans la Table page 115 ; parce que le demi-diametre de la terre, qu'on fait communément de 1432 lieues, a été mesuré assez exactement, & qu'il est à très-peu près de 19611500 pieds de roi. Il n'y a cependant que Mars en opposition, & Vénus en conjonction inférieure qui soient les plus propres pour cette recherche, parce que ces planetes sont les plus voisines de la terre.

645. V. L'échelle de 20000 parties que nous avons supposée, étant le grand axe de l'ellipse de la terre, sa moitié 10000, distance moyenne de la terre au soleil, est d'environ 20195 demi-diametres terrestres. Faisant donc, comme 20195 à 1, ainsi le sinus total est au sinus de la parallaxe horizontale du soleil qu'on trouvera de $10'',21$ (*v*); & parce que le demi-diametre du soleil vu de la terre dans sa distance moyenne est de $16'\,2''$, il suit que le diametre du soleil est à celui de la terre (626) comme $16'\,2''$ à $10'',21$, ou comme près de 94 à 1 : que la surface du soleil est 8860 plus grande que celle de la terre, & sa solidité 834000 fois environ. Toutes ces dimensions seroient plus précises, sans l'extrême petitesse de la parallaxe qui les a données.

646. La seconde méthode est plus commode en ce qu'elle n'exige qu'un seul observateur. Pour la pratiquer exactement, 1°, si l'on n'est pas sûr que les Tables Astronomiques

---

(*v*) Cette parallaxe du soleil n'est exactement que de $8''6$ comme on s'en est assuré par les observations du passage de Vénus sur le soleil faites en 1769, qui étoient les plus propres à nous faire trouver exactement cette parallaxe, V. les Mémoires de l'Académie 1771, pag. 798, où j'ai discuté toutes les observations de ce célebre passage.

Delà il suit que la distance du soleil est de 23984 demi-diametres terrestres ou 34357480 lieues, chacune de 2283 toises.

puiſſent donner préciſément la quantité du mouvement réel de l'aſtre dans l'intervalle des obſervations néceſſaires pour la recherche de la parallaxe, il faut déterminer pendant trois ou quatre jours conſécutifs l'aſcenſion droite de l'aſtre dont il s'agit, à l'égard d'une étoile qui ſoit à peu près dans ſon parallele, à l'inſtant de leur paſſage par le méridien, afin de pouvoir trouver par la partie proportionnelle, ou s'il y a des inégalités ſenſibles dans les mouvements diurnes de l'aſtre, par la méthode des interpolations, la vraie quantité dont l'aſtre aura varié réellement en aſcenſion droite à l'égard de l'étoile, pour l'intervalle de temps que l'on voudra.

647. 2°. Il faut pendant un de ces jours obſerver deux fois la différence d'aſcenſion droite entre l'aſtre & l'étoile, ſavoir, à l'inſtant du paſſage de l'aſtre par le méridien, & environ ſix heures avant ou après : ou pour le mieux encore, il faut l'obſerver trois fois ; ſavoir, environ cinq ou ſix heures avant le paſſage de l'aſtre par le méridien, au temps de ce paſſage, & cinq ou ſix heures après ce paſſage.

648. 3°. Si ces différences réduites en degrés ſont égales à la quantité du mouvement propre de l'aſtre en aſcenſion droite, qui convient ſelon la partie proportionnelle ou ſelon l'interpolation à l'intervalle entre les obſervations, l'aſtre n'a pas de parallaxe ſenſible; mais ſi ces différences excédent celle de ce mouvement propre, l'excès ſera (633) une parallaxe en aſcenſion droite, ſi de deux obſervations l'une s'eſt faite au méridien, & l'autre avant ou après : ou ce ſera la ſomme de deux parallaxes en aſcenſion droite, ſi de trois obſervations la premiere a été faite avant le paſſage de l'aſtre par le méridien, & la troiſieme après ce paſſage.

649. 4°. Faites : *Comme le produit du ſinus de la diſtance apparente de l'aſtre au méridien (ou de la ſomme des ſinus de ſes deux diſtances apparentes obſervées avant & après le paſſage par le méridien) multiplié par le coſinus de la hauteur du pole de l'obſervateur, eſt au produit du rayon par le coſinus de la déclinaiſon apparente de l'aſtre : ainſi la différence trouvée eſt à la parallaxe horizontale de l'aſtre.*

650. Pour démontrer cette analogie, ſoit HEZP (fig. 59) une moitié de méridien céleſte, P le pole, Z le zénith de l'obſervateur, HQR l'horizon, EAQ l'équateur, LR le parallele de l'aſtre M dont on cherche la parallaxe. Ayant mené au point M par Z le vertical ou cercle de hauteur ZT, & par P le cercle de déclinaiſon MP; l'angle ZPM meſure la vraie diſtance de l'aſtre au méridien. Soit M*m* la parallaxe de hauteur; alors *m* eſt le lieu apparent de l'aſtre. Ayant mené *m*P, l'angle ZP*m* meſure la diſtance apparente de l'aſtre au méridien. Il eſt clair que MD eſt la parallaxe en aſcenſion droite (*x*); donc l'angle MP*m* que cet arc meſure, & qui eſt la différence entre la diſtance vraie & la diſtance apparente au méridien, eſt auſſi la parallaxe en aſcenſion droite. Appellons B la parallaxe horizontale, on a (619) R : B : : ſZ*m* : M*m*. Donc M*m* = B×ſZ*m*. Et dans le triangle ZP*m* devenu ZPM par la différence M*m* du côté ZM, l'angle MZP & le côté ZP étant reſtés conſtants, on a (Trig. 277) ſZP*m*×ſZP : ſP*m*×ſZ*m* : : *d*ZP*m* : *d*Z*m* ou M*m* ou B×ſZ*m*; donc diviſant par ſZ*m*, on a ſZP*m*×ſZP : ſP*m* : : *d*ZP*m* : B. C'eſt l'analogie propoſée.

Calcul des Parallaxes.

651. PROBL. I. *Etant données la parallaxe horizontale d'un aſtre, ſon aſcenſion droite, ſa déclinaiſon, la hauteur du pole, trouver ſa parallaxe de hauteur à un inſtant donné.*

652. SOLUTION. Par l'heure & l'aſcenſion droite donnée, cherchez (499) la diſtance de l'aſtre au méridien, avec laquelle & avec ſa déclinaiſon & la hauteur du pole, cherchez (430) la hauteur de cet aſtre ſur l'horizon. Soit le vrai lieu de cet aſtre en M. (fig. 59) (voyez N° 420, les noms des parties de cette figure). Faites, *le rayon eſt au*

(*x*) MD eſt la parallaxe en aſcenſion droite meſurée ſur le parallele de l'aſtre, & non pas ſur l'équateur; mais cette diſtinction n'influe pas ſur les calculs ſuivans.

cosinus de la hauteur MT, *comme la parallaxe horizontale est à une parallaxe*, qu'il faut ôter de la hauteur MT, pour faire ensuite; *le rayon est au cosinus de la hauteur* MT *ainsi diminuée, comme la parallaxe horizontale est à la parallaxe* Mm *de hauteur que l'on cherche.* Car la premiere analogie donne une parallaxe qui n'est qu'en raison du sinus de la hauteur vraie MT, & qui n'est pas, par conséquent, exacte; mais elle l'est assez pour avoir à-peu-près la hauteur apparente *m*T en raison du sinus de laquelle on a vu (619) que la vraie parallaxe *m*M doit être.

653. PROBL. II. *Les mêmes choses étant données, trouver la parallaxe en ascension droite & en déclinaison.*

654. SOLUT. Dans le petit triangle *m*DM sensiblement rectiligne & rectangle en D, M*m* est la parallaxe de hauteur, MD est la mesure de l'angle MPD qui est la parallaxe d'ascension droite, & *m*D est la parallaxe de déclinaison : l'angle *m*DM est le complément de l'angle ZMP, à cause de l'angle droit PMD. Or cet angle ZMP se peut calculer par cette analogie (Trig. 197) : *le sinus de la distance* MZ *de l'astre au zénith, est au sinus de sa distance* MPZ *au méridien, comme le sinus de la distance* ZP *du pole au zénith, est au sinus de l'angle* ZMP *du vertical & du cercle de déclinaison de l'astre.* Cela posé, *le rayon est au cosinus de l'angle* ZMP *du vertical & du cercle de déclinaison, comme la parallaxe de hauteur* mM, *est à la parallaxe de déclinaison* mD. Ensuite, *le cosinus de la déclinaison de l'astre est au sinus de l'angle du vertical & du cercle de déclinaison, comme la parallaxe* mM *de hauteur, est à la parallaxe* MPD *d'ascension droite.* (Trig. 277).

655. Il est évident que dans ces pays-ci, qui sont septentrionaux, la parallaxe de déclinaison rend la déclinaison boréale apparente plus petite que la vraie, & la déclinaison australe plus grande; & on a vu que la parallaxe d'ascension droite écartant les astres du méridien, elle rend leur ascension droite apparente plus grande que la vraie avant le passage au méridien, & plus petite après ce passage.

656. REMARQUE. On peut calculer la parallaxe d'ascension droite & de déclinaison indépendamment de la hau-

teur de l'aſtre & de l'angle parallactique ZPM; ſavoir, en faiſant *la parallaxe d'aſcenſion droite = parallaxe horizontale × coſinus hauteur du pole × ſinus diſtance apparente de l'aſtre au méridien, le tout diviſé par le ſinus de la diſtance apparente de l'aſtre au pole élevé.* Ce qui a été démontré ci-deſſus (650) & *la parallaxe de déclinaiſon = parallaxe horizontale × ſinus hauteur du pole × ſinus diſtance apparente de l'aſtre au pole — parallaxe horizontale × coſinus hauteur du pole × coſinus diſtance apparente de l'aſtre au pole élevé × coſinus de la diſtance apparente de l'aſtre au méridien.* Où il faut remarquer qu'il y a un cas où l'on doit mettre + au-lieu de — : c'eſt lorſque la diſtance de l'aſtre au méridien & ſa diſtance au pole élevé ſont l'une de moins & l'autre de plus de 90 degrés. Cette derniere formule ſe tire aiſément de la derniere analogie de la premiere formule des différences dans la Trigonométrie ſphérique (273).

657. Coroll. *La déclinaiſon d'un aſtre reſtant la même, ſa parallaxe ne peut altérer la durée du paſſage de ſon diametre par un cercle horaire quelconque.* Car ſi elle l'altéroit, ce ne ſeroit que de la quantité dont le bord oriental de ce diametre auroit en arrivant au même cercle horaire plus ou moins de parallaxe en aſcenſion droite que n'en avoit le bord occidental quand il y a paſſé : or chaque bord paroiſſant paſſer par un même cercle horaire, paroît évidemment à la même diſtance du méridien ; donc ſi la déclinaiſon eſt la même, la formule précédente dönnera la même parallaxe en aſcenſion droite pour chaque bord, & par conſéquent il n'y aura aucune altération dans la durée du paſſage d'un bord à l'autre. Il eſt vrai, que ſi on meſure la diſtance apparente du bord oriental au bord occidental, par le moyen de quelque machine ou inſtrument, on y trouvera une altération cauſée par la parallaxe (*y*); mais auſſi dans le temps de cette meſure, le bord oriental n'eſt pas à la même diſtance apparente du méridien, que le bord occidental, comme ils s'y trouvent dans la meſure

(*y*) Ou du moins la proximité de la lune par rapport à l'Obſervateur, plus grande que par rapport au centre de la terre.

par l'intervalle des temps des paſſages des bords (z).

658. On peut appliquer les mêmes formules aux parallaxes de longitude & de latitude, & par-là abréger beaucoup le calcul de ces parallaxes, en faiſant *la parall. de longit.* = *parall. horizont.* × *ſinus hauteur du nonag.* × *ſinus diſt. app. de l'aſtre au nonag. le tout diviſé par le coſinus de la latitude app. de l'aſtre.* Et *la parall. en latit.* = *parall. horiz.* × *coſinus haut. du nonag.* × *coſinus latit. app. de l'aſtre* − *parall. horiz.* × *ſinus haut. du nonag.* × *coſin. diſt. app. de l'aſtre au nonag.* × *ſinus latit. app. de l'aſtre.* Le ſigne − ſe change en + lorſque la diſtance apparente de l'aſtre au nonagéſime, & ſa diſtance au pole de l'écliptique élevé ſur l'horizon, & déterminée par ſa latitude, ſont l'une de plus, l'autre de moins de 90 degrés (*a*).

Calcul des Parallaxes dans le Sphéroïde.

659. LOrſque la parallaxe horizontale d'un aſtre eſt de pluſieurs minutes, (il n'y a que la lune qui ſoit dans ce cas), alors pour la préciſion des calculs, il faut avoir égard à la figure de la terre, laquelle n'étant pas exactement ſphérique, mais à-peu-près elliptique (765) eſt cauſe que la ligne verticale d'un obſervateur ne paſſe pas par le centre de la terre, à moins que cet obſervateur ne ſoit placé ſur l'équateur terreſtre ou ſur le pole. Ceci ſera évident à celui qui conſidérera que dans une ellipſe P E M Q (fig. 77. la normale O I & le demi-diametre O C qui partent d'un même point O, s'écartent d'autant plus, que l'ellipſe differe plus du cercle, & que ce point O eſt plus loin des extrêmités P, Q des axes. Or la Normale O I détermine la direction de la verticale O Z de l'obſervateur en O, elle détermine donc la poſition de tous les plans verticaux, dont aucun par conſéquent ne paſſe par le centre C, excepté le méridien. Ainſi les calculs fondés ſur les formules précédentes, ne réduiſent pas les lieux apparents de la lune à ceux qui ſeroient vus du centre C de la terre. La différence eſt à la vérité aſſez petite, & ſa quantité dépend principalement de l'hypotheſe qu'on adopte ſur la figure de la terre. On ne doit avoir égard à cette différence que dans les calculs qui demandent beaucoup de délicateſſe, tels que ſont ceux des longitudes par les obſervations des éclipſes des étoiles par la lune. Nous ne pouvons pas entrer ici dans de longs détails ſur ces ſortes de calculs de parallaxes, nous nous contenterons d'en indiquer la méthode la plus ſimple.

660. En ſuppoſant que la terre ſoit un ſolide formé par la révolution d'une courbe ovale quelconque P E M Q ſur ſon petit axe P M, le

(z) Cette différence de diſtance du méridien ne change preſque point la valeur du diametre apparent.

(*a*) La démonſtration de cette formule pour les parallaxes ſe trouve dans le Mémoires de Berlin, pour 1749, pag. 198, & encore plus détaillée dans mon *Aſtronomie*. Le calcul du Nonagéſime ſe trouvera ci-après, art. 1131.

rayon de la terre tiré du centre C au pole P est CP, & CQ est le rayon de l'équateur. La verticale ZI passant par le zénith de l'observateur en O, & étant confondue avec la normale OI, va rencontrer l'axe en K, de sorte que ce point K, auquel tendent tous les à plombs, paroît être le centre de la terre à l'égard de l'observateur : si donc par les propriétés de la courbe PEMQ & par les dimensions connues de la terre, ayant fait CP = 1, on calcule OK & CK pour une latitude donnée quelconque, (mesurée par l'angle OIQ), & si on connoît la parallaxe horizontale p de la lune à l'égard d'un observateur placé sur l'équateur, laquelle par conséquent répond au rayon de la terre CP; on trouvera par une simple proportion que la parallaxe horizontale qui répond au rayon KO, est $= p \times KO$. Cela posé, soit la lune en L, toutes les formules de parallaxes, en prenant pour l'horizontale $p \times KO$, étant employées telles que nous les avons données, (n° *656* & *658*) réduisent exactement les lieux de la lune vus du point O aux lieux vus du point K & réciproquement, parce que le triangle parallactique OKL est dans le vrai plan vertical à l'égard de l'observateur; mais comme ce n'est qu'au point C que l'on doit rapporter les lieux de la lune vus du point O; voici les corrections qu'on doit faire aux lieux vus du point K, pour les réduire aux lieux vus du point C.

661. *Pour l'ascension droite & la déclinaison.* L'ascension droite réduite suivant la formule du n°. *656*, en mettant $p \times OK$ à la place de la parallaxe horizontale, n'a besoin d'aucune correction. Car en tirant CL, on voit que le petit triangle CKL donne la réduction du point K au point C. Or le plan de ce triangle est déterminé de position par CK qui est une portion de l'axe de l'équateur; donc ce plan est celui d'un cercle horaire, dans lequel l'astre L, l'œil K, & le centre C sont situés, & par conséquent (*613*) la correction (ou l'angle CLK) doit tomber toute entiere sur la déclinaison de la lune vue du point K. Mais dans le triangle CLK on a, CL ou (*625*) $\frac{1}{p}$: *sin* PKL ou *cosin déclin. vraie de la lune* : : CK : CLK, donc la formule de la correction de la déclinaison est $= p \times CK \times$ *cosin. déclin. vraie* ☾. Elle est soustractive à l'égard des déclinaisons de même dénomination que le pole élevé, additive pour celles de dénomination contraire.

662. *Pour la longitude & la latitude.* Soit P (fig. 78) le pole de l'équateur, Z celui de l'écliptique, m le lieu de la lune réduit par le calcul des formules des numeros *656* & *658*, à celui qui est vu du point K de la fig. 77, en employant dans ce calcul $p \times OK$ pour parallaxe horizontale; il est clair que les corrections qu'il faut faire ensuite à la longitude & à la latitude de la lune pour réduire le lieu m vu du point K au lieu M vu du point C, doivent placer ce lieu au même point M que les corrections de l'ascension droite & de la déclinaison : or celles-ci se réduisent à la seule correction de la déclinaison; donc le point M doit être placé sur le cercle de déclinaison Z m, & les corrections des longitude & latitude peuvent être déduites de la seule correction M m

de la déclinaiſon. On peut par conſéquent en trouver les formules par les analogies différentielles de la Trigonométrie ſphérique. Ainſi dans le triangle ZP*m* où ZP & PZ*m* ſont conſtants, & où la variation M*m* $= p \times$ CK $\times$ *coſ. déclin. vraie* ☾, on aura (Trig. 277) la formule de la correction de la longitude $= \frac{p \times \text{CK} \times \textit{coſ. long. vr.} ☾ \times \textit{ſin. obliq. écl.}}{\textit{coſ. latit. vraie} ☾}$. laquelle ſe peut réduire à celle-ci $= p \times$ CK $\times$ *coſ. long. vraie* ☾ $\times$ *ſin. obliq. éclipt.* ſans qu'il puiſſe réſulter une erreur de $\frac{1}{10}$ de ſeconde dans le calcul. Cette correction eſt additive lorſque la lune eſt dans ♋, ♌, ♍, ♎, ♏, ♐ & ſouſtractive dans les autres ſignes, le tout en ſuppoſant l'obſervateur dans la partie boréale de la terre, car pour celui qui ſeroit placé dans la partie auſtrale, il faudroit employer des ſignes contraires.

663. A l'égard de la correction de la latitude, on en peut trouver pluſieurs formules (Trig. 273); entr'autres les deux ſuivantes, $= p \times$ CK $\times$ *coſ. décl. vraie de la* ☾ $\times$ *coſ. angle à la* ☾ *entre les cercles de latitude & de déclinaiſon.* Et $= p \times$ CK $\times \frac{\textit{coſ. obliq. éclipt.}}{\textit{coſ. latit. vr.} ☾} - p \times$ CK $\times$ *ſin. decl. vr.* ☾ $\times$ *tang. latit. vr.* ☾. Or dans cette derniere formule, on voit que le ſecond terme doit être fort petit, & que ſans craindre l'erreur d'une ſeconde entiere, on peut toujours réduire la formule à $= p \times$ CK $\times$ *coſ. obliq. éclipt.* La correction doit être ôtée (*b*) de la latitude auſtrale de la lune, elle eſt additive à la latitude boréale quand l'obſervateur eſt placé dans la partie boréale de la terre. S'il eſt dans la partie auſtrale, il doit employer des ſignes différents.

664. Pour la hauteur & l'azimut. En ſubſtituant dans les raiſonnements des deux numéros précédents les termes d'azimut & de hauteur à ceux de longitude & de latitude, & en prenant Z (fig. 78) pour le zénith, on voit de même que les corrections qu'on doit faire à l'azimut & à la hauteur, ſe peuvent déduire de la ſeule correction M*m* en déclinaiſon, & qu'ainſi on a les formules ſuivantes. Pour l'azimut $= \frac{p \times \text{KC} \times \textit{ſin. azim.} ☾ \times \textit{coſ. haut. du pole}}{\textit{coſ. haut. vraie} ☾}$, & cette correction s'ajoute à l'azimut depuis le point de l'horizon oppoſé à celui qui répond au pole élevé juſqu'aux points Eſt & Oueſt; elle eſt ſouſtractive depuis le point de l'horizon qui eſt au-deſſous du pole élevé, juſqu'aux points Eſt & Oueſt. Pour la correction de la hauteur, on a les deux formules ſuivantes, $= p \times$ CK $\times$ *coſ. déclin. vr.* ☾. $\times$ *coſ. angle à la* ☾ *entre le vertical & le cercle de déclinaiſon.* Et $= p \times$ CK $\times \frac{\textit{ſin. haut. pole}}{\textit{coſ. haut. vr.} ☾} - p \times$ CK $\times$ *ſin. décl. vr.* ☾ $\times$ *tang. haut. vr.* ☾ : Cette

(*b*) C'eſt le contraire, comme on en peut juger par l'art. 661, car la correction des latitudes doit être de même dénomination que celle des déclinaiſons, du moins dans le cas de la fig. 77.

correction est soustractive de la hauteur réduite à celle qui seroit vue du point K (*c*).

665. REM. I. L'inconvénient qu'on rencontre dans ces sortes de subtilités de calcul, & qui jette de l'incertitude sur leur précision, c'est que les différentes hypotheses qu'on peut faire sur les dimensions de la terre déduites des mesures qui en ont été faites, donnent à OK & à CK des valeurs très-différentes. Dans la pratique on pourra supposer que la terre est un sphéroïde elliptique, dont le diametre de l'équateur surpasse l'axe qui aboutit aux poles, de $\frac{1}{215}$; alors on aura, en faisant $CP=1$, $OK=1{,}00730$, & $CK=0{,}00704$, pour la hauteur du pole $48^\circ\ 51'\ 29''$: si donc la parallaxe horizontale équatorienne p étoit de $57'\ 20''$, alors $p \times OK = 57'\ 45'', 1$, & $p \times CK = 24'',21$. Pour trouver OK & CK qui répondent à d'autres hauteurs de pole, on peut consulter *le Discours de M. de Maupertuis sur la parallaxe de la lune*. Paris, 1741, pag. 21 & suiv. (*d*).

666. REM. II. Lorsqu'il faudra réduire les vrais lieux de la lune calculés pour le point C, aux lieux apparents vus du point O, on commencera par appliquer à ces vrais lieux les corrections précédentes avec des signes contraires : ils se trouveront réduits aux vrais lieux vus du point K. Ensuite on appliquera à ceux-ci les parallaxes calculées selon les formules des nos. *657* & *658*, en prenant $p \times OK$ pour parallaxe horizontale, & en se servant de signes propres à réduire les vrais lieux aux lieux vus de dessus la surface de la terre.

CHAPITRE IV.

Des illusions optiques causées par la réfraction des rayons de la lumiere, en traversant l'Atmosphere de la Terre.

667. OUTRE les trois sources d'illusions dont on a parlé dans les trois Chapitres précédents, la réfraction des rayons de lumiere en est une quatrieme qui trouble toutes les observations Astronomiques.

668. I°. Il est certain, par expérience & par les regles

(*c*) Cette correction devroit s'ajouter à la hauteur vue du point K, pour avoir la hauteur vue du centre C si l'angle à la lune étoit obtus.

(*d*) V. la Note de l'article 1137. On peut consulter aussi le Mémoire de M. Pingré, dans le volume de l'Académie pour 1764, dont les démonstrations sont plus simples que celles de M. Maupertuis, ainsi que celles qui sont dans mon *Astronomie*.

de la Dioptrique, que les rayons de lumiere se détournent de leur route rectiligne, aussi-tôt qu'ils entrent obliquement dans un milieu d'une nature différente de celle du milieu d'où ils sortent, de sorte que si le milieu dans lequel ils entrent est uniformément dense, ces rayons font seulement un angle en entrant, puis ils suivent exactement la nouvelle direction qu'ils ont prise : mais si le milieu dans lequel ils entrent est d'une densité variable, par exemple, si la densité croît selon un certain rapport de sa profondeur, les rayons de lumiere se courberont de plus en plus, en suivant dans la grandeur & dans le sens de leurs angles de courbure, une loi qui sera une fonction de cette profondeur. C'est ce qui arrive aux rayons de lumiere qui viennent des astres à notre œil : en approchant de la terre B O F (fig. 51) ils s'enfoncent de plus en plus dans une masse d'air GCH, dont la densité augmente d'autant plus, que le rayon approche plus de la surface de la terre : ainsi à moins que ces rayons n'y entrent perpendiculairement, c'est-à-dire, à moins qu'ils ne soient dirigés au centre P de la terre, & par conséquent qu'ils ne passent par le zénith de l'observateur, ces rayons AC se détournent, & suivent une courbe CDO, dont la concavité est tournée vers le centre de la terre P ; sa longueur dépend de l'espace qu'ils parcourent en traversant cette Atmosphere d'air qui environne la terre, sa courbure dépend de la densité des différentes couches d'air par lesquelles les rayons passent, & de l'obliquité avec laquelle ils y entrent ; enfin cette courbe est située dans un plan vertical ; car, selon les loix de la Dioptrique, l'angle de réfraction est dans un plan perpendiculaire à la surface réfringente, au point où le rayon de lumiere la rencontre. Or les couches de l'Atmosphere ont leurs surfaces concentriques entr'elles & à la terre ; ainsi le plan perpendiculaire à la surface de l'atmosphere, l'est aussi à la surface de la terre : c'est donc un plan vertical.

669. II°. Il est certain encore que l'observateur s'appercevant de la présence des objets par l'impression que les rayons de la lumiere font dans son œil, il juge ces objets situés dans la direction de cette impression (581) ; & par

conséquent si le rayon qui vient d'un astre A, entre dans l'œil par une ligne courbe CDO, il juge que l'astre est dans la direction du petit côté de cette courbe, qui aboutit à l'œil; c'est-à-dire, il juge l'objet dans la droite O *a*, qui touche la courbe au point O où elle entre dans l'œil. D'où l'on voit.....

670. *Que tous les rayons de lumiere comme ZO qui viennent des astres qui sont au zénith, ne sont pas sujets à la réfraction.*

671. *Que la réfraction est toute en hauteur*, c'est-à-dire, *que par l'effet de la réfraction les astres paroissent plus près du zénith, ou plus élevés sur l'horizon qu'ils ne le sont réellement.*

672. *Que par l'effet de la réfraction, l'arc de la distance apparente de deux astres, est toujours plus petit que l'arc de leur distance véritable*; car la réfraction élevant les astres dans leurs verticaux, lesquels concourent tous au zénith, les fait paroître plus près de ce point de concours, & par conséquent plus près les uns des autres.

673. *Que (toutes choses d'ailleurs égales) tous les astres ont la même réfraction à la même hauteur sur l'horizon*; puisque la réfraction ne dépend pas de la distance de l'astre à l'observateur, mais seulement de la quantité d'air que le rayon doit traverser avant que d'arriver à l'œil : or notre atmosphere ne s'étend gueres qu'à 16 ou 17 lieues au-dessus de la surface de la terre.

674. *Que la réfraction d'un astre est d'autant plus grande*, c'est-à-dire, que la différence entre la hauteur vraie & la hauteur apparente d'un astre est d'autant plus grande, *que l'astre est plus loin du zénith.* Ainsi le rayon AO souffre une réfraction plus grande que le rayon EO, parce que celui-ci étant plus près du zénith, a bien moins d'air à traverser, & le traverse plus perpendiculairement.

675. *Que les astres sont réellement au-dessous de l'horizon lorsqu'ils paroissent être à l'horizon* : ainsi *les astres paroissent se lever plutôt & se coucher plus tard qu'ils ne le devroient en vertu des loix seules du mouvement diurne de la terre.*

676. *On voit donc que l'effet de la réfraction est précisément contraire à celui de la parallaxe, quoique l'une & l'autre suivent assez les mêmes regles* : & par conséquent la réfraction

qui convient à une certaine hauteur d'un aſtre étant donnée, on peut calculer comme ci-deſſus (653) la quantité dont elle altere l'aſcenſion droite & la déclinaiſon de cet aſtre; & en général on peut par un même calcul dépouiller à la fois les poſitions apparentes d'un aſtre de l'effet de la parallaxe & de la réfraction, en employant pour *élément*, la différence entre la parallaxe & la réfraction qui conviennent à la hauteur actuelle de cet aſtre.

677. *Que les réfractions doivent être inconſtantes & ſujettes à toutes les variations qui arrivent dans l'atmoſphere.* Ainſi elles doivent être moindres quand l'air eſt plus pur, plus raréfié par la chaleur, ou par la ſituation des lieux, comme vers l'équateur, & au ſommet des hautes montagnes. Au contraire, elles ſont plus grandes quand l'air eſt plus humide, plus condenſé, ou plus froid.

678. REMARQUES. I. On a remarqué, qu'excepté dans le voiſinage de l'horizon, où des vapeurs, & d'autres cauſes accidentelles & locales, donnent ſouvent aux rayons de lumiere, qui viennent preſque horizontalement raſer la ſurface de la terre, des inflexions irrégulieres & inconſtantes, la réfraction augmente de $\frac{1}{27}$ de ſa quantité moyenne, lorſque le mercure s'éleve d'un pouce dans le barometre, ou que la liqueur deſcend de 10 degrés dans le thermometre gradué ſelon les principes de M. de Reaumur. Selon cette obſervation, on peut corriger à proportion les réfractions moyennes, & les réduire à celles qui conviennent à l'état actuel de l'atmoſphere, indiqué par ces deux machines.

679. II. Ayant comparé entr'elles les réfractions les plus exactement déterminées par les Aſtronomes, on a remarqué qu'au-deſſus de 20 degrés, elles décroiſſoient à très-peu-près dans la raiſon des cotangentes des hauteurs des aſtres: auſſi la plupart des hypotheſes géométriques faites pour calculer des tables de réfractions Aſtronomiques, ſe réduiſent-elles à cette loi (*e*).

(*e*) Il faut pour plus d'exactitude que les hauteurs ſoient augmentées du triple de la réfraction à-peu-près connue, comme M. Bradley l'a

680. III. *Pour déterminer par observation les réfractions absolues*, la méthode la plus sûre qu'un seul observateur puisse suivre est celle-ci. Il faut qu'il établisse d'abord la hauteur apparente du pole par un grand nombre d'observations des étoiles circompolaires. Il faut ensuite trouver la hauteur apparente de l'équateur, par le moyen de la hauteur méridienne du soleil voisin de l'équinoxe, comparée à la déclinaison du soleil, qu'il faut déduire de son ascension droite observée le même jour, à l'aide de quelque étoile bien connue. Cela posé, la réfraction rendant trop grandes la hauteur apparente du pole & celle de l'équateur, la somme de ces hauteurs doit excéder 90°, & l'excès doit être la somme des deux réfractions qu'il faut partager en raison des cotangentes des hauteurs apparentes qui leur conviennent.

681. Par exemple, par un grand nombre d'observations de l'étoile polaire faites avec un instrument de six pieds de rayon, j'ai trouvé la hauteur apparente du pole au College Mazarin (*f*) de 48° 52′ 27,″2. Par cinq hauteurs méridiennes du soleil observées avec le même instrument depuis le 27 jusqu'au 31 Mars 1760, & réduites toutes au 29, j'ai trouvé la hauteur méridienne apparente du centre du soleil 44° 49′ 39″,1 : & par le moyen de plusieurs hauteurs correspondantes du soleil & de la lyre, j'ai conclu l'ascension droite du soleil le 29 Mars à midi, de 8° 29′ 33″; d'où il suit, qu'en supposant l'obliquité apparente de l'écliptique de 23° 28′ 16″, la déclinaison vraie du soleil étoit alors de 3°40′8″,5, de laquelle il faut ôter 7″,2 à cause de la parallaxe du soleil en déclinaison, & on a la déclinaison apparente 3° 40′ 1″,3. L'ayant ôtée de 44° 49′ 39″,1 reste la hauteur apparente de l'équateur 41° 9′ 37″,8, dont la somme avec 48° 52′ 27″,2 donne 2′ 5″ pour la somme des réfractions qui conviennent aux hauteurs apparentes 48° 52′ ½

---

reconnu en partant de la théorie de Simpson; & comme je l'ai démontré dans le XIIe Livre de mon Astronomie.

(*f*) C'est-là qu'étoit l'observatoire de M. l'Abbé de la Caille, 1′ 16″ au nord de l'observatoire royal, & sous le même méridien.

& 44° 50′. Les cotangentes de ces deux hauteurs sont 873 & 1005 : donc comme leur somme 1878, est à la somme des réfractions 2′ 5″, ainsi la cotangente de 48° 52′ $\frac{1}{2}$, est à 58″, 1, réfraction qui lui convient : & ainsi la cotangente de 44° 50′ est à 1′6″,9 réfraction qui convient à cette hauteur.

682. Ayant donc établi la réfraction qui répond à la hauteur apparente du pole, on en conclud la hauteur vraie. Dans cet exemple, la hauteur vraie du pole au College Mazarin résulte de 48° 51′ 29″,6. Ensuite il faut observer la hauteur méridienne d'une étoile qui passe fort près du zénith, où la réfraction est nulle, & l'on aura (416) la vraie déclinaison de cette étoile; enfin, on observera à une pendule bien réglée les instants auxquels cette étoile se trouvera à différents degrés de hauteur apparente, lorsque cette hauteur sera au dessous de 30 degrés, puis on calculera la hauteur vraie de cette étoile pour chacun de ces mêmes instants (503) & la différence entre la hauteur observée & la hauteur calculée donnera la réfraction qui conviendra à chacun de ces degrés de hauteur apparente, qui sont au-dessous de 30 degrés; à l'égard de ceux qui sont au-dessus, on les calculera facilement par les cotangentes, comme on l'a dit plus haut (*g*).

683. IV. C'est la réfraction qui fait paroître le soleil ovale à son lever ou à son coucher; car, comme elle n'agit que dans les verticaux, elle n'altere pas le diametre horizontal du soleil; mais étant plus grande au bord inférieur qu'au supérieur, elle accourcit leur distance apparente & fait paroître ces deux bords plus approchés, & par conséquent elle fait paroître le diametre vertical plus petit que le diametre horizontal.

684. V. Outre les réfractions Astronomiques, l'Atmosphere cause encore une espece de phénomene particulier, qu'on appelle *le Crépuscule* : c'est ce jour qu'on voit longtemps avant le lever du soleil, qui s'augmente insensible-

(*g*) Voyez l'excellent Mémoire de M. de la Caille sur les réfractions, dans les Mémoires de l'Académie, pour 1755, p. 547.

ment, qui dure encore long-temps après le coucher du ſoleil, & qui ne s'éteint qu'inſenſiblement pour faire place à la *nuit cloſe*. Lorſque le ſoleil n'eſt pas fort au-deſſous du plan de l'horizon d'un point de la ſurface de la terre, ſes rayons qui entrent dans la partie de l'atmoſphere voiſine de ce point, s'y briſent, s'y réfléchiſſent, & parviennent à ce point en une quantité d'autant plus grande que l'air eſt plus pur, & le ſoleil plus près de ſon horizon. On a remarqué que cette lumiere commence le matin à s'appercevoir lorſque le ſoleil n'a plus qu'environ 18 degrés à monter pour parvenir à l'horizon, & qu'elle ceſſe le ſoir lorſqu'il eſt deſcendu 18 degrés au-deſſous. D'où il ſuit qu'*il n'y a pas de nuit cloſe pour un lieu de la terre, lorſque le ſoleil à minuit eſt moins de 18 degrés au-deſſous de l'horizon*. C'eſt ce qui arrive à Paris pendant tout le mois de Juin; & dans les pays placés plus au nord, ce crépuſcule continuel dure d'autant plus long-temps vers le ſolſtice d'été, que ces pays ſont plus près du pole arctique. Il en eſt de même dans l'hémiſphere auſtral de la terre, lorſque le ſoleil eſt vers le tropique du ♑.

685. VI. On peut calculer l'heure du lever ou du coucher apparent du ſoleil ou des aſtres, & même l'heure du commencement du crépuſcule du matin, qu'on appelle le *Point du jour*, ou celle de la fin du crépuſcule du ſoir, en réſolvant un triangle ſphérique ZPC (fig. 38 & 39) dont les trois côtés ſont connus : l'un, ZP complément de la hauteur du pole; l'autre, PC diſtance de l'aſtre à ce même pole, laquelle ſe déduit de la déclinaiſon; & le troiſieme, un arc de 90° 33′ s'il s'agit du lever ou du coucher apparent d'un aſtre qui n'a pas de parallaxe ſenſible, ſinon un arc de 90° 33′ moins la parallaxe horizontale d'un aſtre, ou enfin un arc de 108° 0′, s'il s'agit du crépuſcule. L'angle ZPC étant trouvé par le calcul & réduit en temps, donne l'intervalle entre l'inſtant cherché & midi, s'il s'agit du ſoleil, ou en général, entre l'inſtant cherché, & celui du paſſage de l'aſtre par le méridien.



TROISIEME SECTION,

Qui contient la ſeconde Partie de l'Aſtronomie Terreſtre, les Regles du Calcul des mouvements des Planetes & des Cometes qui ſont indépendants de la révolution diurne de la Terre, & les différentes Méthodes pour en déterminer la Théorie par les Obſervations faites deſſus la Terre.

CHAPITRE PREMIER.

De la Théorie des Planetes vues de la Terre.

686. PUISQUE l'œil eſt expoſé à tant d'illuſions optiques, qui ne font paroître les planetes & les cometes ni dans leur vraie direction, ni dans le plan de leur orbite, il eſt naturel qu'un obſervateur placé ſur la terre, & qui delà veut établir la théorie de leurs mouvements propres & réels, choiſiſſe pour terme de comparaiſon le plan de l'écliptique, lequel, à cauſe que l'œil y eſt ſitué, eſt celui de tous qui eſt le moins ſujet aux illuſions optiques.

687. Mais comme le ſoleil eſt lui ſeul au centre de tous les mouvements vrais, & dans l'interſection de tous les plans des orbites céleſtes (33), il eſt clair que la théorie des planetes dépend de la ſolution de ce double problême:

Etant

Etant donnés les mouvements vus du ſoleil, déterminer les mouvements vus de la terre; & réciproquement étant donnés les mouvements vus de la terre, déterminer les mouvements vus du ſoleil. Or avant que de parvenir à cette ſolution, il faut établir par obſervation tous les mouvements de la Terre, qui eſt le lieu où l'œil eſt placé.

ARTICLE PREMIER.

Des meilleures méthodes pour établir les Eléments de la Théorie des mouvements réels de la Terre, ou des mouvements apparents du Soleil, avec des exemples appliqués à des obſervations faites pour la recherche de ces Eléments.

688. DEPUIS qu'on a perfectionné l'art de l'Horlogerie, & la théorie des mouvements apparents des étoiles fixes, il n'y a pas de meilleure méthode pour avoir avec préciſion les poſitions des aſtres dans le Ciel, que d'obſerver leur différence d'aſcenſion droite avec une étoile choiſie, & leur déclinaiſon par leur hauteur méridienne, ou par leur différence de déclinaiſon à l'égard de la même étoile, ou d'une autre étoile exactement obſervée, comme il a été expliqué dans les Articles VIII. & IX du Chapitre I de la II Section. Mais comme le ſoleil n'a pas de latitude ſenſible, on n'a beſoin que de ſon aſcenſion droite, pour en conclure ſa longitude, & par conſéquent le moment des paſſages par tel point de ſon orbite qu'on voudra, comme ſont les points équinoxiaux ou ſolſticiaux, ceux des diſtances moyennes, ceux des abſides, (dont l'un qui eſt l'aphélie de la terre, s'appelle l'*Apogée* du ſoleil, & l'autre, qui eſt le périhélie de la terre, s'appelle le *Périgée* du ſoleil), &c. enfin pour déterminer toutes les dimenſions de l'orbite du ſoleil, qui eſt l'ellipſe de la terre, en y appliquant les méthodes décrites dans la premiere Section, Chapitre II.

689. Ainſi, pour avoir le temps de la révolution annuelle du ſoleil, la méthode la plus ſûre eſt de déterminer par obſervation deux inſtants, auxquels le ſoleil ſe ſera trouvé

précisément dans la même position à l'égard d'une même étoile, en sorte qu'entre ces deux instants il y ait un grand nombre connu de révolutions. L'intervalle entre les deux instants divisé par le nombre des révolutions, donnera le temps de chaque révolution annuelle.

690. Par exemple. Par un milieu pris entre les observations faites à Paris par M. de la Hire le 27, 29 & 30 Juin 1684, on trouve que la longitude du soleil étoit moindre que celle de *Syrius* de $1^\circ\ 21'\ 59''$ le 29 Juin à $0^h\ 2'\ 50''$ temps moyen. Par un milieu pris entre les observations que j'ai faites au Cap de Bonne-Espérance le 28 & 30 Juin 1751, j'ai trouvé que la longitude du soleil étoit moindre que celle de *Syrius* de $2^\circ\ 30'\ 2''$ le 30 Juin à $0^h\ 2'\ 56''$ temps moyen, c'est à Paris le 29 Juin à $22^h\ 58'\ 16''$ temps moyen : la différence $1^\circ\ 8'\ 3''$ a du être parcourue (à raison de $57'\ 12''$ pour $24^h\ 0'\ 12''$ de temps moyen), en un jour $4^h\ 33'\ 21''$. Donc le 1 Juillet 1751 à $3^h\ 31'\ 37''$ temps moyen à Paris, le soleil avoit la même position à l'égard de Syrius que le 29 Juin 1684 à $0^h\ 2'\ 50''$ temps moyen, l'intervalle de temps est 24472 jours $3^h\ 28'\ 47''$: l'ayant divisé par 67, on trouve $365^j\ 6^h\ 8'\ 29''\ 31'''$ pour la révolution annuelle du soleil (*h*).

691. Mais en comparant de la même maniere le soleil à une étoile selon des observations faites en différentes saisons, c'est-à-dire, en différents points de l'orbite du soleil, on a remarqué qu'on ne trouvoit pas la même quantité de temps de révolution annuelle ; que si on comparoit des observations correspondantes faites en Mai, Juin, Juillet, Août, on trouvoit constamment moins de temps dans les révolutions que lorsqu'on comparoit des observations faites en Novembre, Décembre, Janvier ou Février : ensorte que ce n'étoit que les observations faites à la fin de Mars ou au commencement d'Avril, qui s'accordassent à donner le même temps que celles qui avoient été faites à la fin de

---

(*h*) C'est la révolution sydérale; mais la révolution tropique ou le retour des saisons qui fait la durée de l'année est de $365^j\ 5^h\ 48'\ 48''$ (699).

Septembre ou au commencement d'Octobre ; cette inégalité étant constante, on ne peut l'attribuer à quelqu'une de ces petites erreurs inévitables dans les observations ; il faut donc qu'elle se trouve dans la théorie du soleil.

692. Ainsi par une observation de M. de la Hire, faite le 21 Décembre 1684, à $23^h 59' 50''$ temps moyen à Paris, le soleil étoit éloigné de $171^o 55' 45''$ en longitude à l'égard de Syrius ; & par une observation que j'ai faite au Cap de Bonne-Espérance le 25 Décembre 1751, à $0^h 0' 33''$ de temps moyen, c'est-à-dire le 24 Décembre à $22^h 55' 53''$ temps moyen à Paris, j'ai trouvé le soleil éloigné de Syrius de $172^o 43' 41''$; la différence $47' 56''$ fut parcourue en $18^h 48' 17''$ (à raison de $1^o 1' 11''$ en $24^h 0' 30''$ de temps moyen). Donc le soleil se trouva le 24 Décembre 1751 à $4^h 7' 36''$ temps moyen à la même position à l'égard de Syrius que le 21 Décembre 1684, à $23^h 59' 50''$. L'intervalle 24472 jours $4^h 7' 46''$ étant divisé par 67 donne $365^j 6^h 9' 4'' 16'''$ pour la révolution annuelle du soleil.

693. REM. I. Il est vrai, que si outre les petits mouvements apparents des étoiles qui sont connus, l'étoile dont on se sert est sujette à quelque mouvement particulier qui devienne sensible au bout de quelques années, elle ne peut servir à donner des révolutions annuelles qui soient exactes, à moins qu'on ne tienne compte de ce mouvement. *Syrius* est dans ce cas, & vraisemblablement toutes les plus brillantes étoiles du ciel, à chacune desquelles on commence à appercevoir du mouvement dont le sens & la quantité sont différents, & ne sont pas encore bien décidés (*i*). Par de longues recherches que j'ai faites sur *Syrius*, je trouve qu'en 67 ans il est moins avancé en longitude de $1' 3''$ qu'il ne devroit l'être selon le calcul de la précession des équinoxes.

(*i*) Il faut sur-tout distinguer *Arcturus* ou la belle étoile du Bouvier, dont le déplacement en latitude est de près de 4 minutes par siecle. Il y a tout lieu de croire que le soleil même qui est semblable aux étoiles fixes, a un mouvement propre dont nous ne pouvons pas nous appercevoir, mais qui nous est indiqué par son mouvement de rotation. Voyez ce que j'en ai dit à la fin de mon grand Mémoire sur les taches du soleil, *Mémoires de l'Académie* 1776.

Cette différence augmente de 26′ 27″ l'intervalle des observations faites en Juin 1684 & 1751, d'où il résulteroit que la révolution annuelle du soleil seroit de 365 jours 6h 8′ 53″ 12‴. Cette même différence augmente de 24′ 44″ l'intervalle des observations faites en Décembre, & donne 365 jours 6h 9′ 26″ 25‴ pour la révolution annuelle. Mais quel que soit le mouvement particulier de cette étoile, pourvu qu'il ne soit pas sensible en six mois, il ne peut empêcher qu'on ne démontre l'inégalité des révolutions annuelles tirées des comparaisons d'observations faites en différentes saisons des mêmes années, & c'est ce qu'on a eu en vue principalement.

694. De cette inégalité il suit évidemment que *le soleil n'a pas la même vîtesse lorsqu'il revient au point d'où il étoit parti* (*k*). ce qui ne peut être, à moins que la ligne des absides n'ait un mouvement, & qu'ainsi le même point du ciel ne réponde pas toujours à la même anomalie du soleil. En effet, on conçoit que si ayant observé d'abord le soleil dans le point où étoit son apogée, (telles sont les observations qu'on fait à la fin de Juin,) il se trouve qu'en achevant une révolution à l'égard des étoiles, & qu'étant retourné en ce même point, l'apogée n'y soit plus, mais un peu au-delà, le soleil doit avoir dans ce point plus de vîtesse qu'il n'en peut avoir dans son apogée, & par conséquent il doit atteindre ce point plutôt qu'il n'eût fait si l'apogée y fût resté; donc le temps de la révolution en devient plus court : c'eût été le contraire, si l'observation avoit été faite (en Décembre) dans le perigée; ou si l'apogée, au lieu de s'avancer dans l'ordre des signes, avoit rétrogradé : d'où l'on voit, 1°. Que les observations rapportées ci-dessus, prouvent que *la ligne des absides du soleil a un mouvement selon l'ordre des signes*; 2°. Que les observations les plus propres à déterminer la révolution annuelle, sont celles où le soleil se trouve vers les points de ses distances moyennes; ou bien il faut prendre un milieu entre deux révolutions déduites d'observations faites dans un même in-

(*k*) C'est-à-dire à la même étoile.

tervalle de temps, & dans deux points opposés, comme par exemple, dans l'apogée, puis dans le périgée; cette derniere maniere d'en faire le calcul est la plus sûre, à cause de l'uniformité du mouvement du soleil pendant plusieurs jours aux environs de ses absides, qui fait qu'on réduit exactement les observations faites dans un jour, à celles qu'on eût faites deux ou trois jours plutôt ou plus tard. Par les exemples que nous avons rapportés ci-dessus, nous établirons donc la vraie révolution annuelle du soleil, de 365 jours $6^h\ 9'\ 9''\ 48'''$ (*l*).

695. Rem. II. En comparant les temps des retours du soleil au même équinoxe, au même solstice, ou enfin au même point de l'écliptique, non-seulement on trouve de même la révolution du soleil inégale dans les différents temps de l'année, mais de plus on la trouve plus petite qu'aucune de celles que nous venons de déterminer. Or à cause du mouvement de l'apogée du soleil, il est clair que pour éviter les inégalités, il faut comparer entr'elles les observations faites, ou dans un même point vers les distances moyennes, ou dans deux points opposés, tels que sont deux équinoxes d'Automne & deux équinoxes de Printemps de deux mêmes années, pour prendre un milieu entre les deux révolutions qui en résulteront; ou enfin, dans deux solstices d'Eté & deux solstices d'Hyver des mêmes années. Nous nous contenterons de rapporter un exemple de la premiere maniere.

696. Le 28 Mars 1657 à $0^h\ 5'\ 1''$ temps moyen, M. Cassini observa au grand Gnomon de S. Pétrone de Bologne, la hauteur apparente du centre du soleil de $48^o\ 46'\ 43''$, & par conséquent (ayant égard à la réfraction & à la parallaxe) la vraie de $48^o\ 45'\ 52''$: ôtant $45^o\ 30'\ 40''$ qui est la hauteur de l'équateur, reste $3^o\ 15'\ 12''$ déclinaison boréale du soleil, laquelle répond (456) à la longitude $8^o\ 11'\ 16''$ ♈, & qui doit être réduite à $8^o\ 11'\ 3''$ par la raison qu'on dira bientôt (709). Cette observation réduite

(*l*) Par rapport aux étoiles fixes.

au méridien de Paris, répond au 27 Mars 1657 à 23h 28′ 56″ temps moyen. Or l'an 1760, en réduisant en une seule cinq hauteurs méridiennes consécutives observées avec un instrument de six pieds de rayon, j'ai trouvé le 28 Mars à 0h 5′ 1″ temps moyen au College Mazarin, la hauteur apparente du centre du soleil de 44° 26′ 26″, & par conséquent la vraie de 44° 25′ 25″ $\frac{1}{2}$. Otant la hauteur de l'équateur 41° 8′ 30″ $\frac{1}{2}$, reste 3° 16′ 55″ déclinaison boréale du soleil, qui répond à 8° 15′ 51″ ♈ de longitude, & que je réduis à 8° 15′ 42″ ♈. La différence entre ces deux positions du soleil est de 4′ 39″, que le soleil parcourt en 1h 53′ 15″ (à raison de 59′ 8″,3 par jour); donc le 27 Mars 1760 à 22h 11′ 46″ temps moyen, le soleil étoit dans la même position à l'égard des points équinoxiaux, que le 27 Mars 1657 à 23h 28′ 56″ temps moyen : l'intervalle est de 37619 jours 22h 42′ 50″, lequel étant divisé par 103, donne la révolution annuelle du soleil à l'égard du point équinoxial du bélier, de 365 jours 5h 48′ 48″. Dans ces deux observations le soleil étoit dans ses distances moyennes.

697. De-là nous tirons plusieurs conséquences fort importantes. 1°. *Il faut établir trois sortes de révolutions dans la théorie du soleil.* Une révolution *Syderale*, c'est le temps du retour du soleil à une même étoile : elle est de 365 jours 6h 9′ 9″ 48‴. Une révolution *Tropique*, c'est l'intervalle d'un retour du soleil au même point de l'écliptique, au même colure, au même *Tropique*, &c. elle est de 365 jours 5h 48′ 48″ 0‴ : & une révolution *Anomalistique*, c'est le temps du retour du soleil à la même abside : elle est, comme on le verra bientôt, de 365 jours 6h 15′ 46″.

698. 2°. Puisque le retour du soleil au même point de l'Ecliptique se fait 20′ 21″ 48‴ de temps avant que la révolution entiere soit achevée à l'égard des étoiles; il suit que les colures & par conséquent les points équinoxiaux & solsticiaux, ont un mouvement rétrograde à l'égard du soleil d'un peu plus de 50″ 11‴ de degrés par an, ce qui fait qu'en comptant les ascensions droites & les longitudes, depuis le point équinoxial du bélier, le soleil paroît avoir décrit l'écliptique entiere, tandis qu'il n'en a parcouru

réellement que 359° $59'$ $9''$ $49'''$; ce mouvement des points équinoxiaux s'appelle *la précession des équinoxes.*

699. 3°. Parce que la révolution tropique ramene les saisons différentes de l'année, qui dépendent (382) des passages successifs du soleil par les points équinoxiaux & solsticiaux, elle est la plus propre pour régler les temps dans l'ordre civil & politique, & il convient d'y assujettir les calcul astronomiques, quoique la révolution sydérale soit la plus naturelle. Il faut donc tenir compte des différences entre ces révolutions, & supposer que les 360 degrés de l'écliptique répondent à 365 jours 5^{h} $48'$ $48''$, quoique dans cet intervalle de temps le soleil ne parcoure réellement dans le ciel étoilé que 359° $59'$ $10''$.

700. 4°. Tous les points qui sont réellement fixes dans le ciel, doivent donc paroître s'avancer à l'égard des points équinoxiaux de $50''$ par an, selon l'ordre des signes.

701. 5°. Et parce que la révolution anomalistique du soleil excede encore la sydérale de $6'$ $36''$ de temps, il suit que l'apogée du soleil s'avance de $16''$ $16'''$ par an à l'égard des étoiles, & d'environ $1'$ $6'',4$ à l'égard des points équinoxiaux.

702. 6°. Le mouvement de l'apogée du soleil, est l'indice d'une modification légere, mais constante, dans la force centrale de la terre (297). Nous en dirons quelque chose dans la suite, aussi-bien que de la rétrogradation des point équinoxiaux.

703. Connoissant maintenant les temps des différentes révolutions du soleil, on peut calculer toutes les dimensions de l'ellipse qu'il paroît décrire, par le moyen de trois de ses longitudes observées avec soin dans les circonstances favorables, selon la méthode expliquée, n°. 230. Par exemple, en comparant le soleil à *Syrius*, j'ai trouvé au Cap de Bonne-Espérance, la longitude vraie du soleil le 30 Septembre 1751 à 23^{h} $49'$ $44''$, temps moyen, de 6^{s} 7° $51'$ $49''\frac{1}{2}$: le 30 Décembre à 0^{h} $3'$ $0''$, temps moyen, de 9^{s} 8° $30'$ $5''$; & le 28 Mars 1752 à 0^{h} $5'$ $2''$ de temps moyen, de 0^{s} 8° $9'$ $25''\frac{1}{2}$, le tout corrigé comme on le dira (709) : Delà j'ai conclu le lieu du périgée du soleil à la

fin de 1751 dans $9^s\ 8^o\ 40'\ 45''$, le temps du passage du soleil par ce point le 30 Décembre à $3^h\ 9'\ 20''$ de temps moyen au méridien de Paris, l'excentricité de 16809 parties égales, dont la distance moyenne de la terre au soleil en contient 1000000, & par conséquent (223) la plus grande équation du centre, de $1^o\ 55'\ 34''\frac{1}{2}$.

704. Du 30 Décembre 1751 à $3^h\ 9'\ 20''$ temps moyen, au 1 Janvier 1752 à midi, temps moyen, (c'est l'instant que presque tous les Astronomes prennent pour *l'époque* des moyens mouvements du soleil, dans les années bissextiles; & la veille du 1 Janvier à midi, temps moyen, est l'instant qu'ils prennent pour l'*époque* de l'année, quand elle n'est pas bissextile), il y a 1 jour $20^h\ 50'\ 40''$, pendant lesquelles le soleil par son mouvement moyen décrit $1^o\ 50'\ 30''$: les ajoutant au lieu du périgée $9^s\ 8^o\ 40'\ 45''$, on a l'époque des moyens mouvements pour le commencement de l'année 1752, de $9^s\ 10^o\ 31'\ 15''$.

705. Ayant calculé de même un grand nombre d'observations choisies, on s'assurera des vrais éléments de la théorie du soleil; & s'ils different en quelque chose, on prendra un milieu entre les différents résultats qu'on aura trouvés.

706. Mais parce qu'un Astronome doit établir les éléments de ses théories les plus indépendamment des hypotheses qu'il est possible, il sera très-à-propos de rechercher la position de la ligne des absides, & l'époque d'un passage du soleil par cette ligne, selon la méthode expliquée nº. 167, & sa plus grande équation avec son excentricité par la méthode expliquée nº. 217 & 223. Par exemple, ayant comparé le soleil à *Syrius*, j'ai trouvé sa longitude le 30 Juin 1751 à $0^h\ 2'\ 55''$ de temps moyen au Cap de Bonne-Espérance, de $3^s\ 8^o\ 9'\ 2''$, & le 30 Décembre à $0^h\ 3'\ 0''$ de $9_s\ 8^o\ 30'\ 5''$. La différence $6^s\ 0^o\ 21'\ 3''$ est plus grande de $20'\ 30''$, que $180^o\ 0'\ 33''$ que le soleil décrit pendant une demi-révolution anomalistique. Or à raison de $57'\ 12''$ par jour, le Soleil a parcouru cet excès en $8^h\ 36'\ 13''$, & il est parvenu le 30 Juin à $8^h\ 39'\ 8''$ à $180^o\ 0'\ 33''$ du lieu où il étoit le 30 Décembre à $0^h\ 3'\ 0''$. L'intervalle de ces instants

eſt de 182 jours 15^h 23′ 52″, plus grand de 15′ 59″ que la demi-révolution anomaliſtique : Donc le 30 Juin à 8^h 39′ 8″ le ſoleil n'avoit pas encore atteint ſon apogée : faiſant comme 4′ 0″, différence entre les vîteſſes diurnes du ſoleil apogée & périgée, ſont à 57′ 12″ vîteſſe diurne dans l'apogée (*m*) ; ainſi 16′ 5″ ſont à 3^h 48′ 34″ qu'il lui a fallu encore pour parvenir à l'apogée : Donc le ſoleil y eſt arrivé le 30 Juin 1751 à 12^h 27′ 42″ au Cap, ou à 11^h 23′ 2″ temps moyen à Paris, étant alors dans 3^s 8° 38′ 44″, qui eſt le lieu de l'apogée du ſoleil à la fin de Juin 1751.

707. En comparant les deux longitudes du ſoleil rapportées (n° 703) pour le 30 Septembre 1751 & le 28 Mars 1752, on trouve que le ſoleil a parcouru dans leur intervalle 180° 17′ 36″ par ſon mouvement vrai : le mouvement moyen qui répond à l'intervalle des temps des obſervations, étoit de 176° 26′ 29″ ; la moitié de la différence 1° 55′ 33″ ½ eſt la plus grande équation du ſoleil, à laquelle il faut cependant ajouter 1″, parce que le 28 Mars le ſoleil étoit à un peu plus d'un degré du point où eſt ſa diſtance moyenne. On a donc 1° 55′ 34″ ½ pour la plus grande équation, & 16809 pour l'excentricité.

708. A l'égard de la révolution anomaliſtique du Soleil, nous la trouverons en comparant le temps du paſſage de cet aſtre par ſon périgée le 30 Décembre 1751 à 3^h 9′ de temps moyen à Paris, avec celui du paſſage qui réſulte des obſervations de Waltherus faites à Nuremberg l'an 1487 : ſelon ces obſervations (voyez Mém. de l'Acad. année 1749 pag. 53 & ſuiv.) le 12 Décembre à 12^h 36′ de temps moyen, le ſoleil étoit éloigné de 3° 49′ 36″ de ſon périgée : il y eſt donc parvenu le 16 Décembre à 6^h 5′ au méridien de Paris ; l'intervalle eſt de 96428 jours 21^h 4′, qui donne la révolution de 365 jours 6^h 15′ 42″. De même, le ſoleil étoit apogée en 1503 le 16 Juin à 18^h 0′ au méridien de Paris : or nous

(*m*) C'eſt la vîteſſe périgée qu'il faut employer, conformément à ce qu'on a vu, art. 167 ; alors on trouve le paſſage par l'apogée 11^h 42′ 57″ & non pas 11^h 23′ 2″ comme je l'ai déja remarqué dans mon *Aſtronomie*, art. 1282.

venons de voir qu'il l'étoit auſſi le 30 Juin 1751 à $11^h 23'$, l'intervalle 90584 jours 17^h $23'$ donne la révolution de 365 jours 6^h $15'$ $50''$. On peut donc la ſuppoſer de 365 jours 6^h $15'$ $46''$.

709. REM. III. Avant que d'employer les obſervations du ſoleil à quelque recherche délicate, il faut les dégager de quatre petites inégalités périodiques, qui viennent de l'action des planetes ſur la terre, comme on l'expliquera dans la ſuite (*n*).

ARTICLE II.

Des mouvements des Planetes rapportés au plan de l'Ecliptique, tant par rapport au Soleil que par rapport à la Terre.

710. LES orbites des planetes étant dans autant de plans différents (34), mais qui paſſent tous par le centre du ſoleil, il ſuit que la droite d'interſection de chaque plan avec le plan de l'écliptique, paſſe auſſi par le centre du ſoleil, & que par conſéquent les deux points où chaque orbite traverſe le plan de l'écliptique ſont diamétralement oppoſés ou éloignés de 180 degrés vus du ſoleil. Ainſi pendant chaque révolution, chaque planete vue du ſoleil doit décrire une moitié de ſon orbite au-deſſus du plan de l'écliptique, & l'autre moitié au-deſſous. Or l'écliptique étant un grand cercle de la ſphere céleſte apparente, ſon plan diviſe cette ſphere en deux hémiſpheres égaux, l'un boréal, dans lequel le pole arctique eſt compris, & l'auſtre auſtral où ſe trouve le pole antarctique. Donc chaque planete a une latitude boréale pendant qu'elle décrit une moitié de

(*n*) Ces inégalités ſont produites par la préceſſion inégale des équinoxes & par les attractions de Vénus, de Jupiter, & de la lune ſur la terre; on en trouve les Tables parmi celles du ſoleil de M. de la Caille.

ſon orbite, & une latitude auſtrale, pendant qu'elle décrit l'autre moitié.

711. Les deux points de l'orbite d'une planete qui ſont à l'interſection du plan de l'écliptique, s'appellent *les Nœuds* de la planete. On appelle *Nœud aſcendant* celui où la planete paſſe de la latitude auſtrale à la latitude boréale, & on le déſigne par ce caractere ☊. On appelle *Nœud deſcendant* celui où la planete paſſe de la latitude boréale à la latitude auſtrale, & on le déſigne ainſi ☋.

712. Soit, par exemple, E ☊ P ☋ l'orbite d'une planete ſupérieure (fig. 62), ou inférieure (fig. 63). Soit B ☊ C L ☋ la projection orthographique de cette orbite ſur le plan de l'écliptique; ſi le mouvement annuel de la planete ſe faiſoit dans cette projection, la planete paroîtroit toujours dans le plan de l'écliptique, & par conſéquent elle n'auroit jamais de latitude; mais comme la planete ſe meut dans l'orbite E ☊ P ☋, il eſt clair que ce mouvement vu du ſoleil & rapporté à l'orbite de projection, ſe doit expliquer de même que le mouvement apparent du ſoleil dans l'écliptique & rapporté à l'équateur (376). Si donc on ſuppoſe d'abord que la planete ſoit dans ſon nœud ☊, elle n'a aucune latitude; mais en avançant vers ♈, ſa latitude va en augmentant, elle devient de plus en plus boréale, juſqu'à ce que la planete ſoit vers F à 90° du ☊, où la latitude eſt la plus grande, & égale à l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la planete ſur celui de l'écliptique. Enſuite cette latitude décroît depuis F juſqu'au ☋ où elle eſt nulle, puis elle devient auſtrale, croiſſante juſqu'au point E à 90° du ☋, enfin décroiſſante juſqu'au ☊ où elle eſt nulle pour changer de dénomination.

713. La latitude d'une planete en un point quelconque P de ſon orbite, ſe meſure par l'angle au ſoleil P S L, entre la droite S P tirée du ſoleil par le vrai lieu P de la planete, & la droite S L tirée du ſoleil par le point L de la projection du point P, déterminé par la perpendiculaire P L au plan de l'écliptique.

714. La droite S P s'appelle *la diſtance de la planete au ſoleil*, & la droite S L s'appelle *la diſtance accourcie*.

715. Si on ſuppoſe le plan de l'orbite de la planete prolongé comme à l'infini juſqu'au fond du ciel, alors cette orbite, qui eſt réellement une ellipſe, deviendra, (373) à l'égard du ſoleil S, un grand cercle N*p*D*b* de la ſphere céleſte, incliné ſur l'écliptique céleſte N*l*D*e*; les interſections ou nœuds de ces deux cercles ſeront en N, D; ſi l'on ſuppoſe encore que le point ♈ marqué ſur l'écliptique céleſte N*l*D*e*, eſt celui où commence le ſigne du Bélier; ſi enfin du point D comme pole, on imagine un arc ♈ *b* décrit juſques à la rencontre de l'orbite N*p*D*b*, le point *b* ſera celui d'où l'on commencera à compter les longitudes de la planete dans ſon orbite; ainſi l'arc *b*D*p* compté ſelon l'ordre des ſignes du zodiaque, s'appelle *la longitude de la planete dans ſon orbite.* Du point *p* ayant abaiſſé l'arc *p l* perpendiculaire ſur l'écliptique, l'arc de l'écliptique ♈ D*l* s'appelle *la longitude vraie de la planete*, & l'arc p l *ſa latitude.* L'arc *b* D de l'orbite s'appelle *le lieu du nœud aſcendant*, & l'arc ♈ D de l'écliptique, s'appelle *la longitude du nœud aſcendant.* L'arc de l'orbite D*p* s'appelle *l'argument de la latitude*, c'eſt la diſtance de la planete à ſon nœud aſcendant comptée ſelon l'ordre des ſignes. D'où il ſuit que *la latitude eſt boréale dans les ſix premiers ſignes de l'argument de latitude, & auſtrale dans les ſix derniers ſignes.* Les points *f*, *g* éloignés de 90° des nœuds N, D, s'appellent *les limites* de la planete.

716. La *longitude* ou la *latitude* d'une planete vue du ſoleil, s'appelle *héliocentrique*, & la longitude ou la latitude vue de la terre, s'appelle *géocentrique.*

717. La latitude géocentrique d'une planete garde à-peu-près les mêmes apparences que la latitude héliocentrique: Car, 1°, quand la planete eſt dans un de ſes nœuds, elle n'a aucune latitude géocentrique, puiſqu'alors la planete & l'œil de l'obſervateur ſont dans un même plan. 2°. La latitude géocentrique de la planete eſt boréale ou auſtrale, ſelon qu'elle ſe trouve dans les ſix premiers ou dans les ſix derniers ſignes de l'argument de latitude. Mais à l'égard de ſa quantité, elle dépend non-ſeulement de l'argument

de latitude, mais encore de la distance de la planete à la terre; car soit T Q R l'orbite de la terre, T le lieu où se trouve la terre sur son orbite à l'instant que la planete est au point P sur la sienne, il est clair qu'ayant tiré T P, T L, la latitude géocentrique de la planete doit être mesurée par l'angle P T L rectangle en L, à cause que P L est perpendiculaire au plan de l'écliptique, sur lequel est l'orbite de la terre.

718. La longitude géocentrique de la planete P vue de la terre placée en T, est l'arc de l'écliptique ♈ D M compté selon l'ordre des signes, entre la droite T ♈ tirée de la terre au premier point de l'écliptique, & la droite T M tirée de la terre par le point L de la projection de la planete, & prolongée en M jusqu'au fond du ciel.

719. A cause de la distance S T infiniment petite par rapport à la distance du soleil au fond du ciel, il est clair que la droite T ♈ est confondue avec la droite tirée du soleil au point ♈, de sorte que la différence entre la longitude ♈ D *l* vue du soleil, & celle qui est vue de la terre, est mesurée par l'arc céleste M *l*, qu'on appelle (576) *la parallaxe de l'orbe annuel*; ou par l'angle S L T qui a cet arc M *l* pour mesure, à cause du rayon de l'écliptique céleste infiniment long. Or cet angle est, toutes choses d'ailleurs égales, d'autant plus grand que la distance S T du soleil à la terre est plus grande par rapport à la distance S L du soleil au lieu de la planete réduit à l'écliptique. D'où il suit que *pour réduire les longitudes & latitudes héliocentriques d'une planete à ses longitudes & latitudes géocentriques, il faut connoître la position de la terre à l'égard du soleil, & le rapport des distances* S T, S L.



ARTICLE III.

Expoſition générale du procédé des calculs néceſſaires pour trouver la longitude & la latitude d'une Planete vue du Soleil & de la Terre, pour un inſtant donné.

720. I. REGLE. RÉDUISEZ le temps donné en temps moyen (467).

721. II. Prenez l'intervalle entre l'inſtant donné réduit en temps moyen, & l'inſtant de l'époque du précédent paſſage de la terre par ſon périhélie, & faites cette analogie: *Comme le temps de la révolution entiere de la terre eſt à l'intervalle trouvé; ainſi 360 degrés ſont à l'anomalie moyenne de la terre* (190).

722. III. Réduiſez l'anomalie moyenne en anomalie vraie (199), & ajoutez-la au vrai lieu du périhélie de la terre, & vous aurez le vrai lieu héliocentrique de la terre, en quelque point de ſon orbite comme en T (fig. 62 & 63) ou rapporté au fond du ciel en H. De ſorte que la longitude de la terre ſera l'arc de l'écliptique ♈ D H.

723. IV. Ajoutez ſix ſignes ou 180 degrés au vrai lieu de la terre, & vous aurez (372) le vrai lieu du ☉ vu de la terre au point O de l'écliptique, enſorte que la longitude géocentrique du ſoleil, ſera l'arc de l'écliptique ♈ D H N O.

724. V. Calculez (207) la diſtance S T du ſoleil à la terre.

725. VI. *Pour la planete*, faites, *comme le temps de la révolution périodique de la planete, eſt à l'intervalle de temps entre l'inſtant donné & l'époque de ſon précédent paſſage par le périhélie; ainſi 360° ſont à l'anomalie moyenne de la planete.*

726. VII. Réduiſez l'anomalie moyenne en anomalie vraie, & ajoutez-la au lieu du périhélie de la planete, & vous aurez en P le vrai lieu de la planete vue du ſoleil dans ſon orbite, ou en *p* dans le fond du ciel, enſorte que la longitude héliocentrique de la planete dans ſon orbite eſt l'arc *b* D *p*.

727. VIII. Calculez la distance S P de la planete au soleil. Or il faut que les distances S T, S P soient rapportées à une même mesure (280), telle, par exemple, que la distance moyenne de la terre au soleil soit de 10000 parties égales.

728. IX. Otez le lieu *b* D du nœud ascendant D, de la longitude héliocentrique *b* D *p* de la planete dans son orbite, & vous aurez l'argument de latitude D *p*.

729. X. Faites, (Trig. 117). *Comme le rayon est au sinus de l'inclinaison* p D l *de l'orbite de la planete ; ainsi le sinus de l'argument de la latitude* D p, *est au sinus de la latitude héliocentrique* p l.

730. XI. Réduisez l'argument de latitude D *p* à la vraie distance D *l* du lieu du nœud au point de projection de la planete, & qu'on peut appeller *l'argument de latitude mesuré sur l'écliptique*, ce qui se fait (Trig. 120.) par cette analogie: *Comme le rayon est au cosinus de l'inclinaison de l'orbite ; ainsi la tangente de l'argument de latitude* D p, *est à la tangente de cet argument* D l *mesuré sur l'écliptique*. La différence entre D *p* & D *l* s'appelle, dans les Tables Astronomiques, *la réduction*, parce qu'elle sert à réduire la longitude mesurée sur l'orbite de la planete, à celle qu'on appelle *la longitude vraie*, & qui se rapporte à l'écliptique.

731. XII. Ajoutez cet argument D *l* à la longitude ♈ D du nœud ascendant, & vous aurez la longitude héliocentrique vrai ♈ D *l* de la planete.

732. XIII. Réduisez la distance trouvée (727) S P à la distance accourcie S L, en faisant (Elem. 747) *Comme le rayon est au cosinus de la latitude* P S L *de la planete vue du soleil ; ainsi la distance* S P, *est à la distance accourcie* S L.

733. XIV. Prenez la différence entre les longitudes héliocentriques ♈ DH, ♈ D *l* de la terre & de la planete, & dans le triangle rectiligne S L T, vous aurez l'angle T S L (qu'on appelle *l'angle au soleil*, ou *l'angle de commutation*), avec les côtés S L, S T. Calculez (Elem. 752) l'angle S T M ou O T M entre le lieu O du soleil vu de la terre & le lieu M de la planete aussi vue de la terre, (on appelle cet angle, *l'angle à la terre*, ou *l'angle d'élongation*), &

vous aurez facilement la longitude géocentrique ♈ D M de la planete; sa distance T P ou T L à la terre, se calcule par le même triangle T S L.

734. XV. Faites enfin, *Comme le sinus de l'angle* T S L *au soleil, est au sinus de l'angle* L T S *à la terre; ainsi la tangente de la latitude héliocentrique* P S L, *est à la tangente de la latitude géocentrique* P T L.

735. REMARQUES. I. Toutes les regles précédentes sont des suites évidentes de tout ce qui a été dit jusqu'ici. Il n'y a que la derniere analogie qui reste à démontrer. Pour cela dans le triangle S P L, on a (Elem. 748) R : P L : : *cot* P S L : S L. Et dans le triangle rectangle P T L; on a R : P L : : *cot* P T L : T L. Donc *cot* P S L : *cot* P T L : : S L : T L, ou (Elem. 737) *tang* P S L : *tang* P T L : : T L : S L. Or dans le triangle S L T, on a T L : S L : : *sin* L S T : *sin* S T L. Donc *sin* L S T : *sin* S T L : : *tang* P S L : *tang* P T L.

736. II. Les Astronomes abrégent ces opérations par le moyen des Tables qui contiennent des calculs tout faits, pour trouver le résultat de chaque opération contenue dans les regles précédentes. Mais comme ceux qui ont construit ces Tables, s'y sont pris en différentes manieres, de sorte qu'il n'est pas possible d'en donner une explication qui convienne à toutes, nous sommes obligés d'y renvoyer le Lecteur. D'ailleurs les usages de ces Tables, qui sont détaillés dans tous les livres où elles se trouvent, sont très-faciles à comprendre, lorsqu'on aura bien entendu le principe général sur lequel elles ont été construites. Nous avertirons seulement que les Tables Astronomiques les plus estimées sont celles de M. Cassini, imprimées en 1740, & celles de M. Halley publiées en 1749 (*o*).

(*o*) J'en ai donné de nouvelles en 1771.



ART. IV.

Article IV.

Enumération des Eléments nécessaires pour etablir la Théorie des Planetes vues du Soleil & de la Terre, avec l'exposition du procédé par lequel on y parvient.

737. Il est facile de concevoir que les calculs de l'article précédent supposent comme connues les choses suivantes, qu'on appelle *les Eléments Astronomiques de la Théorie des Planetes*, parce qu'ils servent de données pour la solution du problême général énoncé ci-dessus (687). 1°. *Le temps des révolutions périodiques de chaque planete*. 2°. *La position de la ligne de ses absides*. 3°. *Une époque du passage de la planete par cette ligne*. 4°. *L'excentricité de la planete, qui donne les dimensions de son ellipse*. 5°. *Le rapport du grand axe de l'ellipse de chaque planete avec celui de la terre*. 6°. *Le lieu du nœud ascendant de la planete*. 7°. *L'inclinaison de l'orbite de la planete sur le plan de l'écliptique*. Il faut de plus s'assurer si la ligne des absides & celle des nœuds de chaque planete, sont fixes dans le ciel, ou si elles ont un mouvement; en ce cas, il en faut déterminer le sens & la quantité. Afin donc d'établir la théorie des planetes, il faut conclure des observations faites sur la terre, tous ces élements, pour chacune en particulier. Nous allons indiquer les meilleures méthodes connues qu'on y puisse employer.

738. Les planetes vues de la terre sont sujettes à une parallaxe (602), qui change à tout moment toutes les circonstances de leurs mouvements réels; on ne peut donc, par des observations faites sur la terre, déterminer les éléments de ces vrais mouvements, de la même maniere qu'on le feroit si l'on étoit dans le soleil. C'est pourquoi il faut y employer des méthodes différentes; nous en expliquerons en peu de mots les principales.

739. Il est bon de remarquer avant tout, que parce que les mouvements des planetes résultent du concours d'un

grand nombre d'éléments, il est presque impossible de déterminer exactement tous ces éléments à la fois, par le calcul direct des meilleures observations, fondé sur quelque méthode géométrique que ce soit. Pour y parvenir avec quelque précision, il faut commencer par supposer le problême résolu, & se contenter d'une détermination grossiere, déduite ou d'une estime, ou d'un calcul préliminaire fait à peu-près, ou enfin des éléments trouvés par les Astronomes précédents. Cette connoissance, quoique vague, sert d'abord à démêler l'effet général de chacun de ces éléments : elle sert à distinguer les circonstances où chacun a son plus grand effet, celles où cet effet peut être négligé comme étant sensiblement nul, celles où un élément n'a besoin d'être connu qu'à-peu-près, pour mettre une observation en état d'être employée à quelque recherche ; elle sert à trouver dans quelle circonstance les observations doivent être faites pour être les plus propres aux recherches générales des éléments, & aux recherches particulieres de chacun : enfin, elle sert à faire de fausses positions, qui est la voie la plus expéditive, & souvent la plus sûre, quoiqu'elle soit indirecte, de résoudre les problêmes compliqués. On emploie donc ces éléments à-peu-près connus, comme s'ils étoient les véritables, pour calculer, par les regles de l'article précédent, les mouvements qui doivent en résulter, & pour les comparer ensuite aux observations les plus exactes. Selon la maniere dont ces calculs s'écartent des observations, on rectifie les éléments par de nouvelles fausses positions, qui servent à réformer ces premiers calculs précédents, & à les rendre plus conformes aux observations : à l'aide des éléments ainsi rectifiés, on recommence à plusieurs reprises à en rechercher de plus exacts, on les vérifie tantôt un seul, tantôt plusieurs ensemble par d'autres observations faites dans d'autres circonstances. C'est ainsi qu'à force de tâtonnements, de combinaisons & de calculs, on perfectionne peu-à-peu la théorie des mouvements célestes. Nous en avons vu quelques exemples dans le II. Chap. de la I. Section, & nous en verrons encore dans tout ce que nous dirons dans la suite de celui-ci.

ARTICLE V.

Méthode pour réduire toutes les obſervations des Planetes faites ſur la Terre, à celles qui auroient été faites au même inſtant par un Obſervateur placé dans le Soleil.

740. SUPPOSANT la théorie du ſoleil ou de la terre exactement connue, il faut prendre les dimenſions de ſon orbite pour la baſe des opérations géométriques néceſſaires pour calculer les dimenſions des orbites des autres planetes, ſuppoſé qu'on connoiſſe exactement le temps de leur révolution, comme on l'enſeignera dans l'article ſuivant. Car ſoit T (fig. 64) le lieu de la terre ſur ſon orbite TER, S le ſoleil; ſoit obſervé l'angle STM qui meſure la différence entre la longitude du ſoleil & la longitude d'une planete M quelconque vue de la terre. Après une révolution entiere de la planete, elle ſera de retour au point M; ſoit alors la terre en R, & ſoit obſervé l'angle MRS. Alors par la théorie de la terre, on a l'angle TSR & les côtés ST, SR. On a donc (Elem. 760) les angles STR, SRT, & le côté TR. Ainſi dans le triangle TMR on connoît TR, & les angles MTR, MRT, on a donc par le calcul les côtés MT, MR. Enfin dans le triangle MST on a MT, TS, & l'angle compris MTS, d'où on conclud SM qui donne la diſtance accourcie du ſoleil à la planete au point M de la projection de ſon orbite, & l'angle TSM, qui donne la différence entre la longitude ♈ST de la terre, & ♈SM qui eſt celle de la planete vue du ſoleil.

741. Si on veut enſuite trouver la latitude vue du ſoleil, on aura (734) : *Comme le ſinus de l'angle* MTS *eſt au ſinus de* TSM; *ainſi la tangente de la latitude de la planete obſervée du point* T, *eſt à la tangente de ſa latitude héliocentrique.*

742. Enfin on aura la vraie diſtance de la planete au ſoleil, en faiſant (732) *Comme le coſinus de la latitude hé-*

liocentrique de la planete est au rayon, ainsi la distance accourcie SM, *est à la distance cherchée.*

743. C'est ainsi qu'on peut construire une table qui donne un grand nombre de longitudes & de latitudes vues du Soleil, & en même-temps des distances du soleil à autant de points de l'orbite de la planete (*p*).

744. REM. L'action réciproque des planetes & des cometes produisant dans le temps de la révolution périodique, dans la position de la ligne des absides, & dans l'excentricité des orbites, une variation d'autant plus sensible que ces corps ont plus de masse, & viennent à passer plus près les uns des autres, cette méthode n'est pas fort sûre pour servir à établir la théorie de Jupiter & de Saturne, à moins qu'on n'ait égard à cette perturbation mutuelle : mais on peut l'employer avec assez de confiance pour les autres planetes.

ARTICLE VI.

Diverses Méthodes pour trouver tous les éléments de la Théorie des Planetes par des observations faites sur la Terre.

745. I. POUR *trouver le temps de la révolution périodique d'une planete.* Connoissant à-peu-près le temps de la révolution de la planete, il faut choisir deux observations faites dans les temps les plus éloignés qu'il est possible, où la planete se soit trouvée dans la même position à l'égard d'une même étoile, & en même-temps en opposition avec le soleil, si la planete est une des supérieures, ou en conjonction avec le soleil si la planete est une des inférieures. Car alors la planete se voit (602) dans le même point de l'écliptique que si l'on étoit dans le soleil (*q*).

(*p*) C'est en déterminant ainsi les distances des planetes au soleil, que Képler trouva la loi ou le rapport des distances, & la figure de leurs orbites, *de Stellâ Martis.*

(*q*) Ou dans le point opposé, ce qui revient au même pour le calcul.

Il faut ensuite diviser l'intervalle du temps entre ces deux observations par le nombre des révolutions de la planete, & on aura le temps de la révolution périodique à l'égard des étoiles : & parce qu'on compte tous les mouvements des planetes depuis le premier point du Bélier, il faut faire cette analogie : *Comme* $360^{o}\ 0'\ 0''$ *sont au temps de la révolution à l'égard des étoiles ; ainsi le mouvement des étoiles en longitude pendant cette révolution, est à un certain temps qu'il faut ôter du temps de la révolution périodique à l'égard des étoiles, pour avoir celui de la révolution périodique à l'égard du premier point du Bélier.* Ainsi pendant une révolution de Mercure les étoiles paroissent avancer de $12''$, ce qui donne $1'\ 10''$ de temps à retrancher pour avoir la révolution de Mercure à l'égard du premier point du Bélier, laquelle se trouve de 87 jours 23 heures $14'\ 20''$. On aura de même la révolution de Vénus de 224 jours $16^{h}\ 41'\ 37''$; celle de Mars de 686 jours $22^{h}\ 19'\ 0''$; celle de Jupiter de 4330 jours $12^{h}\ 27'$; & celle de Saturne de 10747 jours $2^{h}\ 50'$.

746. II. *Trouver la ligne des absides, l'époque d'un passage de la planete par cette ligne, & l'excentricité.* Connoissant à-peu-près toutes ces choses, il faut choisir trois longitudes & latitudes de la planete observées dans l'intervalle d'environ une demi-révolution ; savoir, la premiere & la troisieme, lorsque la planete étoit vers ses distances moyennes au soleil, & la seconde lorsqu'elle étoit vers une de ses absides : il faut que ces longitudes & latitudes soient héliocentriques, soit qu'elles ayent été observées dans les temps propres pour cela, soit qu'elles ayent été réduites par la méthode expliquée n°. 740. Il faut encore réduire chaque longitude de la planete à son orbite, en ôtant le lieu du ☊ à-peu-près connu, pour avoir un argument de latitude, au logarithme du cosinus duquel on ajoutera le logarithme du cosinus de la latitude héliocentrique de la planete ; la somme sera le logarithme du cosinus d'un arc, auquel on ajoutera le lieu du ☊, & l'on aura la longitude réduite de la planete. Après ces préparatifs, on suivra la méthode & l'exemple expliqués n°. 230.

747. REM. I. Si on avoit des longitudes héliocentriques

réduites à l'orbite, faites dans chacun des points des distances moyennes, & vers chacune des deux absides, on trouveroit comme aux n°. 167 & 217 l'excentricité par la plus grande équation, & la ligne des absides par le temps de la demi-révolution.

748. REM. II. Après avoir déterminé les excentricités de toutes les planetes, il faut les réduire (279) à une échelle commune, dont la distance moyenne de la terre au soleil soit l'unité.

749. III. *Pour trouver la position de la ligne des nœuds.*

750. *Premiere méthode.* Ayant observé le temps & le lieu de la planete où elle se trouve sans latitude, si on réduit ce lieu à celui qui seroit vu du soleil, on aura le lieu d'un des nœuds.

751. *Seconde méthode.* Ayant observé le temps & le lieu d'une conjonction ou d'une opposition de la planete avec le soleil, lorsque la latitude de la planete étoit assez petite; ayant ensuite déterminé par observation le temps auquel la planete a été sans latitude; & où, par conséquent, elle s'est trouvée dans son nœud, on calculera par la théorie de la planete déterminée dans les numeros précédents, le véritable arc de son orbite qu'elle a dû parcourir, vue du soleil, depuis son opposition ou sa conjonction jusqu'au temps de son passage par le nœud; ajoutant ou retranchant cet arc du lieu où l'on a observé la conjonction ou l'opposition, on aura le vrai lieu du nœud.

752. IV. *Pour trouver l'inclinaison de l'orbite de la planete sur le plan de l'écliptique.*

753. *Première méthode.* Si on a une suite d'observations de latitudes héliocentriques de la planete placée vers ses limites, la plus grande de ces latitudes donnera l'inclinaison de l'orbite (*r*).

754. *Seconde méthode.* Si le soleil se trouve répondre précisément au même point de l'écliptique que le lieu du

(*r*) On a vu (741) la maniere d'avoir les latitudes héliocentriques par le moyen des latitudes observées sur la terre.

nœud d'une planete, & si cette planete paroît éloignée de 90° du soleil (*f*), c'est-à-dire, si la différence entre la longitude du soleil & la longitude de la planete vue de la terre, est précisément de trois signes : alors la latitude de la planete vue de la terre est précisément égale à l'inclinaison de l'orbite de la planete. Car la terre étant pour lors dans la ligne d'intersection du plan de l'écliptique avec celui de l'orbite de la planete, le plan de l'angle formé à l'œil de l'observateur entre les deux rayons, qui vont l'un à la planete, l'autre à son point de projection sur l'écliptique, est perpendiculaire à cette intersection. Donc (Elem. 630) l'angle à l'œil de l'observateur est alors égal à l'inclinaison des deux plans.

755. *Troisieme méthode.* Delà on tire une troisieme méthode. Elle consiste à observer le plus exactement qu'il est possible la longitude & la latitude géocentriques de la planete lorsque le soleil passe par son nœud, pourvu que cette latitude ne soit gueres plus petite que l'inclinaison connue à-peu-près; on fera alors : *Comme le sinus de l'élongation observée de la planete au soleil, est à la tangente de sa latitude géocentrique observée; ainsi le rayon est à la tangente de l'inclinaison de l'orbite.* Car soit N S T (fig. 70) la ligne des nœuds de la planete, S le soleil, T la terre, P le lieu de la planete dans son orbite. Ayant abaissé P L perpendiculaire sur le plan de l'écliptique, & tiré P T, L T, l'angle P T L est égal à la latitude observée. Ayant aussi tiré P R perpendiculaire à la ligne des nœuds, l'angle P R L est (Elem. 630) égal à l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique. L'angle R T L est l'élongation de la planete au soleil, ou la différence entre la longitude du soleil & celle de la planete. Cela posé, dans le triangle rectangle R T L, on a r : T L : : *sin* R T L : R L. Et dans le triangle rectangle P T L, on a r : T L : : *tang* P T L : P L. Donc *sin* R T L : *tang* P T L : : R L : P L. Or dans le triangle

(*f*) Cela n'a lieu que pour les planetes supérieures, mais l'article suivant n'en est pas moins applicable aux inférieures.

rectangle PRL on a RL : PL : : r : *tang* PRL : donc on a toujours *ſin* RTL : *tang* PTL : : r : *tang* PRL.

756. V. *Trouver ſi les nœuds & les aphélies des planetes ſont fixes ou mobiles, & de combien.* Ayant déterminé deux paſſages de la planete par ſon aphélie ou par ſon même nœud, par le calcul des obſervations faites en des temps les plus éloignés qu'il eſt poſſible, ſi le quotient de l'intervalle du temps entre ces deux paſſages diviſé par le nombre des révolutions entieres de la planete à l'égard des étoiles, eſt préciſément égal au temps d'une de ces révolutions, l'aphélie & le nœud ſont immobiles. S'il eſt plus court, l'aphélie ou le nœud ſont rétrogrades ; s'il eſt plus long, l'aphélie ou le nœud ont un mouvement direct, & la différence entre ce quotient & le temps de la révolution périodique à l'égard des étoiles, fera connoître la quantité du mouvement de la ligne des abſides, ou de celle des nœuds.

757. REM. I. Comme les obſervations que nous ont laiſſées les Aſtronomes qui ont vécu avant le ſeizieme ſiecle, ſont fort groſſieres & en petit nombre, elles ne peuvent ſervir à décider ſi les aphélies & les nœuds des planetes ſont mobiles, & de combien. Pluſieurs Aſtronomes modernes les ont ſuppoſés fixes (*t*) ; il paroît cependant en général que ces points ont à l'égard des étoiles un mouvement très lent, que celui des aphélies eſt direct, & celui des nœuds rétrograde (*u*), & que ces mouvements ſont l'effet des perturbations mutuelles des planetes. Voici une petite Table extraite de celles de MM. Caſſini & Halley, dans laquelle + ſignifie un mouvement annuel direct à l'égard des étoiles, & — un mouvement rétrograde.

(*t*) Depuis bien des années, ce mouvement eſt reconnu de tous les Aſtronomes.

(*u*) Cela doit s'entendre par rapport aux étoiles fixes. Mais il faut en excepter Jupiter ; le mouvement qui eſt rétrograde ſur une orbite peut devenir direct par rapport à l'autre, ainſi que je l'ai fait voir dans les Mémoires de l'Académie pour 1762 ; c'eſt ce qui m'a fait découvrir la cauſe des changements d'inclinaiſon qui ont lieu dans les orbites des Satellites de Jupiter, & qui embarraſſoient depuis longtemps les Aſtronomes.

	Inclinais. de l'orbite.			Lieu de l'Aphélie en l'an 1700.				Lieu du ☊ en l'an 1700.				Mouv. Aphel. Cassini.	Mouv. du ☊ Cassini	Mouv. de l'Ap. Halley	Mouv. du ☊ Halley
	D.	M.	S.	S.	D.	M.	S.	S.	D.	M.	S.	S.	S.	S.	S.
Saturne.	2	30	36	8	28	8	39	3	21	13	29	+ 27	+ 6	+ 30	— 32
Jupiter.	1	19	30	6	9	26	42	3	7	29	53	+ 6	— 27	+ 22	— 0
Mars.	1	50	54	5	0	36	20	1	17	17	25	+ 21	— 17	+ 20	— 12
Vénus.	3	23	20	10	6	26	20	2	13	59	25	+ 35	— 17	+ 6	— 19
Mercure.	7	0	0	8	12	34	38	1	14	43	0	+ 29	— 0	+ 2	— 0

758. REM. II. Lorſqu'on ſe ſera aſſuré que le temps de la révolution anomaliſtique d'une planete differe ſenſiblement de celui de la révolution périodique à l'égard des étoiles, il faudra réduire comme ci-deſſus (745) la révolution anomaliſtique abſolue qu'on aura trouvée, à celle qui convient à l'égard du premier point du Bélier, & s'en ſervir enſuite pour calculer les mouvements moyens de la planete, qui doivent correſpondre aux mouvements vrais obſervés dans la pratique de la méthode générale citée nº 746 & expliquée nº 230. C'eſt ainſi qu'on en a uſé pour le ſoleil au nº 703.

ARTICLE VII.

De la lumiere des Planetes & de leur Figure.

759. LES obſervations faites avec les lunettes ont établi les faits ſuivants comme très-certains.

760. I. *Les planetes ſont des corps opaques qui ne ſont pas lumineux par eux-mêmes comme le ſoleil; mais ils ne nous paroiſſent lumineux que parce qu'ils nous renvoyent les rayons de lumiere qui viennent du ſoleil ſur leur ſurface*, à-peu-près de même qu'un miroir paroît tout éclatant de lumiere, lorſqu'on l'expoſe à nos yeux, de façon que les rayons du ſoleil qu'il reçoit ſoient renvoyés vers nous.

761. Car Mercure & Vénus ſont ſujets aux mêmes phaſes que la lune (*voyez* Sect. VI. Art. I.), ſelon leurs différents aſpects avec le ſoleil : ils paroiſſent entiérement éclairés & ronds lorſqu'ils ſont vers la conjonction ſupé-

rieure avec le ſoleil ; ils paroiſſent en croiſſant lorſqu'ils approchent de la conjonction inférieure (*v*), dans laquelle ils diſparoiſſent, à moins qu'ils n'ayent beaucoup de latitude. Il arrive même que dans leurs conjonctions inférieures où ils ont moins de 16′ de latitude, ils paroiſſent paſſer ſur le diſque du ſoleil, où on les voit comme des taches rondes & fort noires. Or ſi ces planetes étoient auſſi lumineuſes qu'elles nous paroiſſent, leur lumiere devroit ou ſe confondre avec celle du ſoleil, & alors elles ſeroient inviſibles dans ces conjonctions, ou ſe diſtinguer de celle du ſoleil par ſon plus ou moins de vivacité, ou par ſa couleur différente.

762. Mars eſt auſſi ſujet à des phaſes : car il paroît parfaitement rond lorſqu'il eſt en oppoſition ; mais vers les quadratures il paroît à-peu-près comme on voit la lune trois ou quatre jours avant & après la pleine lune.

763. Jupiter & Saturne ne nous paroiſſent pas ſujets à ces phaſes, parce que ces deux planetes ſont ſi éloignées de la terre, que nous les voyons à-peu-près de même que ſi nous étions dans le ſoleil ; mais comme elles jettent évidemment une ombre oppoſée au ſoleil, qui fait diſparoître leurs ſatellites lorſqu'ils viennent à traverſer cette ombre ; & que d'ailleurs ces mêmes ſatellites jettent ſur la ſurface de ces planetes une ombre ſenſible, lorſqu'ils ſe trouvent préciſément entr'elles & le ſoleil, il n'eſt pas douteux que ces planetes & leurs ſatellites ne ſoient auſſi des corps opaques.

764. II. *Les planetes ſont des globes qui ne ſont pas parfaitement ronds, mais qui ſont un peu applatis, en ſorte que l'axe de leur rotation eſt un peu plus petit que le diametre de leur équateur.*

765. Cette figure applatie n'a été obſervée que dans Jupiter & dans la Terre ; car les autres planetes ſont vues ſous

(*v*) Les phaſes de Vénus que Galilée obſerva le premier en 1609, formerent une démonſtration inconteſtable du mouvement des planetes inférieures autour du ſoleil, que les Egyptiens admettoient déja, au rapport de Vitruve.

des angles trop petits, pour que les inégalités de leurs diametres ſoient ſenſibles. Cependant il eſt aiſé de faire voir que ſi la ſurface des planetes eſt couverte en tout ou en partie d'une matiere fluide homogene, telles que ſont les mers ſur la terre, les planetes ne peuvent avoir un mouvement de rotation ſans être applaties vers les poles, & renflées vers l'équateur.

766. Car dans cette hypotheſe il faut néceſſairement que la figure de la planete ſoit telle, que toute la maſſe du fluide dont toutes les particules peſent vers le centre de la planete, puiſſe reſter en équilibre. En effet, ces particules étant, par la nature des fluides, capables de céder facilement à toute impreſſion, & de ſe mouvoir très-librement entr'elles, elles doivent s'arranger de ſorte qu'elles tendent avec une égale force vers le point fixe ſur lequel elles peſent, & par conſéquent qu'elles ſe tiennent en équilibre autour de ce point. Or ſi la planete étoit un globe parfaitement rond, l'équilibre ne pourroit ſubſiſter avec le mouvement de rotation; car par ce mouvement les points de la ſurface du globe décriroient autour de ſon axe des cercles d'autant plus grands & avec d'autant plus de vîteſſe, qu'ils ſeroient plus éloignés des poles, & plus près de l'équateur, d'où il ſuit que par ce mouvement ces points acquerroient à proportion plus de force pour s'échapper de leur cercle, & pour s'éloigner par la tangente, du centre de leur rotation. Cette tendance ou force centrifuge diminueroit donc leur peſanteur à l'égard du centre de leur planete, & par conſéquent les parties de la ſurface du globe peſeroient d'autant moins qu'elles ſeroient plus loin des poles; donc les parties fluides ſituées vers l'équateur réſiſteroient avec moins de force à l'effort que les parties fluides voiſines des poles feroient pour s'approcher du centre; donc celles-ci reflueroient vers l'équateur, & gonfleroient celles qui y ſeroient, & par-là elles applatiroient la figure de la planete, en laiſſant moins de matiere vers les poles, & en s'accumulant vers l'équateur, ou bien elles inonderoient les continents qui ſeroient vers l'équateur, ce qui en changeroit de même la figure. Donc pour prévenir

cette inondation, il a fallu élever considérablement les terres qui sont vers l'équateur, & donner à la planete une figure applatie vers les poles, & renflée vers l'équateur. De cette sorte cet excès de matiere compense la diminution de la pesanteur causée par la rotation, & tout reste en équilibre (*x*).

767. Il suit delà, 1°, que plus le mouvement de rotation est prompt, plus la planete doit être applatie; ainsi l'applatissement de Jupiter est très-sensible, parce que sa rotation diurne s'acheve en moins de dix heures de temps, quoique cette planete soit 768 fois plus grosse que la terre: selon les observations les plus exactes, le diametre de son équateur surpasse de $\frac{1}{12}$ l'axe qui passe par ses poles (*y*).

768. 2°. Que de tous les cercles qu'on imagine sur la surface d'une planete, il n'y a que l'équateur & ses paralleles qui soient de véritables cercles; les méridiens sont d'une figure qui approche d'une ellipse, dont le petit axe est dirigé aux deux poles, & le grand axe est dans le plan & égal au diametre de l'équateur.

769. 3°. Que par conséquent les 360 degrés égaux de chaque cercle méridien céleste, ne répondent pas à 360 parties égales prises sur le contour du méridien correspondant sur la planete; d'où l'on voit que sur la terre, par exemple, les longueurs des arcs d'un méridien terrestre qui répondent aux arcs égaux du méridien céleste, ne sont pas égales, mais qu'elles sont plus petites dans les endroits où la surface de la terre est plus convexe, & plus grandes dans les endroits où la surface est plus plate. D'où il suit enfin que *les longueurs des degrés du méridien terrestre qui ré-*

(*x*) V. la Théorie de la figure de la Terre, par M. Clairaut, les Recherches de M. d'Alembert, de Mac-Laurin, Simpson, &c. Ce fut Huygens qui le premier proposa à l'Académie de vérifier l'applatissement de la Terre par les observations. Richer envoyé à Cayenne y reconnut en 1672 l'accourcissement du pendule à secondes sous l'équateur, qui étoit un indice de cet applatissement.

(*y*) Le rapport des axes est de 13 à 14 suivant les observations de Short.

pondent aux degrés du méridien céleste, sont plus grandes à mesure qu'on approche plus des poles, & plus petites à mesure qu'on approche plus de l'équateur.

770. Par des mesures exactes, on a trouvé que la grandeur d'un degré du méridien céleste répondoit à une longueur terrestre d'environ 57440 toises sous le cercle polaire, de 57030 toises sous le parallele de 45 degrés, & de 56750 toises sous l'équateur (z).

771. III. Saturne a une figure fort singuliere; cette planete paroît engagée dans un corps lumineux de forme elliptique, dont le grand axe est constant & incliné sur le plan de l'orbite de Saturne d'environ 30 degrés; il est au diametre du globe de Saturne environ comme 9 à 4; son petit axe varie toujours tantôt en s'élargissant, tantôt en se rétrecissant, de sorte que Saturne paroît comme on voit dans la fig. 65, lorsque sa longitude héliocentrique est de $20^{\circ} \frac{1}{2}$ ♊. Il se rétrecit ensuite pendant 7 ans & demi, qui font un quart de la révolution de Saturne, vers la fin desquels il paroît n'avoir plus que deux anses, comme dans la fig. 67; peu de temps après, Saturne paroît seul & rond comme dans la fig. 66. C'est lorsque sa longitude héliocentrique est $20^{\circ} \frac{1}{2}$ ♍; mais au bout de quelque temps les anses reparoissent comme dans la fig. 68, puis elles s'élargissent dans le sens opposé au précédent, de sorte qu'après un autre quart de révolution, on voit Saturne comme dans la fig. 69; après cette phase le petit axe se rétrecit de nouveau, le corps de la planete est réduit à de simples anses, qui disparoissent encore, & laissent voir Saturne tout rond, ce qui arrive lorsqu'il a $20^{\circ} \frac{1}{2}$ ♓ de longitude héliocentrique. Peu après les anses reparoissent & continuent les mê-

---

(z) V. les mesures de Mrs. de Maupertuis, le Monnier, Camus & Clairaut en Laponie, de M. Bouguer & de la Condamine au Pérou, de M. Cassini, & de M. de la Caille en France, (*Méridienne vérifiée* 1744, *Mémoires de l'Académie* 1758) du P. Boscovich, & du P. Maire en Italie, de M. de la Caille au Cap de Bonne-Espérance, (*Mémoires de l'Académie* 1751), du P. Liesganig en Allemagne, de Mrs. Mason & Dixon en Amérique (*Philosoph. transact.* 1768).

mes variations, lesquelles sont analogues aux variations des routes apparentes que les satellites de Saturne décrivent, c'est-à-dire, l'ellipse lumineuse qui accompagne Saturne est dans sa plus grande largeur lorsque les ellipses des routes des satellites y sont aussi; elle disparoît quand ces routes sont devenues lignes droites, ou quand Saturne est dans le nœud de ses satellites : dans la plus grande largeur de cette ellipse, le rapport des axes est comme 5 à 2.

772. Il est aisé de conclure de ces apparences, que Saturne est au centre d'un corps circulaire très-mince, ou qui n'a pas d'épaisseur assez sensible pour être vue, lorsque son plan est dirigé à notre rayon visuel. Ce plan environne Saturne sans le toucher, & même laisse un espace assez considérable entre sa circonférence intérieure & le corps de la planete. On l'appelle l'*Anneau de Saturne* (*a*). Toutes ses phases s'expliquent de la même maniere que les apparences des routes elliptiques des taches sur la surface des planetes ou des satellites autour de leur planete principale, & observés d'un lieu qui n'est pas renfermé dans leur orbite, comme on verra dans la Section suivante.

CHAPITRE II.

De la Théorie des Cometes vues de la Terre.

773. LES mouvements des cometes vus de la terre sont compliqués de toutes les mêmes illusions optiques que ceux des planetes principales, puisque les deux mouvements de la terre & son épaisseur sont la source de toutes ces illusions. Mais ce qu'elles ont de plus que les planetes, & ce qui les fait remarquer davantage, c'est une

(*a*) Huygens expliqua le premier les apparences de cet Anneau dans son *Systema Saturnium* 1659. M. Maraldi en a parlé fort au long dans les *Mémoires de l'Académie* de 1715 & 1716, & moi dans ceux de 1773 & 1774, à l'occasion de la disparition de cet Anneau qui a lieu tous les 15 ans. M. du Séjour a composé un savant Ouvrage sur cette matiere, à Paris, chez Valade 1776.

longue traînée de lumiere, dont elles sont souvent accompagnées, & qu'on appelle leur *Queue*. Elle est presque toujours à l'opposite du soleil : elle augmente en longueur & en éclat à mesure que la comete s'approche du soleil ; elle est toujours plus grande lorsque la comete sort des rayons du soleil, après avoir été périhélie en conjonction avec peu de latitude. Lorsque la comete est fort éloignée du soleil, elle n'a presque pas de queue ; elle est seulement entourée d'une nébulosité qui empêche de distinguer les bords de son disque, qui paroissent toujours confus & mal terminés.

774. Suivant l'opinion la plus vraisemblable, cette queue est une vapeur qui s'éleve du corps de la comete par l'action de la chaleur du soleil, dont elle s'approche de très-près, après en avoir été très-éloignée pendant un temps considérable, pendant lequel elle a pu se charger de matiere capable d'évaporation qui compose une atmosphere fort étendue. On remarque en effet, que la queue d'une comete devient d'autant plus longue que sa distance périhélie est plus petite, & réciproquement. Comme ceci est une chose purement Physique, nous n'y insisterons pas davantage.

ARTICLE PREMIER.

Du calcul des mouvements des Cometes vus de la Terre, en supposant leurs orbites paraboliques.

775. LES éléments nécessaires pour calculer la longitude & la latitude géocentriques d'une comete pour un instant donné, sont, 1°. *L'instant auquel la comete a été périhélie;* cet instant sert d'*époque*. 2°. *Le point de l'orbite de la comete où est son périhélie.* 3°. *La distance de ce point au soleil, en parties dont le rayon de l'orbe annuel de la terre* = 1. 4°. *La position du nœud ascendant de cette orbite.* 5°. *L'angle d'inclinaison de son plan sur celui de l'écliptique.* Tous ces éléments étant connus, le calcul des cometes ne differe presque pas de celui des planetes, comme

on le va voir par les préceptes & par l'exemple qui suivent.

776. La comete de 1742, qui étoit rétrograde, a passé par son périhélie le 8 Février à 4^h $48'$ de temps moyen; le lieu de ce périhélie dans l'orbite de la comete, étoit dans 7^s 7° $35'$ $13''$. Le logarithme de la distance périhélie de la comete au soleil, étoit 9,884049; le nœud ascendant étoit dans 6^s 5° $38'$ $29''$. Enfin, l'inclinaison de l'orbite étoit de 66° $59'$ $14''$. Soit proposé de trouver son vrai lieu vu de la terre pour le 28 Mars 1742 à 13^h $39'$ $0''$ temps moyen.

777. I. *Prenez l'intervalle de temps entre le passage par le périhélie & l'instant donné;* c'est ici 48 jours 8^h $51'$; *& réduisez-en les heures, minutes & secondes, en décimales de jours.* On a donc 48,3687 jours.

778. II. *Prenez la moitié du triple du logarithme de la distance périhélie; retranchez-la du logarithme de l'intervalle du temps entre le passage par le périhélie & l'instant donné; le reste sera le logarithme de cet intervalle réduit au temps ou aux jours de distance au périhélie de l'orbe parabolique calculé dans la table générale.* (page 290). Le log. de la distance périhélie est 9884049, son triple 9,652147, sa moitié 9,826074; l'ayant ôtée de 1,684564 log. de 48,3687, on a 1,858489, log. de 72,192 jours.

779. III. *Cherchez dans la Table* (pag. 290) *l'anomalie vraie qui répond au temps trouvé, & lorsque la comete est directe, ajoutez cette anomalie au lieu du périhélie, si l'instant donné suit celui du passage par le périhélie; mais retranchez-la si l'instant donné précéde celui du passage par le périhélie. Et lorsque la comete est rétrograde, ajoutez l'anomalie vraie au lieu du périhélie, si l'instant donné précéde l'instant du passage par le périhélie; & retranchez-la, si l'instant donné suit le passage par le périhélie; & vous aurez le vrai lieu héliocentrique de la comete dans son orbite.*

780. Dans cet exemple, à 72,192 répondent dans la Table 73° $8'$ $52''$ ou 2^s 13° $8'$ $52''$, qu'il faut retrancher du lieu du périhélie 7_s 7° $35'$ $13''$, parce que la comete étant rétrograde, l'instant donné suit celui du passage par le périhélie. On a donc le vrai lieu héliocentrique de la comete dans son orbite 4_s 24° $26'$ $21''$.

781.

781. IV. *Retranchez le lieu du nœud ascendant du vrai lieu héliocentrique de la comete, & vous aurez* (728) *l'argument de latitude de la comete.*

782. Ainsi retranchant 6ˢ 5° 38′ 29″ de 4ˢ 24° 26′ 21″, on a l'argument de latitude 10ˢ 18° 47′ 52″.

783. V. *Faites cette analogie* (730) : *Comme le rayon est au cosinus de l'inclinaison ; ainsi la tangente de l'argument de latitude, est à la tangente de cet argument mesuré sur l'écliptique, & qu'il faut ajouter au vrai lieu du nœud, pour avoir le vrai lieu héliocentrique de la comete réduit à l'écliptique* (731), *ou sa vraie longitude vue du soleil.*

784. Ainsi on aura l'argument réduit de 11ˢ 11° 6′ 21″, & la longitude vraie de la comete dans 5ˢ 16° 44′ 50″.

785. VI. *Faites cette analogie* (729) : *Comme le rayon est au sinus de l'argument de latitude ; ainsi le sinus de l'inclinaison de l'orbite de la comete, est au sinus de sa latitude vue du soleil, laquelle est boréale ou australe, selon que la comete étant directe son argument de latitude est de moins ou de plus de 6 signes, ou qu'étant rétrograde, son argument de latitude est de plus ou de moins de 6 signes.*

786. On aura donc dans cet exemple 37° 19′ 20″ pour la latitude de la comete vue du soleil, & qui est boréale, parce que la comete qui est rétrograde, a plus de six signes à son argument de latitude.

787. VII. *Ayant calculé le vrai lieu du soleil, & le logarithme de sa distance à la terre, ôtez-en six signes pour avoir le vrai lieu de la terre vue du soleil ; & prenez la différence entre la vraie longitude héliocentrique de la comete, & la longitude de la terre vue du soleil. Cette différence donnera l'angle au soleil entre la terre & la projection du lieu de la comete ; c'est l'angle de* commutation.

788. Dans cet exemple, le vrai lieu du soleil le 28 Mars à 13ʰ 39′ est 0ˢ 8° 11′ 28″, & le logarithme de sa distance à la terre est 9,999841. Donc le vrai lieu de la terre vu du soleil est 6ˢ 8° 11′ 28″. Et la différence avec 5ˢ 16° 44′ 50″, donne l'angle de commutation ou l'angle au soleil de 21° 26′ 38″.

789. VIII. Faites ces deux analogies (323) : *Comme le*

quarré du cosinus de la moitié de l'anomalie vraie (trouvée 779) *est au quarré du rayon, ainsi la distance périhélie de la comete est à sa distance au soleil, ou à son rayon vecteur* (209) *ensuite comme le rayon est au cosinus de la latitude vue du soleil*, trouvée n°. 785, *ainsi le rayon vecteur, est à la distance accourcie* (732).

790. Par ces analogies on trouvera 9,975019 pour le logarithme de la distance accourcie.

791. IX. *Prenez la différence entre le logarithme de la distance accourcie & celui de la distance de la terre au soleil, en ôtant le plus petit du plus grand* : ajoutez 10 *à la caractéristique de cette différence, vous aurez le logarithme de la tangente d'un angle* (Elem. 752.) ; *ôtez-en* 45°, *puis ajoutez le logarithme de la tangente du reste au logarithme de la tangente du complément de la moitié de l'angle au soleil trouvé*, n°. 787, *la somme sera le logarithme de la tangente d'un arc, qu'il faut ajouter à ce complément, si la distance accourcie de la comete au soleil excede la distance de la terre au soleil; & qu'il faut retrancher, si la distance de la comete est plus petite que celle de la terre; & vous aurez l'angle d'élongation*, (*ou l'angle à la terre compris entre le lieu du soleil & la projection du lieu géocentrique de la comete*), *qu'il faut ajouter ou retrancher du vrai lieu du soleil, selon que la comete vue de la terre est à l'orient ou à l'occident par rapport au soleil, pour avoir la longitude géocentrique de la comete.*

792. J'ôte donc 9,975018 de 9,999841 : le reste est 0,024823, & j'ai 10,024823 log. de la tangente de 46° 38′ 11″ $\frac{2}{3}$; j'en ôte 45°, & j'ajoute le log. de la tangente de 1° 38′ 11″ $\frac{2}{3}$ à celui de la tangente de 79° 16′ 41″, (complément de 10° 43′ 19″, moitié de l'angle au soleil 21° 26′ 38″) : la somme est le log. de la tangente de 8° 34′ 51″; les ôtant de 79° 16′ 41″, parce que la distance de la comete au soleil est moindre que celle de la terre au soleil, j'ai 70° 41′ 50″, ou 2^s 10° 41′ 50″, pour l'angle d'élongation. Par une figure grossiérement faite, qui représente l'écliptique divisée en ses douze signes, & où je place le soleil, la terre, & la comete, selon leurs longitudes trou-

vées dans ce calcul, je vois que la comete vue de la terre est à l'orient du soleil. J'ajoute donc l'angle d'élongation au vrai lieu du soleil, & j'ai la longitude géocentrique de la comete dans $2^s\,18^\circ\,53'\,18''$.

793. X. *Enfin* (734) : *Comme le sinus de l'angle au soleil trouvé* nº 787, *est au sinus de l'angle à la terre trouvé* nº 791 ; *ainsi la tangente de la latitude de la comete vue du soleil, trouvée* nº 785, *est à la tangente de sa latitude vue de la terre.*

794. On a donc, Comme le sinus de $21^\circ\,26'\,38''$, est au sinus de $70^\circ\,41'\,50''$; ainsi la tangente de $37^\circ\,19'\,20''$, est à la tangente de la latitude géocentrique de la comete $63^\circ\,3'\,57''$.

ARTICLE II.

Du calcul des mouvements des Cometes vus de la Terre, en supposant leurs orbites elliptiques.

795. LORSQU'ON est certain du retour d'une comete, & qu'on a par conséquent le temps de sa révolution périodique, on doit en calculer les mouvements dans l'ellipse. La méthode ne différe de la précédente, que dans la maniere de trouver la longitude héliocentrique; un seul exemple suffira pour la faire entendre. Nous dirons dans l'article suivant, comment on doit employer les observations, pour en conclure les éléments de la théorie d'une comete dans l'ellipse.

796. Ceux de la comete de 1682 avoient été établis par M. Halley tels qu'ils suivent. Sa révolution périodique de 75 ans $\frac{1}{2}$. Le lieu de son ☊ dans $1^s\,20^\circ\,48'\,0''$, l'inclinaison de son orbite de $17^\circ\,42'$. Sa distance périhélie 0,5825, sa distance aphélie 35,1445, son excentricité 17,281. Le vrai lieu du périhélie dans $10^s\,1^\circ\,36'\,0''$, & le moment du passage par ce périhélie le 14 Septembre à $21^h\,22'$ temps moyen à Londres. On demande la position de cette comete pour le 29 Août à $16^h\,38'$ temps moyen.

797. I. Du logarithme de $360^\circ\,0'\,0''$ j'ôte celui de 27575 jours, temps de la révolution, & j'ai le log. du

mouvement moyen en un jour. Je lui ajoute le log. de l'intervalle 16 jours 4^h 44′ ou 16,1972 jours, entre le moment donné & celui du paſſage par le périhélie : la ſomme eſt le log. de l'anomalie moyenne, comptée depuis le périhélie. Dans cet exemple je la trouve de 12′ 41″, 25. (Je prens ici deux décimales; car ce calcul doit être fait très-ſcrupuleuſement).

798. II. Je cherche d'abord quelle a dû être à-peu-près l'anomalie vraie qui répond à l'anomalie moyenne que je viens de trouver. Pour cela, du log. de l'intervalle de temps, j'ôte les $\frac{3}{2}$ du log. de la diſtance périhélie, le reſte eſt (77) le log. d'un nombre de jours, avec lequel je vais chercher dans la table générale pour le calcul des cometes dans un orbe parabolique (page 299) quelle eſt l'anomalie vraie correſpondante. Par exemple, je trouve 36,443 jours, auxquels répondent dans la Table environ 45° 27′. (Le calcul de cet article ſe peut faire groſſiérement). D'où je conclus que la vraie anomalie que je cherche, eſt entre 45 & 46 degrés.

799. III. Je ſuppoſe cette anomalie vraie de 45°, puis de 46°. Je les réduis (205) en anomalies moyennes; je trouve, l'une de 12′ 36″,88, & l'autre de 12′ 57″,67. Donc à proportion l'anomalie vraie qui répond à 12′ 41″,25 eſt 45° 12′ 37″. Ajoutant cette anomalie vraie au lieu du périhélie 10^s 1° 36′ 0″, j'ai la longitude héliocentrique de la comete dans ſon orbite elliptique 11_s 16° 48′ 37″.

800. IV. Je calcule (207) la diſtance de la comete au ſoleil, & il ne me reſte plus qu'à ſuivre tous les préceptes expoſés (n° 723 & ſuiv.) pour avoir la longitude géocentrique dans 4^s 18° 13′ 40″, & ſa latitude de 25° 48′ 50″ boréale.

801. Pour plus de préciſion, il faut prendre des limites plus étroites dans les fauſſes poſitions ; dans cet exemple on eût dû employer les anomalies vraies 45° 10′ & 45° 20′ ou au plus 45° & 45° 30′.

802. Lorſqu'on regardera comme peu important de négliger quelques ſecondes dans ſon calcul, on l'abrégera conſidérablement par le moyen de la Table ſuivante (pag. 301), qui eſt à-peu-près la même que celle de M. Simpſon,

(*Miscell. Tract. pag.* 62) (*b*), & dont voici l'usage.

803. Ayant calculé l'anomalie vraie dans la parabole, & le log. de la distance de la comete au soleil, ôtez les cinq premiers chiffres du log. du grand axe, des cinq premiers chiffres du log. de la distance périhélie, pour avoir un log. constant, que vous ajouterez séparément à chacun des deux logarithmes de cette Table qui répondent à l'anomalie vraie dans la parabole; (ayant égard à la partie proportionnelle). La premiere somme sera le log. des minutes & secondes de la correction qu'il faut faire, selon les titres de la Table, pour réduire l'anomalie vraie dans la parabole à l'anomalie vraie dans l'ellipse. La seconde somme sera le log. d'un nombre, lequel doit toujours être ôté du log. de la distance calculée dans la parabole, pour avoir le log. du rayon vecteur dans l'ellipse.

804. Ainsi pour 36,443 jours on a 45° 26′ 46″ d'anomalie vraie dans la parabole, & 9,835474 pour le log. du rayon vecteur (322). J'ôte 1,5530 de 9,7653, & j'ai le log. constant 8,2123 : je l'ajoute à 4,6990; & j'ai 2,9113 log. de 13′ 35″, correction soustractive qui me donne 45° 12′ 11″ pour l'anomalie vraie dans l'ellipse. J'ajoute 8,2123 à 9,0802; & j'ai 7,2925 log. de 0,001961, correction soustractive du log. du rayon vecteur, lequel est 9,833513.

805. La Table que nous employons ici, n'est pas susceptible d'une extrême précision, tant parce qu'elle a été dressée sur des formules algébriques, où pour les rendre plus commodes, on a négligé quelques termes finis comme s'ils étoient infiniment petits; que parce que toutes les ellipses ne sont pas des courbes semblables, comme le sont toutes les paraboles. Cependant lorsqu'on a un grand nombre de calculs suivis à faire, on peut se servir avec avantage de cette Table, à l'aide de quelques corrections qu'on y fera.

806. Soit proposé de calculer dans l'ellipse toutes les observations de la comete faites au mois de Mai 1759. Je

(*b*) Cet Ouvrage de Simpson est de 1757, il y donne les logarithmes des corrections en minutes, au lieu qu'ici elles sont en secondes. La colonne pour les distances est la même.

ſais que pendant ce mois la comete a été depuis 90° d'anomalie juſqu'à 108°. Sa diſtance périhélie ayant été trouvée de 0,583497, & le grand axe de l'ellipſe 36,14606, je forme ſur la Table (page 301) une Table des corrections telle qu'elle eſt repréſentée ci-deſſous. J'écris dans la 2e & dans la 6 colonne les corrections trouvées à l'aide du log. conſtant 8,2079. Je calcule enſuite, ſelon la méthode expliquée ci-deſſus (799), les anomalies vraies dans l'ellipſe qui répondent à trois anomalies vraies dans la parabole, par exemple, à 90°, à 100°, & à 108. Je trouve 90° 11′ 20″, 100° 23′ 32″, & 108° 35′ 12″, ce qui me donne trois corrections exactes qui conviennent à mon ellipſe. Je les écris dans la 3e colonne; & dans la 4e. Je diſtribue proportionnellement les différences entre mes trois corrections & celles de la 2e colonne; d'où je forme la 5e colonne, qui contient les vraies corrections que je dois employer. Je trouve de même les vraies corrections des logarithmes des rayons vecteurs.

Anom. vraie dans la Parab.	Correct. ſelon la Table, page 301.	Correction calculée.	Différ. partagée proport.	vraie correction de l'anom.	Correct. du Log. du rayon vecteur ſelon la Table.	Correct. du rayon vecteur calculée.	Diff. partagée proport.	Vraie correct. des log. du rayon vecteur.
D.	′ ″	′ ′	″					
90	+ 11 6	+ 11 20	14	+ 11 20	− 5608	− 5681	73	− 5681
91	12 11		16	12 27	5694		74	5768
92	13 17		18	13 35	5780		75	5855
93	14 24		20	14 44	5867		77	5944
94	15 33		22	15 55	5955		78	6033
95	16 43		24	17 7	6044		80	6124
96	17 55		26	18 21	6133		82	6215
97	19 9		28	19 37	6223		84	6307
98	20 24		30	20 54	631[illegible]		85	6398
99	21 40		32	22 12	6405		87	6492
100	22 58	23 32	34	23 32	6499	6588	89	6588
101	24 17		36	24 53	6595		92	6687
102	25 38		38	26 16	6691		95	6786
103	27 0		40	27 40	6789		98	6887
104	28 24		43	29 7	6888		101	6989
105	29 51		45	30 36	6990		104	7094
106	31 19		47	32 6	7094		107	7201
107	32 49		50	33 39	7201		111	7312
108	34 20	35 12	52	35 12	7310	7425	115	7425

ARTICLE III.

Méthode pour déterminer par des observations faites sur la Terre, tous les Eléments de la Théorie d'une Comete, tant dans la Parabole que dans l'Ellipse.

807. IL est extrêmement difficile d'établir par une méthode directe & géométrique, les éléments de la théorie des Cometes observées de dessus la terre, tant à cause que leur révolution périodique est inconnue, que parce que n'étant visibles que pendant un très-petit espace de temps, on ne peut les voir plusieurs fois en conjonction ou en opposition avec le soleil. Au défaut d'une pareille méthode, on est obligé d'avoir recours à de fausses positions & à de longs tâtonnements.

808. Ayant recueilli l'histoire & le plus grand nombre d'observations exactes d'une comete qu'il sera possible, on en examinera les différentes circonstances, telles que sont les différentes vîtesses apparentes de la comete, leurs directions, la grandeur apparente du disque ou noyau de la comete, les différents degrés de vivacité de sa lumiere, le sens & la vîtesse du mouvement de la comete, si elle vient à être en conjonction ou en opposition avec le soleil, &c. De-là on conjecturera : 1°, Si la comete a passé fort près de la terre, ce qui est indiqué par sa grosseur apparente, & par la grande vîtesse de son mouvement géocentrique, qui décroissent subitement. 2°, Dans quel temps la comete a dû être périhélie ; on peut le reconnoître par le temps du plus grand éclat de sa lumiere & de sa queue, laquelle se fait remarquer peu après le passage de la comete par le périhélie : or il faut éviter, autant qu'on peut, d'employer dans le calcul des éléments de la théorie d'une comete des observations faites près du périhélie, parce que vers ce point, les vîtesses de la comete vue du soleil ne sont pas assez inégales entr'elles, & qu'ainsi les observations faites vers ce point, ne sont propres qu'à vérifier les éléments qu'on aura trouvés, & non pas à les trouver. 3°, On conjectu-

rera ſi la comete vue du ſoleil a été directe ou rétrograde, ce qu'on reconnoît au ſens dans lequel la comete paroît aller, lorſqu'elle a été obſervée dans le voiſinage de ſa conjonction ou de ſon oppoſition au ſoleil. 4°, On conjecturera à quelles diſtances à-peu-près la comete pouvoit être à l'égard du ſoleil vers le commencement & vers la fin de ſon apparition. Or quand même on ſe tromperoit dans ces conjectures, les calculs de la méthode ſuivante ſerviroient à ſe redreſſer, ils ſeront ſeulement plus ou moins longs à proportion de ce qu'on ſe ſera plus ou moins trompé; mais un peu d'expérience ſervira à s'écarter très-peu du but (c).

809. Soit propoſée pour ſervir d'exemple & d'explication à la méthode dont il s'agit, la comete qui a été vue en 1742, pendant les mois de Mars & d'Avril. Selon l'hiſtoire & les obſervations de cette comete, rapportée dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, pour cette année, elle ne fut viſible en Europe que vers le commencement de Mars, venant rapidement de la partie auſtrale du ciel, avec une queue très-remarquable; elle s'avança enſuite vers le pole boréal, paroiſſant toujours avoir un mouvement direct, mais décroiſſant de vîteſſe & de lumiere juſqu'au 6 Mai, que l'on ceſſa de la voir. Elle ſe trouva en conjonction avec le ſoleil le 15 de Mars, décrivant alors plus de quatre degrés d'un grand cercle par jour.

810. Delà on peut conjecturer. 1°, Qu'avant ſon apparition en Europe, elle avoit paſſé le périhélie, puiſque le noyau & la queue étoient ſi brillants, lorſqu'on commença à voir la comete. 2°, Que le mouvement réel ou héliocentrique de la comete étoit rétrograde; car ayant été en conjonction avec une grande vîteſſe géocentrique, il fal-

(c) Halley fut le premier qui calcula ainſi des orbites de 24 cometes en 1705, & découvrit par-là que celle de 1682 avoit déja paru en 1607, & qu'elle reparoîtroit en 1759, comme cela s'eſt vérifié. On peut voir l'hiſtoire de cette fameuſe comete dans les Tables de Halley dont j'ai donné une ſeconde édition en 1759, in-8°. à Paris, chez Bailly.

loit que la comete fût aſſez proche de la terre, & qu'ainſi ce fût une conjonction inférieure ; & ſi le mouvement héliocentrique avoit été direct, le mouvement géocentrique auroit paru rétrograde (600); car la comete étant éloignée du ſoleil & de ſon périhélie, ne pouvoit avoir un mouvement héliocentrique direct aſſez rapide pour paroître direct vu de la terre. 3°, La comete étant fort près de la terre au commencement de ſon apparition en Europe, ſa diſtance au ſoleil ne devoit alors être gueres moindre que la diſtance du ſoleil à la terre : mais vers le mois de Mai, la diſtance de la comete au ſoleil devoit être bien plus grande que celle de la terre au ſoleil, puiſque la comete alloit en s'éloignant de ſon périhélie de plus en plus.

811. En conſéquence de toutes ces conjectures, je choiſis trois poſitions de la comete obſervées à des intervalles de temps les plus longs qu'il eſt poſſible, pourvu néanmoins que le mouvement diurne de la comete ſoit au moins de 20 minutes d'un grand cercle dans le temps de chaque obſervation choiſie ; car lorſque le mouvement eſt très-lent, les moindres erreurs dans les poſitions des cometes en cauſent de très-grandes dans la détermination des éléments qu'on cherche. Or le noyau des cometes toujours confus & très-foible de lumiere lorſque la comete eſt très-lente, eſt un obſtacle à la préciſion des obſervations. Je calcule, par les Tables Aſtronomiques, les longitudes du ſoleil, & les logarithmes de ſes diſtances à la terre pour les inſtants des obſervations choiſies réduits au temps moyen. Je prends l'élongation de la comete, c'eſt-à-dire, la différence entre ſa longitude obſervée & la longitude du ſoleil calculée au moment de la premiere & de la derniere obſervation. Je remarque ſi la comete étoit à l'orient ou à l'occident par rapport au ſoleil. Je forme de tout cela une Table comme il ſuit.

1742. Temps Moyen	Long. obſ. de la Comete	Lat. Bor. de la Com. obſer.	Long. du Soleil calc.	Log. de la diſt. du ☉ à la terre.	Elong. de la Com. au ☉
H ′ ″	S D ′ ″	D ′ ″	S D ′ ″		D ′ ″
4 Mars à 16 9 50	9 16 0 40	34 45 37	11 14 27 44	9.996910	58 27 4 Occ.
28 . . . à 13 39 0	2 18 52 45	63 3 55	0 8 11 28	9.999840	
24 Avril à 9 39 0	3 1 5 33	50 32 50	1 4 27 16	0.003092	56 38 17 Or.

812. Cela posé, il s'agit de trouver par le calcul une parabole qui remplisse ces quatre conditions 1°, Que le soleil soit à son foyer. 2°, Qu'elle passe par les deux points du ciel déterminés par les deux observations choisies les plus éloignées, telles que sont celles du 4 Mars & du 24 Avril. 3°, Que l'arc de cette parabole compris entre ces deux points du ciel, ait pu être réellement parcouru par une comete dans l'espace compris entre les instants des deux observations ; c'est dans cet exemple 50 jours $17^h\ 29'\ 10''$, ou en réduisant en milliemes de jours, en $50{,}728\frac{1}{2}$ jours. 4°, Que cette parabole soit encore assujettie à passer par un autre point du ciel déterminé par une troisieme observation assez éloignée des deux principales, telle qu'est dans cet exemple, celle du 28 Mars.

813. Pour guider mon calcul, je construis sur ces nombres & sur les conjectures que j'ai faites, une figure (voyez fig. 76) qui représente à peu près les dimensions de l'orbite que je cherche. Du point S comme centre, où je suppose le soleil, je décris avec un rayon à volonté, un arc LK pour représenter l'orbite de la terre. Je place en L le lieu de la terre le 4 Mars, & en K son lieu le 24 Avril, ensorte que l'arc K L soit égal au mouvement que le soleil a eu dans l'intervalle. Je fais au point L l'angle S L N de $58^\circ\ 27'\ 4''$ à l'occident, & je place en N le lieu de la comete projetté sur le plan de l'écliptique S L K; je tire S N, & j'imagine N*n* perpendiculaire au plan de l'écliptique, (& par conséquent aux droites L N, S N) ensorte que *n* soit le vrai lieu de la comete sur son orbite parabolique P *n m*. Ayant donc tiré *n* L, *n* S, il est clair que S N est la distance accourcie de la comete ; *n* S son rayon vecteur; l'angle *n* S N sa latitude héliocentrique : N S L son angle de commutation, ou angle au soleil ; *n* N L est l'angle à la comete (ainsi appellé pour abréger, car on devroit dire l'angle au point de projection de la comete entre le soleil & la terre); N L est la distance de la terre à la comete, & *n* L la distance au point de projection : or dans les trois triangles S L N, L N *n*, *n* S N dont le premier est obliquangle, & les deux autres rectangles en N, on ne con-

noît que l'angle SLN de 58° 27′ 4″, le côté SL dont le logarithme est 9,996910, l'angle nLN de 34° 45′ 37″, & par conséquent son complément LnN, avec les deux angles droits nNL, nNS; & pour peu qu'on fasse d'attention à la maniere dont ces trois triangles sont disposés, on trouvera que la connoissance d'un autre angle ou d'un autre côté quelconque (excepté seulement le rayon vecteur SN) serviroit à calculer tout le reste, ce qui n'a pas besoin d'être démontré en détail : le seul cas qui pourroit arrêter, est celui où l'on supposeroit donné l'angle nSN ou son complément NnS; mais il ne peut faire difficulté, puisque (731) la tangente de l'angle nLN est à la tangente de l'angle nSN, comme le sinus de l'angle NLS, est au sinus de l'angle NSL.

814. Je place de même sur ma figure le lieu de la comete pour le 24 Avril. Je fais un angle SKM de 56° 38′ 17″ à l'orient. Je suppose la projection de la comete en M, & son vrai lieu en m à l'extrêmité de Mm perpendiculaire au plan de l'écliptique; je joins mS, mK, & j'ai les trois triangles SMK, mKM, mKS qui sont précisément dans le même cas que les trois précédents.

815. Mais comme on ne peut parvenir à trouver les dimensions de l'orbite de la comete, que par le calcul de ces deux assemblages de triangles, il faut donc avoir recours à la méthode des fausses positions, & supposer, dans chaque assemblage, une valeur à quelque angle, ou à quelque côté (excepté au rayon vecteur). Ce sont les circonstances des observations qui doivent décider sur le choix, lequel doit tomber sur ce qui est susceptible d'une variation plus sensible. Si, par exemple, la comete a paru parcourir un bien plus grand chemin en latitude qu'en longitude, alors il faudra faire tomber les fausses positions sur les latitudes héliocentriques nSN, mSM. Si au contraire, elle a paru faire beaucoup plus de chemin en longitude qu'en latitude, alors on peut commencer par supposer des valeurs aux distances accourcies SN, SM, ou aux angles de commutation NSL, MSK, ou aux angles à la comete LNS, KMS; le choix en est arbitraire & le cal-

cul en eſt auſſi facile : il faut cependant remarquer que les ſuppoſitions de valeur aux diſtances accourcies SN, SM, ne doivent pas être faites, lorſqu'un des angles à la comete approche fort d'être droit, parce qu'alors le calcul que l'on fait pour connoître cet angle, ne peut décider s'il eſt aigu ou obtus, & que les variations dans la diſtance accourcie ne ſont pas proportionnelles aux variations dans l'angle à la comete.

816. Au reſte, quelques ſuppoſitions que l'on faſſe, il faut qu'elles ſervent à trouver les deux longitudes & les deux latitudes héliocentriques de la comete avec ſes deux rayons vecteurs : car alors par la différence de ces deux longitudes, on a l'angle NSM, qu'on réduit, à l'aide des deux latitudes, à l'angle *n* S *m* dans le plan de l'orbite *m n* P. Par l'inégalité des rayons vecteurs S *n*, S *m*, on trouve à quel degré d'anomalie répondent les points *n*, *m* de cette orbite, & par conſéquent quelle eſt la poſition du périhélie. Enfin par les inégalités des latitudes héliocentriques *n* N, *m* M on trouve l'inclinaiſon de cette orbite.

817. Dans l'exemple propoſé, nous ſuppoſerons qu'à cauſe du mouvement de la comete en longitude, qui a paru plus grand qu'en latitude, on fait tomber les fauſſes poſitions ſur les diſtances accourcies SN & SM, & qu'on a conjecturé ou trouvé par un premier calcul d'approximation que ſuppoſant la diſtance moyenne du ſoleil à la terre = 1, SN = 0,879, & SM = 0,957 : voici le procédé du calcul.

818. I. SUPPOSITION. SN = 0,879, SM = 0,957. Dans le triangle SNL, je fais *comme la diſtance accourcie ſuppoſée* SN, *eſt à la diſtance* SL *de la terre au ſoleil, ainſi le ſinus de l'angle* NLS *de l'élongation, eſt au ſinus de l'angle* LNS *à la comete.* Je le trouve de 105° 42′ 48″, d'où je conclus l'angle au ſoleil NSL de 15° 50′ 8″; & l'ajoutant à la longitude de la terre L de 5^s 14° 27′ 44″, j'ai la longitude héliocentrique de la comete 6^s 0° 17′ 52″.

819. REM. I. C'eſt la poſition de SN à l'égard des ſignes du zodiaque qui décide, s'il faut ajouter l'angle au ſoleil à la longitude de la terre, ou bien l'en retrancher.

820. REM. II. La ſomme des log. de la diſtance de la terre au ſoleil & du ſinus de l'angle d'élongation, fait un logarithme conſtant qui ſervira dans le calcul de toutes les différentes ſuppoſitions qu'on ſera obligé de faire ſur la longueur de S N.

821. Je calcule la latitude héliocentrique de la comete par cette analogie (755), *comme le ſinus de l'angle à la terre* N L S, *eſt au ſinus de l'angle au ſoleil* N S L, *ainſi la tangente de la latitude obſervée* n L N, *eſt à la tangente de la latitude héliocentrique* N S n. Je la trouve de 12° 31' 42'' boréale.

822. REM. III. Le log. du ſinus de l'angle à la terre étant ôté du log. de la tangente de la latitude obſervée, on a un autre logarithme conſtant qui ſervira dans toutes les ſuppoſitions où l'on employera le premier.

823. Je calcule le rayon vecteur S n par cette analogie (728), *comme le coſinus de la latitude héliocentrique* n S N, *eſt au rayon, ainſi la diſtance accourcie* S N, *eſt au rayon vecteur* S n : j'en trouve le logarithme 9,954455.

824. Je fais les mêmes analogies, & je prends les mêmes logarithmes conſtants, dans les triangles S M K, m K M, m K S, & je trouve la longitude héliocentrique de la comete dans 5ˢ 2° 36', 33'', ſa latitude de 52° 3' 38'' & le log. du rayon vecteur S m de 0,192159.

825. Je conſtruis une autre figure (*voyez fig.* 80) ou le demi-cercle E N C repréſente une moitié de l'écliptique dont le pole eſt P; je poſe en N & en M les deux longitudes héliocentriques, & ſur les cercles de latitudes P N, P M je marque n & m pour les lieux héliocentriques de la comete dans le ciel, en ſorte que N n, M m en marquent les latitudes héliocentriques. Par les points n, m je fais paſſer un demi-cercle O D B qui eſt dans le plan de l'orbite de la comete, & en eſt la projection vue du ſoleil dans le fond du ciel. La différence des longitudes héliocentriques me donne l'arc M N ou l'angle m P n; & dans le triangle ſphérique m P n, je connois les côtés n P de 77° 28' 18'', m P de 37° 56' 22'', & l'angle compris m P n de 27° 41' 19'': Je calcule (Trig. 210) le côté $n\,m$ qui meſure l'angle au

ſoleil compris entre les deux rayons vecteurs de la comete : je le trouve de 45° 22′ 8″.

826. Lorſqu'on a conjecturé que le paſſage de la comete par ſon périhélie s'eſt fait dans l'intervalle de temps entre les deux obſervations dont il s'agit, l'arc *mn* eſt la ſomme des deux anomalies vraies de la comete qui ſont dans ſon orbe parabolique de part & d'autre de la ligne des abſides : mais quand on a conjecturé, comme dans cet exemple, que le paſſage au périhélie eſt arrivé avant la premiere des deux obſervations ou après la ſeconde, l'arc *m n* eſt la différence des deux anomalies vraies de la comete. La plus petite des deux anomalies vraies eſt toujours du côté où le rayon vecteur eſt le plus court.

827. Dans tous les cas on trouve ces deux anomalies vraies par cette regle générale : *Otez le plus petit logarithme du rayon vecteur du plus grand : prenez la moitié de la différence, & y ayant ajouté* 10 *à la caractériſtique, cherchez de quel arc ce logarithme ſeroit la tangente. Otez* 45° *de cet arc, & au log. de la tangente du reſte ajoutez le log. de la cotangente du quart de l'arc* m n, *la ſomme ſera le logarithme de la tangente d'un arc dont vous prendrez la ſomme & la différence avec le quart de* m n, *& vous aurez les moitiés des anomalies vraies cherchées.* Ainſi ôtant 9,954455 de 0,192159 j'ai 0,237704, & ſa moitié 10,118852 eſt la tangente de 52° 44′ 38″ ; j'ôte 45° & au logarithme de la tangente de 7° 44′ 38″, j'ajoute celui de la cotangente 11° 20′ 32″ quart de 45° 22′ 8″, & je trouve le logarithme de la tangente de 34° 8′ 5″ $\frac{1}{2}$ qui me donne les deux moitiés d'anomalie vraie 22° 47′ 33″ $\frac{1}{2}$ & 45° 28′ 37″ $\frac{1}{2}$ &, par conſéquent l'anomalie vraie pour le point *n* de 45° 35′ 7″, & pour le point *m* de 90° 57′ 15″ (*d*).

828. Je calcule la diſtance périhélie de cette orbite par cette analogie (322) : *le quarré du rayon eſt au quarré du coſinus d'une des deux moitiés d'anomalie vraie, comme le rayon vecteur adjacent à cette anomalie vraie, eſt à la*

(*d*) V. la démonſtration, art. 846.

distance périhélie. Je trouve dans cet exemple le logarithme de la distance périhélie 9,883835.

829. Je prends dans la Table générale (page 299) les jours & les milliemes de jours qui répondent aux deux anomalies vraies trouvées, & qui conviennent à une parabole dont la distance périhélie seroit = 1 : je trouve 36,579 jours pour 45° 35′ 7″, & 112,4 jours pour 90° 57′ 15″. La différence de ces temps est 75,821 jours : je la réduis à celle qui convient à ma parabole : (j'aurois pris la somme de ces temps, si le passage au périhélie étoit arrivé entre les deux observations). Cette réduction se fait (329) en ajoutant le logarithme de cette différence (ou de cette somme,) à la moitié du triple du logarithme de la distance périhélie : ainsi j'ajoute 1,879789 logarithme de 75,821 à 9,883855 & à sa moitié 9,941917; la somme 1,705541 est le logarithme de 50,762 jours.

830. REM. Lorsque les anomalies vraies sont de plus de 90 degrés, on ne peut avoir fort exactement les décimales de jour par les parties proportionnelles de la Table générale. Afin donc d'y mettre plus de précision on peut suivre cette regle générale : *Au logarithme constant* 1,9149328, *ajoutez le log. de la tangente de la moitié de l'anomalie vraie. Ajoutez le triple de ce même log. de tangente au log. constant* 1,4378116. *Ajoutez ensemble les deux nombres qui répondront à ces deux sommes de logarithmes, & vous aurez le nombre exact de jours qui répond à l'anomalie vraie.* Ainsi à 1,914933 j'ajoute 0, 007233 log. de tangente de 45° 28′ 37″ $\frac{1}{2}$; & à 1,438112 j'ajoute 0,021699 triple de cette même tangente : je trouve 83,592 & 28,808 nombres qui répondent à 1,922166 & 1,459512 sommes de ces logarithmes : ainsi 112,400 jours sont exactement le temps correspondant à l'anomalie vraie 90° 57′ 15″ dans la parabole dont la distance périhélie est 1. Selon la partie proportionnelle de la Table, on auroit trouvé 112,4018. Dans les calculs suivants, nous nous sommes servis de la regle ci-dessus, qui n'est que l'équation $\frac{3}{4}at + \frac{1}{4}at^3 = b$ (316) dans laquelle a = 109,6154 jours, temps employé à aller du périhélie à 90° dans la parabole dont la distance périhélie est

= 1, *b* eſt le temps cherché, & *t* la tangente de la moitié de l'anomalie vraie donnée.

831. En examinant le réſultat des calculs précédents, je vois que la parabole que j'ai trouvée ne ſatisfait qu'aux deux premieres conditions requiſes (807), puiſque le temps 50,762 jours excede de 0,033 $\frac{1}{2}$ de jour l'intervalle 50,728 $\frac{1}{2}$ jours entre les deux obſervations.

832. Il me faut donc chercher quel changement il faudroit faire à une des deux diſtances accourcies ſuppoſées pour trouver une autre parabole qui remplit les trois premieres conditions : pour cela, je fais un changement de 0,001 à la diſtance SM pour voir dans quel ſens & de quelle quantité varieront les éléments de la parabole correſpondante.

833. SECONDE SUPPOSITION. SN = 0,879, SM = 0,956 : refaiſant tout le calcul comme ci-deſſus, je trouve les longitudes héliocentriques 6ˢ 0° 17′ 52″ & 5ˢ 2° 43′ 11″, les latitudes 12° 31′ 42″ & 52° 1′ 54″ $\frac{1}{2}$, les log. de rayons vecteurs 9,954455 & 0,191424 : l'arc NM (fig. 80) de 27° 34′ 41″, l'arc *n m* de 45° 18′ 13″, les anomalies vraies 45° 32′ 3″ & 90° 50′ 16″, les jours correſpondants 36,529 & 112,056, le log. de la diſtance périhélie 9,883997, enfin le temps réduit employé à parcourir l'arc *m n* de 50,594 jours. Ainſi je vois qu'en augmentant SM de 0,001, je diminue le temps de 0,168 de jours : & je fais 0,168 : 0,001 : : 0,033 $\frac{1}{2}$: 0,0002 : donc il ne falloit diminuer SM que de 0,0002 pour avoir une parabole qui rempliſſe la troiſieme condition : je recommence mon calcul, & je fais...

834. TROISIEME SUPPOSITION. SN = 0,879, SM = 0,9568. Alors les longitudes héliocentriques ſont 6ˢ 0° 17′ 52″ & 5ˢ 2° 37′ 53″ : les latitudes 12° 31′ 42″ & 52° 3′ 16″ $\frac{1}{2}$: les log. des rayons vecteurs 9,954455 & 0,192009 ; l'arc NM de 27° 39′ 59″, *n m* de 45° 21′ 22″ ; les anomalies vraies 45° 34′ 28″ & 90° 55′ 50″ ; les temps correſpondants 36,568 $\frac{1}{2}$ & 112,330 jours : le log. de la diſtance périhélie 9,883870, & le temps réduit 50,728 $\frac{1}{2}$ jours, comme le demande l'intervalle des obſervations.

835.

835. Les trois premieres conditions étant ainsi remplies, reste à voir si la parabole trouvée satisfait aussi à la quatrieme. Pour cela je détermine tous les autres éléments de la théorie de la comete dans cette parabole. D'abord dans le triangle *mn* P (fig. 80). Je calcule l'angle *mn* P par les trois côtés *m* P 77° 25″ 18′, *n* P 37° 56′ 43″ ½, & *mn* = 45° 21′ 22″; je le trouve de 23° 39′ 33″ : ensuite dans le triangle *n* N D rectangle en N, je calcule N D de 5° 25′ 45″, *n* D de 13° 38′ 14″, & l'angle N D *n* de 66° 56′ 14″. Cet angle est (Trig. 11) l'inclinaison des plans de l'écliptique & de l'orbite de la comete. Le point D est le lieu de son nœud ascendant, qu'elle a dû atteindre quelque temps avant le 4 Mars. Puis donc que le mouvement héliocentrique de la comete est rétrograde, j'ajoute N D 5° 25′ 45″ à la longitude héliocentrique de la comete le 4 Mars, qui est 6s 0° 17′ 52″, & j'ai 6s 5° 43′ 37″ pour le lieu du ☊. De ce lieu du ☊, j'ôte D *n* 13° 38′ 14″, & j'ai 5s 22° 5′ 23″ lieu de la comete dans son orbite en *n* : & parce qu'alors la comete avoit 45° 34′ 28″ d'anomalie vraie, je les ajoute à son lieu dans son orbite, pour avoir le lieu du périhélie dans 7s 7° 39′ 51″. Enfin j'ajoute aux ³⁄₂ du log. de la distance périhélie celui de 36,568 ½ jours, qui répondent à cette anomalie vraie, & j'ai 24,486 jours d'intervalle réduit entre l'observation du 4 Mars & l'instant du passage au périhélie, lequel étant ôté du 4 Mars à 16h 9′ 50″, ou à 0,673 ½ de jour, donne l'instant du passage au périhélie le 8 Février à 0,188.

836. Avec ces éléments je calcule, selon les préceptes rapportés ci-dessus (777), la longitude géocentrique de la comete pour le 28 Mars à 0,569 du jour : je la trouve dans 2s 18° 51′ 17″, qui n'est en défaut avec celle qui a été observée dans 2s 18° 52′ 45″, que de 1′ 28″ : mais j'en conclus que la parabole que j'ai trouvée, ne satisfait pas à la quatrieme condition.

837. Pour approcher de plus près de la vraie parabole, je garde S M tel qu'il étoit dans ma premiere supposition, & je fais varier S N de 0,001, pour voir comme ci-dessus, ce qui arrivera de variation à la parabole trouvée dans la premiere supposition.

838. QUATRIEME SUPPOSITION. SN = 0,878, SM = 0,957 : les longitudes héliocentriques font 6s 0° 31′ 54″ & 5s 2° 36′ 33″ : les latitudes 12° 42′ 11″ & 52° 3′ 38″ : les log. des rayons vecteurs 9,954257 & 0,192159 : NM = 27° 55′ 21″, & *nm* = 45° 17′ 56″, les anomalies vraies 45° 44′ 56″ & 91° 2′ 52″, les temps correfpondants 36,743 & 112,680 jours, le log. de la diftance périhélie 9,883115, & le temps réduit 50,714 jours qui differe de 0,014 ½ du temps obfervé. Ainfi diminuant SN de 0,001, je diminue le temps de 0,048 de jours : je fais, 0,048 : 0,001 : : 0,014 ½ : 0,0003 ; il falloit donc faire SN = 0,8783.

839. CINQUIEME SUPPOSITION. SN = 0,8783. SM = 0,957 : les longitudes héliocentriques font 6s 0° 27′ 40″ & 5s 2° 36′ 33″, les latitudes 12° 39′ 2″ & 52° 3′ 38″, les log. des rayons vecteurs 9,954316 & 0,192159, l'arc NM 27° 51′ 7″, *nm* 45° 19′ 20″, les anomalies vraies 45° 41′ 45″, & 91° 1′ 5″, les temps correfpondants 36,689, & 112,590, le log. de la diftance périhélie 9,883344, & le temps réduit 50,729 jours. Ainfi les trois premieres conditions font remplies.

840. Je détermine les éléments de la théorie dans cette parabole : le ☊ eft dans 6s 5° 59′ 6″, le périhélie dans 7s 7° 53′ 42″, l'inclinaifon 66° 47′ 14″, & le temps du paffage au périhélie en Février 8,151 ½ : furquoi je trouve la longitude géocentrique de la comete pour le 28 Mars dans 2s 18° 45′ 14″ qui eft en défaut de 7′ 31″ par rapport à l'obfervation, & par conféquent cette orbite s'écarte de la véritable que je cherche.

841. Mais parce que les variations des orbites doivent être fenfiblement proportionnelles à celles qu'on fait fubir aux diftances accourcies, pour avoir les deux vraies diftances accourcies qui donnent la parabole que je cherche, je fais ces deux proportions *comme* 6′ 3″ *différence des deux erreurs* — 1′ 28″ & — 7′ 31″, *eft à* 1′ 28″ *qui eft la plus petite des deux : ainfi* 0,0007 *&* 0,0002 *corrections faites aux deux diftances accourcies* SN, SM *pour avoir les deux paraboles qui ont rempli les trois premieres conditions, font à* 0,000235 *&* 0,000065 *corrections qu'il faut leur*

faire pour avoir une parabole qui remplisse les quatre conditions.

842. REM. Si les deux erreurs avoient été l'une par excès & l'autre par défaut, il auroit fallu mettre dans le premier terme de ces analogies, *comme la somme des erreurs*, &c.

843. On applique ces corrections en raisonnant sur la comparaison de la longitude calculée dans chaque orbite avec la longitude observée. Par exemple : je dis SN étant = 0,879, a donné — 1′ 28″ d'erreur; & étant = 0,8783, il a donné — 7′ 31″, donc plus on le sera petit, plus l'erreur sera grande : ainsi il faut ajouter 0,000235 à 0,879 pour avoir la vraie valeur de SN, laquelle sera par conséquent 0,879235. On trouve de même que SM doit être = 0,956735. Je fais donc ma derniere supposition.

844. SIXIEME SUPPOSITION. SN = 0,879235 & SM = 0,956735. Les longitudes héliocentriques sont 6ˢ 0° 14′ 37″ & 5ˢ 2° 38′ 19″ : les latitudes 12° 29′ 17″ $\frac{1}{2}$ & 52° 3′ 10″ $\frac{1}{2}$: les log. des rayons vecteurs 9,954504 & 0,191963 : les anomalies vraies 45° 32′ 0″ & 90° 54′ 4″; les temps correspondans 36,528 & 112,243 jours : le log. de la distance périhélie 9,884049, & l'intervalle de temps réduit 50,729 jours.

845. Cela posé je trouve les vrais éléments de la théorie, savoir le nœud dans 6ˢ 5° 38′ 29″, le périhélie dans 7ˢ 7° 35′ 13″, l'inclinaison de l'orbite de 66° 59′ 14″, & le temps du passage au périhélie le 8 Février à 4ʰ 48′ temps moyen à Paris : enfin sur ces éléments je calcule la longitude & la latitude géocentrique pour le 28 Mars à 13ʰ 39′, je trouve l'une dans 2ˢ 18° 53′ 18″, l'autre de 63° 3′ 57″ boréale, à peu de secondes près comme par l'observation. Ainsi le problême est résolu.

846. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici ne peut souffrir aucune difficulté, excepté la regle du n° 827, qu'il est à propos de démontrer. Pour cela, soit = a le quart de la somme des deux anomalies vraies, = x le quart de leur différence, = b le plus grand des deux rayons vecteurs, = c le plus petit : soit = 1 la distance périhélie. Cela posé, $2a + 2x$ est la plus grande anomalie vraie adjacente au

rayon vecteur b, & $2a - 2x$ est la plus petite adjacente au rayon vecteur c. De la formule *rayon vecteur* $= \frac{\textit{dist. péri}}{\text{cos}^2 \textit{ anom. vr.}}$ (323) il suit que les rayons vecteurs d'une même parabole sont en raison inverse des quarrés des cosinus des moitiés des anomalies vraies, ou que $\sqrt{b} : \sqrt{c} :: \text{cos}\,(a - x) : \text{cos}\,(a + x) :: \text{cos}\,a \times \text{cos}\,x + \text{s}\,a \times \text{s}x : \text{cos}\,a \times \text{cos}\,x - \text{s}\,a \times \text{s}\,x$ (Trig. 63). Donc $\sqrt{b} \times \text{cos}\,a \times \text{cos}\,x - \sqrt{b} \times \text{s}\,a \times \text{s}\,x = \sqrt{c} \times \text{cos}\,a \times \text{cos}\,x + \sqrt{c} \times \text{s}\,a \times \text{s}\,x$: Et $\sqrt{b} \times \text{cos}\,a \times \text{cos}\,x - \sqrt{c} \times \text{cos}\,a \times \text{cos}\,x = \sqrt{b} \times \text{s}\,a \times \text{s}\,x + \sqrt{c} \times \text{s}\,a \times \text{s}\,x$. Donc $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} :: \text{cos}\,a \times \text{cos}\,x : \text{s}\,a \times \text{s}\,x :: \frac{\text{cos}\,a}{\text{s}\,a} : \frac{\text{s}\,x}{\text{cos}\,x} :: \text{cos}\,a : \text{t}\,x$. Or (Elem. 752) la somme de deux quantités est à leur différence, comme le rayon est à la tangente d'un arc moins 45°; & la tangente de cet arc se trouve en divisant la plus grande quantité par la plus petite.

ARTICLE IV.

Remarques sur différentes circonstances du calcul de la Théorie des Cometes, tant dans la parabole que dans l'ellipse.

847. I. SI au lieu de faire tomber les fausses positions sur les distances accourcies, on les applique aux angles à la comete, ou aux angles de commutation, le calcul ne sera ni plus long, ni différent du précédent; il n'y aura qu'un petit changement d'ordre dans les premieres analogies de chaque supposition.

848. II. Lorsqu'on a trouvé une parabole qui s'accorde à très-peu près avec les trois positions qu'on a choisies, il est inutile de faire de nouveaux tâtonnements pour en trouver une qui s'y accorde parfaitement. Car ou les trois observations qu'on a choisies sont très-exactes, ou bien elles ne le sont qu'à peu près. Si elles sont très-exactes, il n'est pas possible d'y faire quadrer parfaitement une parabole, puisque les trois points qu'elles déterminent sont réellement dans une ellipse. Si elles ne le sont qu'à peu près, c'est un

hazard de rencontrer une parabole qui les repréſente parfaitement ; & même dans ce cas, cette parabole ne s'accorderoit pas avec toutes les autres obſervations de la même comete.

849. III. Il eſt à propos de commencer par faire un calcul groſſier des cinq premieres ſuppoſitions en négligeant les ſecondes, & en faiſant varier de pluſieurs degrés les angles ſur leſquels on fait tomber les fauſſes poſitions, ou en faiſant varier de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$ ou même du double, triple, &c, les diſtances accourcies, enfin en tâtonnant & en raiſonnant ſur les réſultats des tâtonnements, leſquels conduiront bientôt à une connoiſſance approchée de la vraie orbite, après quoi on fera un calcul rigoureux, en ne faiſant plus varier que très-peu les quantités qui entrent dans chaque ſuppoſition.

850. IV. Si les obſervations ſur leſquelles on veut établir la théorie d'une comete, ont été faites avec une grande préciſion, avant que d'en faire le dernier calcul rigoureux, il faut les corriger de la parallaxe & de l'aberration de la lumiere. On ſe ſert pour cela des dimenſions de l'orbite approchée ; on calcule la diſtance de la comete à la terre au moment de chacune des obſervations choiſies. On a la parallaxe horizontale par cette analogie (625) : Comme la diſtance de la comete à la terre, eſt à 1, diſtance moyenne de la terre au ſoleil ; ainſi 10″,2 parallaxe horizontale du ſoleil, ſont à la parallaxe horizontale de la comete. Si cette parallaxe excede 20″, on la convertira en parallaxe de longitude & de latitude ſelon les formules du nº 657. On employera enſuite la regle de M. Clairaut (595), pour trouver l'aberration cauſée par la lumiere tant en longitude qu'en latitude.

851. V. Si les deux latitudes géocentriques employées dans le calcul de chaque ſuppoſition ſont l'une boréale & l'auſtre auſtrale, chaque latitude héliocentrique correſpondante ſera de même dénomination, & alors il faudra placer les points *n m* (fig. 79) l'un au-deſſus, l'autre au-deſſous de l'écliptique E D C : le reſte du calcul ſe fait de même que dans la figure 80.

852. VI. Si après avoir achevé le calcul des éléments de la théorie d'une nouvelle comete dans un orbe parabo-

lique, on les trouve à très-peu près les mêmes que ceux d'une autre comete obſervée pluſieurs années auparavant, en ſorte qu'il y ait lieu de croire que la nouvelle comete ne ſoit que le retour de l'ancienne; alors on prendra la différence des temps entre les deux paſſages par le périhélie, pour avoir le temps de la révolution de la comete, pourvu qu'il n'y ait aucune raiſon de ſoupçonner que dans cet intervalle la même comete ſoit déja revenue à ſon périhélie, on calculera (279) le grand axe de cette ellipſe, on en retranchera la diſtance périhélie, pour avoir la diſtance aphélie, puis l'excentricité : & pour trouver les autres éléments de la théorie de la comete dans cette ellipſe, on pourra ſuivre un procédé ſemblable à celui-ci.

853. La comete qui avoit été obſervée en 1531, ayant reparu en 1607, puis en 1682, reparut encore en 1759. Selon M. Halley, elle avoit paſſé au périhélie le 14 Septembre 1682 à $21^h\ 33'$ temps moyen au méridien de Paris. Or ſelon un calcul exact de trois obſervations faites en 1759 le 13 Avril, le 1 & le 21 Mai, en ſuppoſant d'abord ſon orbe parabolique, je conclus tous les éléments de ſa théorie, entr'autres ſa diſtance périhélie = 0,5835, la diſtance moyenne de la terre au ſoleil étant = 1, & le paſſage au périhélie le 12 Mars à minuit; ce qui donne enſuite ſa révolution de 27937 jours $\frac{1}{2}$, le grand axe de l'ellipſe = 36,0377, & par conſéquent la diſtance aphélie = 35,4542 & l'excentricité = 17,43535. Sur ces éléments je calculai pour chaque inſtant des trois mêmes obſervations choiſies, quelles avoient dû être les longitudes & latitudes géocentriques de la comete, tant dans cette ellipſe, que dans une parabole oſculatrice placée dans ſon plan, & ayant même foyer & même ſommet. Je trouvai que le 13 Avril dans la parabole la longitude étoit plus petite de $1^o\ 7'$, & la latitude plus grande de $5'\ 46''$, que dans l'ellipſe : le 1 Mai la longitude dans la parabole étoit plus grande de $3^o\ 26'\ 26''$, & la latitude plus petite de $1^o\ 1'\ 7''$. Le 21 Mai la longitude dans la parabole étoit plus grande de $1^o\ 30'\ 50''$, & la latitude plus petite de $5'\ 27''$.

854. Je conſidérai enſuite que le mouvement réel & ob-

ſervé de la comete s'étant fait dans une ellipſe à très-peu-près ſemblable à celle dont j'avois les dimenſions, je pouvois le réduire au mouvement qu'elle auroit eu ſi elle eût décrit une parabole oſculatrice de même foyer & de même ſommet, en appliquant ces différences aux trois obſervations que j'avois faites. Après quoi le problême de trouver tous les éléments de la théorie de la comete dans l'ellipſe, ſe réduiſoit à les trouver dans la parabole oſculatrice, ſauf à recommencer enſuite le calcul pour trouver des différences plus approchées, & par conſéquent des éléments plus précis.

855. Ainſi ſur ces calculs je conſtruiſis la table ſuivante,

Temps moyen.	Longitude obſervée.	Latitude obſervée.	Long. réduite à a parabole.	Latit. réduite à la parabole.
1759. H ′ ″	S D ′ ″	D ′ ″	S D ′ ″	D ′ ″
13 Avril à 16 12 0	10 20 51 42	2 8 27 A	10 19 44 42	2 12 13 A
1 Mai à 9 23 20	5 22 31 40	31 26 32 A	5 25 58 6	30 25 25 A
21 Mai à 9 6 0	5 7 35 22	15 4 0 A	5 9 6 12	14 58 33 A

après quoi il ne me reſta plus qu'à calculer, ſelon la méthode expliquée ci-deſſus, les éléments de la parabole qui s'accordoient avec les longitudes & latitudes ainſi réduites, parce qu'ils étoient préciſément les mêmes que ceux que j'euſſe trouvé dans l'ellipſe en y employant les obſervations telles qu'elles avoient été faites.

856. La durée de la révolution périodique d'une comete trouvée de cette maniere n'eſt pas bien ſûre, parce qu'il peut arriver que le temps en ait été altéré par l'action des planetes dans le voiſinage deſquelles la comete vient à paſſer. Cependant, quand même l'erreur ſeroit de pluſieurs mois, elle n'influeroit pas ſenſiblement ſur les calculs qui ſervent à la recherche des éléments de l'orbite dans l'ellipſe, parce que les variations des écarts de l'ellipſe, par rapport à ſa parabole oſculatrice, cauſées par les variations dans les temps périodiques, ne deviennent ſenſibles que fort loin du périhélie de la comete.

Table I. Théorie des Cometes, dont on a pu recueillir des observations suffisantes pour en calculer les Eléments dans un orbe parabolique.

Année de l'apparit.	Lieu du ☊				Inclinaif. de l'orbite.			Lieu du Périhélie.				Log. de la distance Périhélie.	Pass. au Périhélie tems moy. à Paris.				Sens du mouvem.	Par qui l'orbite a été calcul.	Orbites les moins certaines.
	S.	D.	M.	S.	D.	M	S.	S.	D.	M.	S.			J.	H.	M.			
1264	5	28	45	0	30	25	0	9	5	45	0	9.613640	Juill.	17	6	10	Dir.	Pingré.	à peu près.
1337	2	24	21	0	32	11	0	1	7	59	0	9.609236	Juin.	2	6	34	Retr.	Halley.	à peu près.
1472	9	11	46	20	5	20	0	1	15	33	30	9.734584	Fev.	28	22	33	Retr.	Halley.	à peu près.
1532	2	20	27	0	32	36	0	3	21	7	0	9.706803	Oct.	19	22	21	Dir.	Halley.	à peu près.
1533	4	5	44	0	35	49	0	4	27	16	0	9.307068	Juin.	16	19	39	Retr.	Douwes.	à peu près.
1556	5	25	42	0	32	6	30	9	8	50	0	9.666424	Avril.	21	20	12	Dir.	Halley.	à peu près.
1577	0	25	52	0	74	32	45	4	9	22	0	9.263447	Oct.	26	18	54	Retr.	Halley.	
1580	0	18	57	20	64	40	0	3	19	5	50	9.775450	Nov.	28	15	9	Dir.	Halley.	
1585	1	7	42	30	6	4	0	0	8	51	0	10.038850	Oct.	7	19	29	Dir.	Halley.	
1590	5	15	30	40	29	40	40	7	6	54	30	9.760882	Fev.	8	3	54	Retr.	Halley.	
1593	5	14	15	0	87	58	0	4	26	19	0	9.949926	Juill.	18	13	47	Dir.	La Caille.	à peu près.
1596	10	12	12	30	55	12	0	7	18	16	0	9.710058	Août.	10	20	4	Retr.	Halley.	
1618	9	23	25	0	21	28	0	10	18	20	0	9.710100	Août.	17	3	12	Dir.	Pingré.	à peu près.
1618	2	16	1	0	37	34	0	0	2	14	0	9.579498	Nov.	8	12	32	Dir.	Halley.	
1652	2	28	10	0	79	28	0	0	28	18	40	9.928140	Nov.	12	15	49	Dir.	Halley.	
1661	2	22	30	30	32	35	50	3	25	58	40	9.651772	Janv.	26	23	50	Dir.	Halley.	
1664	2	21	14	0	21	18	30	4	10	41	25	10.011044	Déc.	4	12	3	Retr.	Halley.	
1665	7	18	2	0	76	5	0	2	11	54	30	9.027309	Avril.	24	5	24	Retr.	Halley.	
1672	9	27	30	30	83	22	10	1	16	59	30	9.843476	Mars.	1	8	46	Dir.	Halley.	
1677	7	26	49	10	79	3	15	4	17	37	5	9.448072	Mai.	6	0	46	Retr.	Halley.	
1678	5	11	40	0	3	4	20	10	27	46	0	10.092724	Août.	26	14	12	Dir.	Struyck	à peu près.
1680	9	2	2	0	60	56	0	8	22	39	30	7.787106	Déc.	18	0	15	Dir.	Halley.	
1683	5	23	23	0	83	11	0	2	25	29	30	9.748343	Juill.	13	2	59	Retr.	Halley.	
1684	8	28	15	0	65	48	40	7	28	52	0	9.982329	Juin.	8	10	25	Dir.	Halley.	

Suite de la Table I. de la Théorie des Cometes.

Année de l'apparit.	Lieu du ☊ S. D. M. S	Inclinais. de l'orbite. D. M. S.	Lieu du Périhélie. S. D. M. S.	Log. de la distance Périhélie.	Pass. au Périhélie tems moy. à Paris.	J. H. M.	Sens du mouvem.	Par qui l'orbite a été calculée.	Orbites les moins certaines.
1686	11 20 34 40	31 21 40	2 17 0 30	9.511883	Sept.	16 14 42	Dir.	Halley.	
1689	10 23 45 20	69 17 0	8 23 44 45	8.227612	Déc.	1 15 5	Retr.	Pingré.	à peu près.
1698	8 27 44 15	11 46 0	9 0 51 15	9.839660	Oct.	18 17 6	Retr.	Halley.	
1699	10 21 45 35	69 20 0	7 2 31 6	9.871570	Janv.	13 8 32	Retr.	La Caille.	à peu près.
1702	6 9 25 15	4 30 0	4 18 41 3	9.810165	Mars.	13 14 22	Dir.	La Caille.	à peu près.
1706	0 13 11 40	55 14 10	2 12 29 10	9.629218	Janv.	30 4 32	Dir.	La Caille.	
1707	1 22 46 35	88 36 0	2 19 54 56	9.934368	Déc.	11 23 39	Dir.	La Caille.	
1718	4 8 43 0	30 20 0	4 1 30 0	10.011380	Janv.	14 23 48	Retr.	La Caille.	
1723	0 14 16 0	49 59 0	1 12 52 20	9.999414	Sept.	27 16 20	Retr.	Bradley.	
1729	10 10 32 37	76 58 4	10 22 40 0	10.629552	Juin.	25 11 6	Dir.	La Caille.	
1737	7 16 22 0	18 20 45	10 25 55 0	9.347960	Janv.	30 8 30	Dir.	Bradley.	
1739	6 27 25 14	55 42 44	3 12 38 40	9.828388	Juin.	17 10 9	Retr.	La Caille.	
1742	6 5 38 29	66 59 14	7 7 35 13	9.884049	Févr.	8 4 48	Retr.	La Caille.	
1743	2 18 21 15	2 19 33	3 2 41 45	9.921690	Janv.	10 20 35	Dir.	La Caille.	à peu près.
1743	0 5 16 25	45 48 20	8 6 33 52	9.716480	Sept.	20 21 26	Retr.	Klinkenberg.	à peu près.
1744	1 15 46 11	47 5 18	6 17 10 0	9.347325	Mars.	1 8 13	Dir.	La Caille.	
1747	4 27 18 50	79 6 20	9 7 2 0	10.342128	Mars.	3 7 20	Retr.	La Caille.	
1748	7 22 52 16	85 26 57	7 5 0 50	9.924620	Avril.	28 19 34	Retr.	Maraldi.	
1748	1 4 39 43	56 59 3	9 6 9 24	9.816410	Juin.	18 1 33	Dir.	Struyck.	à peu près.
1757	7 4 5 50	12 39 6	4 2 39 0	9.530288	Oct.	21 9 42	Dir.	La Caille.	
1758	7 20 50 9	68 19 0	8 27 37 45	9.333148	Juin.	11 3 27	Dir.	Pingré.	
1759	4 19 39 24	78 59 22	1 23 24 20	9.902280	Nov.	27 2 28	Dir.	La Caille.	
1759	2 19 50 45	4 51 32	4 18 24 35	9.984972	Déc.	16 21 13	Retr.	La Caille.	
Elements de la Comete de Halley tels qu'ils ont paru à chaque révolution.									
1456	1 18 30 0	17 56 0	10 1 0 0	9.767540	Juin.	8 22 10	Retr.	Pingré.	à peu près.
1531	1 19 25 0	17 56 0	10 1 39 0	9.753583	Août.	24 21 27	Retr.	Halley.	à peu près.
1607	1 20 21 0	17 2 0	10 2 16 0	9.768490	Oct.	26 3 59	Retr.	Halley.	à peu près.
1682	1 20 48 0	17 42 0	10 1 36 0	9.765296	Sept.	14 21 31	Retr.	Halley.	
1759	1 23 49 0	17 39 0	10 3 16 0	9.766930	Mars.	12 13 41	Retr.	La Caille.	

Notes de l'Editeur.

Nous allons ajouter ici la Théorie des 15 Cometes qui ont été obſervées depuis 1759.

Années des obſervat.	Lieu du nœud.	Inclinaiſon de l'orbite.	Lieu du Périhélie.	Logarithme de la diſt. Périhélie.	Paſſage au Périhélie temps moyen à Paris.	Sens du mouvem.	Par qui l'orbite a été calculée.
1760	4 19 39 24	78 59 22	1 23 24 20	9.902280	27 Nov. 1759, 2 28	Direct.	La Caille.
1760	2 19 50 45	4 51 32	4 18 24 35	9.984973	16 Déc. 1759, 21 13	Retrog.	La Caille.
1762	11 19 20 0	84 45 0	3 15 15 0	0.005352	28 Mai. 15 27	Direct.	La Lande.
1763	11 26 29 29	73 39 29	2 25 0 48	9.697595	1 Novemb. 21 6	Direct.	Pingré.
1764	3 19 20 6	53 54 19	0 16 11 48	9.751418	12 Février. 10 29	Retrog.	Pingré.
1766	8 4 10 50	40 50 20	4 23 15 25	9.703575	17 Février. 8 50	Retrog.	Pingré.
1766	1 17 5 0	8 20 0	6 25 15 0	9.805229	16 Avril. 17 30	Direct.	Pingré.
1769	5 25 0 43	40 37 33	4 24 5 54	9.092580	7 Octobre. 12 30	Direct.	La Lande.
1770	4 19 39 5	1 44 30	11 25 27 16	9.804056	9 Août. 0 17	Direct.	Pingré.
1771	3 18 42 10	31 25 55	6 28 22 44	9.722831	22 Nov. 1770. 22 6	Retrog.	Pingré.
1771	0 27 51 0	11 15 29	3 13 28 13	9.957013	18 Avril. 22 14	Direct.	Pingré.
1772	8 12 43 5	18 59 40	3 18 6 22	0.0078807	18 Février. 20 5	Direct.	La Lande.
1773	4 1 16 0	61 25 0	2 15 36 0	0.054576	7 Septemb. 11 19	Direct.	Pingré.
1774	6 0 49 48	83 0 25	10 17 22 4	9.190068	15 Août. 10 55	Direct.	Mechain.
1779	0 25 5 51	32 24 0	2 27 13 11	9.853167	4 Janvier. 2 12	Direct.	Mechain.

Dans la Comete de 1593 j'ai corrigé deux fautes indiquées par M. Pingré, *Mém. Ac.* 1763. p. 16. La Table ſuivante & celle de M. de la Caille; mais on en trouve une plus étendue dans mon *Aſtronomie.*

II. *TABLE générale pour calculer les mouvements des Cometes dans un orbe Parabolique.* V. art. 329.

Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.		
	D.	M.	S.		D.	M.	S.		D.	M.	S.		D.	M.	S.		D.	M.	S.
1	1	23	37	41	49	53	32	81	77	56	10	121	93	42	37	161	103	39	34
2	2	47	12	42	50	49	38	82	78	26	30	122	94	0	48	162	103	51	42
3	4	10	40	43	51	44	52	83	78	56	25	123	94	18	47	163	104	3	44
4	5	34	0	44	52	39	15	84	79	25	55	124	94	36	34	164	104	15	40
5	6	57	8	45	53	32	48	85	79	54	59	125	94	54	9	165	104	27	29
6	8	20	2	46	54	25	31	86	80	23	37	126	95	11	32	166	104	39	13
7	9	42	38	47	55	17	26	87	80	51	55	127	95	28	44	167	104	50	50
8	11	4	54	48	56	8	31	88	81	19	48	128	95	45	45	168	105	1	20
9	12	26	46	49	56	58	48	89	81	47	18	129	96	2	35	169	105	13	45
10	13	48	14	50	57	48	18	90	82	14	25	130	96	19	14	170	105	25	4
11	15	9	14	51	58	37	2	91	82	41	10	131	96	35	42	171	105	36	17
12	16	29	43	52	59	25	1	92	83	7	33	132	96	52	0	172	105	47	25
13	17	49	39	53	60	12	15	93	83	33	36	133	97	8	7	173	105	58	27
14	19	9	1	54	60	58	44	94	83	59	17	134	97	24	4	174	106	9	23
15	20	27	47	55	61	44	30	95	84	24	38	135	97	39	51	175	106	20	14
16	21	45	53	56	62	29	32	96	84	49	39	136	97	55	28	176	106	30	59
17	23	3	19	57	63	13	52	97	85	14	20	137	98	10	56	177	106	41	39
18	24	20	3	58	63	57	30	98	85	38	42	138	98	26	14	178	106	52	13
19	25	36	3	59	64	40	28	99	86	2	44	139	98	41	23	179	107	2	43
20	26	51	17	60	65	22	45	100	86	26	28	140	98	56	22	180	107	13	7
21	28	5	45	61	66	4	23	101	86	49	55	141	99	11	13	181	107	23	26
22	29	19	25	62	66	45	22	102	87	13	2	142	99	25	54	182	107	33	40
23	30	32	16	63	67	25	43	103	87	35	53	143	99	40	27	183	107	43	50
24	31	44	17	64	68	5	27	104	87	58	26	144	99	54	50	184	107	53	54
25	32	55	27	65	68	44	34	105	88	20	43	145	100	9	6	185	108	3	54
26	34	5	45	66	69	23	5	106	88	42	43	146	100	23	13	186	108	13	48
27	35	15	11	67	70	1	1	107	89	4	26	147	100	37	12	187	108	23	38
28	36	23	45	68	70	38	22	108	89	25	53	148	100	51	2	188	108	33	23
29	37	31	25	69	71	15	9	109	89	47	5	149	101	4	45	189	108	43	5
30	38	38	11	70	71	51	23	110	90	8	1	150	101	18	20	190	108	52	41
31	39	44	4	71	72	27	4	111	90	28	42	151	101	31	47	191	109	2	13
32	40	49	3	72	73	2	13	112	90	49	8	152	101	45	6	192	109	11	40
33	41	53	9	73	73	36	51	113	91	9	20	153	101	58	18	193	109	21	3
34	42	56	19	74	74	10	58	114	91	29	17	154	102	11	22	194	109	30	22
35	43	58	35	75	74	44	34	115	91	49	0	155	102	24	19	195	109	39	37
36	44	59	58	76	75	17	40	116	92	8	30	156	102	37	9	196	109	48	47
37	46	0	27	77	75	50	18	117	92	27	45	157	102	49	52	197	109	57	53
38	47	0	2	78	76	22	28	118	92	46	48	158	103	2	27	198	110	6	55
39	47	58	44	79	76	54	9	119	93	5	37	159	103	14	56	199	110	15	53
40	48	56	34	80	77	25	23	120	93	24	13	160	103	27	18	200	110	24	47

II. *TABLE générale pour calculer les mouvements des Cometes dans un orbe Parabolique.*

Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.			Jours de dist. au Périhélie.	Anomalie vraie.		
	D.	M.	S.		D.	M.	S.		D.	M.	S.		D.	M.	S.		D.	M.	S.
202	110	42	23	282	119	45	19	424	128	57	25	710	138	15	28	2100	152	0	37
204	110	59	43	284	119	55	52	428	129	8	52	720	138	28	48	2200	152	28	19
206	111	16	49	286	120	6	18	432	129	20	10	730	138	41	51	2300	152	54	18
208	111	33	40	288	120	16	38	436	129	31	17	740	138	54	40	2400	153	18	45
210	111	50	17	290	120	26	52	440	129	42	16	750	139	7	15	2500	153	41	48
212	112	6	40	292	120	36	59	444	129	53	7	760	139	19	33	2600	154	3	28
214	112	22	48	294	120	47	0	448	130	3	48	770	139	31	39	2700	154	24	6
216	112	38	44	296	120	56	55	452	130	14	21	780	139	43	30	2800	154	43	46
218	112	54	26	298	121	6	44	456	130	24	46	790	139	55	9	2900	155	2	31
220	113	9	56	300	121	16	27	460	130	35	3	800	140	6	35	3000	155	20	23
222	113	25	13	304	121	35	36	464	130	45	10	810	140	17	48	3100	155	37	26
224	113	40	17	308	121	54	23	468	130	55	13	820	140	28	50	3200	155	53	43
226	113	55	10	312	122	12	47	472	131	5	6	830	140	39	39	3300	156	9	17
228	114	9	51	316	122	30	51	476	131	14	52	840	140	50	18	3400	156	24	10
230	114	24	21	320	122	48	34	480	131	24	31	850	141	0	45	3500	156	38	27
232	114	38	40	324	123	5	58	484	131	34	3	860	141	11	2	3600	156	52	10
234	114	52	47	328	123	23	2	488	131	43	27	870	141	21	9	3700	157	5	22
236	115	6	43	332	123	39	48	492	131	52	45	880	141	31	5	3800	157	18	7
238	115	20	30	336	123	56	16	496	132	1	56	890	141	40	52	3900	157	30	27
240	115	34	5	340	124	12	26	500	132	11	1	900	141	50	30	4000	157	42	25
242	115	47	31	344	124	28	19	510	132	33	15	910	141	59	58	4100	157	53	56
244	116	0	46	348	124	43	57	520	132	54	51	920	142	9	17	4200	158	5	4
246	116	13	52	352	124	59	17	530	133	15	50	930	142	18	28	4300	158	15	51
248	116	26	49	356	125	14	23	540	133	36	15	940	142	27	30	4400	158	26	16
250	116	39	36	360	125	29	13	550	133	56	7	950	142	36	24	4500	158	36	22
252	116	52	14	364	125	43	49	560	134	15	27	960	142	45	10	4600	158	46	9
254	117	4	43	368	125	58	10	570	134	34	17	970	142	53	48	4700	158	55	38
256	117	17	3	372	126	12	18	580	134	52	39	980	143	2	19	4800	159	4	50
258	117	29	15	376	126	26	12	590	135	10	33	990	143	10	42	4900	159	13	45
260	117	41	18	380	126	39	53	600	135	28	0	1000	143	18	57	5000	159	22	26
262	117	53	13	384	126	53	21	610	135	45	1	1100	144	35	31	5500	160	2	39
264	118	5	0	388	127	6	37	620	136	1	40	1200	145	42	42	6000	160	38	10
266	118	16	39	392	127	19	40	630	136	17	54	1300	146	42	20	6500	161	9	44
268	118	28	10	396	127	32	32	640	136	33	45	1400	147	35	45	7000	161	38	19
270	118	39	33	400	127	45	12	650	136	49	16	1500	148	24	1	7500	162	4	7
272	118	50	49	404	127	57	40	660	137	4	25	1600	149	7	55	8000	162	27	45
274	119	1	57	408	128	9	58	670	137	19	15	1700	149	48	6	8500	162	49	26
276	119	12	58	412	128	22	6	680	137	33	44	1800	150	25	5	9000	163	9	26
278	119	23	52	416	128	34	2	690	137	47	57	1900	150	59	17	9500	163	27	54
280	119	34	39	420	128	45	49	700	138	1	51	2000	151	31	2	10000	163	45	7

III. *Table pour trouver la correction qu'il faut faire à l'Anomalie vraie & au Rayon vecteur, calculés dans une parabole, pour les réduire à une Ellipse de même foyer & de même sommet* (802).

An. vra.	Corr. de l'anom.	Corr. du ray. v.	An. vra.	Corr. de l'anom.	Corr. du ray. v.	An. vra.	Corr. de l'anom.	Corr. du ray. v.
D.	Addit.	Soustr.	D.	Addit.	Soustr.	D.	Soustr.	Soustr.
1	3.2551	5.8200	41	4.7001	9.0006	81	3.9608	9.4777
2	3.5551	6.4220	42	4.7010	9.0195	82	4.0920	9.4851
3	3.7314	6.7735	43	4.7013	9.0378	83	4.1951	9.4924
4	3.8559	7.0242	44	4.7009	9.0555	84	4.2802	9.4996
5	3.9521	7.2178	45	4.6998	9.0727	85	4.3531	9.5067
6	4.0302	7.2759	46	4.6981	9.0894	86	4.4167	9.5138
7	4.0959	7.5095	47	4.6957	9.1056	87	4.4732	9.5207
8	4.1526	7.6250	48	4.6926	9.1215	88	4.5251	9.5275
9	4.2023	7.7269	49	4.6888	9.1369	89	4.5717	9.5342
10	4.2464	7.8178	50	4.6842	9.1520	90	4.6154	9.5409
11	4.2855	7.8998	51	4.6788	9.1666	91	4.6557	9.5475
12	4.3212	7.9747	52	4.6726	9.1808	92	4.6933	9.5540
13	4.3541	8.0437	53	4.6655	9.1947	93	4.7287	9.5605
14	4.3839	8.1074	54	4.6576	9.2083	94	4.7618	9.5670
15	4.4112	8.1666	55	4.6489	9.2215	95	4.7935	9.5734
16	4.4364	8.2217	56	4.6391	9.2344	96	4.8236	9.5797
17	4.4597	8.2735	57	4 6281	9.2469	97	4.8523	9.5860
18	4.4813	8.3222	58	4.6159	9.2592	98	4.8797	9.5923
19	4.5014	8.3682	59	4.6024	9.2712	99	4.9060	9.5986
20	4.5201	8.4116	60	4.5876	9.2829	100	4.9312	9.6050
21	4.5375	8.4528	61	4.5713	9.2943	101	4.9555	9.6113
22	4.5536	8 4921	62	4.5535	9.3055	102	4.9789	9.6176
23	4.5687	8.5295	63	4.5338	9 3163	103	5.0017	9.6239
24	4.5827	8.5652	64	4.5119	9.3270	104	5.0237	9.6302
25	4.5957	8.5994	65	4.4876	9.3374	105	5.0451	9.6366
26	4.6078	8.6320	66	4.4608	9.3477	106	5.0661	9.6430
27	4.6191	8.6634	67	4.4308	9.3576	107	5.0863	9.6495
28	4.6295	8.6934	68	4.3968	9.3674	108	5.1059	9.6560
29	4.6391	8 7224	69	4.3586	9.3769	109	5.1250	9.6627
30	4.6479	8.7502	70	4.3144	9.3862	110	5.1437	9.6694
31	4.6560	8.7770	71	4.2638	9.3954	111	5.1621	9.6763
32	4.6634	8.8030	72	4.2029	9.4044	112	5.1800	9.6831
33	4.6701	8.8280	73	4.1318	9.4132	113	5.1976	9.6901
34	4.6761	8.8521	74	4.0420	9.4218	114	5.2149	9.6972
35	4.6815	8.8755	75	3.9239	9.4303	115	5.2319	9.7044
36	4.6862	8.8980	76	3.7548	9.4386	116	5.2485	9.7119
37	4.6903	8.9198	77	3.4621	9.4468	117	5.2647	9.7195
38	4.6937	8.9409	78	Soustr.	9.4546	118	5.2819	9.7272
39	4.6965	8.9614	79	3.4691	9.4624	119	5.2969	9.7352
40	4.6986	8.9813	80	3.7787	9.4701	120	5.3126	9.7433

CHAPITRE III.

Des altérations qu'on remarque dans les mouvements des Planetes & des Cometes.

857. QUOIQUE nous ayons donné, n° 285 & ſuivants, la Théorie & les formules générales qui ſervent à calculer les variations dans les mouvements des planetes, cauſées par l'altération du rapport des forces qui les animent, nous ne pouvons cependant pas en faire ici une application détaillée, pour ne pas paſſer au-delà des principes de l'Aſtronomie élementaire : nous en donnerons donc ſeulement une légere idée.

858. Les obſervations modernes comparées entr'elles & aux anciennes, ont fait connoître, 1°, que la ligne des abſides des orbites des planetes, avoit, à l'égard des fixes, un mouvement direct quoique très-lent, & la ligne des nœuds un très-petit mouvement rétrograde; d'où l'on a conclu qu'*il falloit qu'il y eût une altération légere mais continuelle dans le rapport que la force tangentielle & la force centrale doivent garder, pour faire décrire à chaque planete, pendant des temps périodiques toujours égaux, une ellipſe immobile & invariable dans un plan fixe, & dont le ſoleil occupe conſtamment un des foyers*, de la maniere que nous l'avons vu dans la premiere Section.

859. 2°. On a remarqué que Jupiter & Saturne, dont les volumes ſont très-conſidérables en comparaiſon de ceux des autres planetes, & dont les diſtances au ſoleil ſont auſſi plus grandes, étoient ſujets à des irrégularités très-ſenſibles, aſſujetties en partie à des périodes du retour à leur conjonction mutuelle; que ces inégalités étoient dans Saturne beaucoup plus conſidérables, de ſorte qu'elles donnoient des différences de pluſieurs jours dans les temps de ſes révolutions périodiques conſécutives (*e*).

(*e*) Il y a lieu de croire que les inégalités de Saturne ne viennent pas de Jupiter, comme on le croyoit, mais d'une autre cauſe inconnue, comme je l'ai expliqué dans les *Mém. de l'Acad.* 1766.

860. De ces remarques & d'autres ſemblables, faites à l'occaſion des mouvements de la lune, on a été conduit à cette concluſion générale, que toutes les obſervations les plus exactes ont enfin fait reconnoître comme une vérité de fait, que *tout corps céleſte eſt à l'égard d'un autre corps céleſte, ce que le ſoleil eſt à l'égard d'une planete*, c'eſt-à-dire, que *tout corps céleſte eſt l'origine d'une force centrale pour tout autre corps céleſte*, en ſorte qu'outre ſon impulſion primitive, tout aſtre eſt réellement animé d'autant de forces centrales particulieres, qu'il y a d'autres aſtres; ces forces ſont dirigées chacune à chacun de ces aſtres, mais l'effet particulier de chacune de ces forces n'eſt ſenſible, qu'autant que la maſſe de l'aſtre d'où elle tire ſon origine, eſt une quantité plus grande par rapport à la maſſe de celui qu'elle anime, & que le quarré de leur diſtance mutuelle eſt une quantité plus petite. Ainſi l'expreſſion de chaque force centrale eſt une fraction compoſée de la maſſe de l'aſtre d'où elle tire ſon origine, diviſée par le quarré de ſa diſtance à l'aſtre qu'elle anime. Le ſoleil eſt lui-même aſſujetti à cette loi, mais ſa maſſe énorme eſt cauſe que ſon déplacement, quoique réel, n'eſt preſque pas ſenſible, tandis que les mouvements des planetes principales & des cometes, s'exécutent autour de lui dans des trajectoires dont chacune approche d'autant moins d'être une ellipſe réguliere & fixe, que la ſomme des fractions qui expriment les forces centrales de tous les autres corps céleſtes, approche moins d'être nulle à l'égard de la maſſe du ſoleil diviſée par le quarré de ſa diſtance à la planete qui décrit cette trajectoire.

861. Mais comme les plans dans leſquels les planetes décrivent leurs orbites ſont différents, & différemment ſitués les uns à l'égard des autres, les directions des forces centrales dont les planetes ſont l'origine, ſont chacune dans des plans différents, & on ne peut les réduire toutes à moins de trois, par les regles de la compoſition des forces. On doit par conſéquent conſidérer toute planete comme animée à chaque inſtant de trois forces à la fois. La premiere eſt *la force tangentielle*, qui eſt uniforme, pendant la durée de l'inſtant, & qui eſt la réſultante de la

composition de tous les mouvements dont la planete étoit affectée pendant l'instant précédent. La seconde est une force accélératrice composée de toutes les forces centrales des planetes, réduites en une seule dans une droite couchée sur le plan dont la position est déterminée par le centre du soleil, & par la direction de la force tangentielle. La différence entre cette force ainsi composée, & la force centrale simple qui n'a d'origine que le soleil, & telle que nous l'avons considérée dans l'Art. XIII. du Chap. II. de la premiere Section, s'appelle *la force perturbatrice.* La troisieme force que j'appellerai *la force déturbatrice*, est aussi accélératrice; elle est composée de toutes les mêmes forces centrales des planetes réduites en une seule dans la direction perpendiculaire au plan dont on vient de parler. Celle-ci, à la vérité, est dans notre systême planétaire fort petite en comparaison des deux autres, à cause du peu d'inclinaison que les plans des orbites des planetes ont les uns à l'égard des autres, & que d'ailleurs le soleil placé dans l'intersection de tous ces plans, ne contribue en rien à la production de cette force déturbatrice.

862. Si la planete n'étoit animée que des deux premieres forces, leur combinaison serviroit à déterminer la nature de la trajectoire, laquelle seroit dans un plan constant, & pourroit être considérée comme une ellipse un peu variable, à cause du prodigieux excès de la seule force centrale du soleil par-dessus la force perturbatrice. De sorte que si d'ailleurs on connoissoit le rapport des masses de toutes les planetes, on pourroit, selon les principes établis n° 285 & suivants, calculer la quantité & le sens du mouvement de la ligne des absides, la variation dans l'excentricité, & dans le temps des révolutions périodiques.

863. Mais la force déturbatrice, qui agit en mêmetemps que les deux autres, est cause que le plan de cette ellipse variable ne garde pas une position constante. Supposons dans le ciel un plan absolument fixe, dans une position moyenne entre toutes celles que la trajectoire de la terre peut prendre en vertu de sa force déturbatrice : appellons ce plan, *le vrai plan de l'écliptique.* Il est évident

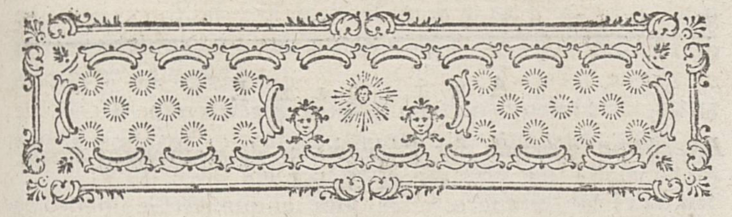
que

que ce plan étant très-peu incliné à celui de l'orbite de chaque planete, il leur est presque parallele, & par conséquent la direction de la force déturbatrice est toujours sensiblement perpendiculaire au vrai plan de l'écliptique. Or on conçoit que l'effet de cette force doit être de tendre, selon le sens dans lequel elle agit, à éloigner ou à rapprocher la planete du vrai plan de l'écliptique, & par conséquent de faire varier l'inclinaison du petit arc que décrit la planete dans l'instant dont il s'agit, avec le vrai plan de l'écliptique. La position du plan de la trajectoire de la planete, varie donc à proportion de l'intensité de la force déturbatrice, & dans le sens selon lequel cette force s'exerce. Si par exemple cette force tend à rapprocher la planete du vrai plan de l'écliptique, la planete tend à atteindre son nœud, ou, ce qui revient au même, le nœud s'avance vers la planete, avec une vîtesse qui, quoique très-petite, augmente, diminue ou devient nulle, selon que l'intensité de la force déturbatrice augmente, diminue ou devient nulle. Or en ce cas le nœud ne peut s'avancer ou aller au-devant de la planete, qu'il ne se meuve dans un sens opposé à celui de la planete. Si donc le mouvement héliocentrique de la planete est direct, celui du nœud sera toujours ou rétrograde ou nul, & réciproquement si le mouvement héliocentrique étoit rétrograde, tel qu'il est dans un grand nombre de cometes, celui du nœud seroit direct. Ce seroit le contraire si la force déturbatrice tendoit à éloigner la planete du vrai plan de l'écliptique.

864. C'est donc uniquement dans cette composition de forces qu'il faut aller chercher les causes de toutes les irrégularités apparentes des mouvements célestes : c'est en démêlant les effets particuliers de chacune de ces forces composées, puis en les réunissant, que non-seulement on explique celles de ces irrégularités qui ont été observées, mais même qu'on peut prédire celles qui se feront remarquer dans la suite. Mais il est aisé de sentir, par le peu que nous en avons dit jusqu'ici, combien ces sortes de recherches demandent de travail, de sagacité, & d'habileté à manier l'analyse la plus sublime : & même, comme il est

presque impossible de combiner à la fois les forces centrales de plus de trois corps placés dans des plans différents, on ne fait de recherches utiles sur les inégalités d'une planete ou d'une comete, qu'en calculant successivement chacune des altérations que chaque planete prise séparément peut causer à la force centrale dont le soleil est le foyer.

865. Il n'y a gueres eu jusques ici que les Géometres du premier ordre qui ayent réussi dans la solution exacte des problémes dont ces sortes de recherches peuvent être l'objet. C'est M. Euler qui a expliqué les perturbations réciproques de Jupiter & de Saturne. C'est M. Clairaut qui a démontré que le retour de la comete qui a été observée en 1531, 1607 & 1682, a dû avoir les périodes inégales de 913 $\frac{1}{2}$ & de 898 $\frac{1}{2}$ mois qu'on lui a trouvées, & que la période qui devoit la faire revoir dans ce siecle seroit de 919 mois, ce que l'événement a justifié. C'est M. d'Alembert (& après lui MM. Euler & Simpson) qui a donné une démonstration exacte de la précession des équinoxes, & même de la variation de cette précession dans une période de 18 ans relative aux mouvements des nœuds de la lune, & telle que M. Bradley en avoit fait la découverte par observations. Ce sont ces quatre mêmes Géometres qui ont donné la vraie théorie de toutes les inégalités de la lune. C'est M. Euler qui a fait voir pourquoi l'obliquité de l'écliptique étoit sujette à une diminution lente ; il a prouvé qu'elle est présentement d'environ 47'' par siecle, mais qu'elle est inégale dans les siecles fort éloignés du nôtre. Ce sont MM. Maclaurin, Euler, Bernoulli, qui ont déduit de ces principes les phénomenes du flux & reflux de la mer tels qu'on les observe. Presque tous ces problêmes avoient déja été résolus par Newton, mais d'une maniere un peu trop vague ou trop indirecte. Les nouvelles solutions que nous venons d'indiquer, ont enfin mis la loi génerale des forces centrales à l'abri de toute chicane.



QUATRIEME SECTION,

Qui contient la IIe Partie de l'Astronomie Solaire;

OU

L'explication des loix du mouvement diurne des Planetes vues du Soleil.

866. QUOIQUE nous ayons expliqué au long tous les phénomenes du mouvement diurne de la terre, d'une maniere qui peut s'appliquer facilement à ceux de toute autre planete; cependant comme il est extrêmement important de se représenter à l'esprit tout ce que l'on verroit si l'on étoit effectivement dans le soleil, nous croyons qu'il est nécessaire de donner ici une autre explication des mêmes phénomenes, presque entiérement indépendante de la premiere. Elle servira principalement à faire entendre le calcul des éclipses de soleil, la théorie des mouvements des taches que l'on voit souvent sur sa surface, & sur celles des autres planetes, les différentes manieres dont chaque point de la surface des planetes est éclairé du soleil, & par conséquent les saisons, & les autres phénomenes qui y arrivent pendant le temps d'une révolution périodique.

867. L'Observateur, placé dans le soleil, ayant choisi une des planetes dont la surface soit couverte de taches distinctes, comme, par exemple, la terre, & en ayant fait des observations suivies pendant plusieurs révolutions annuelles, il établira les phénomenes suivants, comme des faits dont il s'agit de trouver la cause.

ARTICLE I.

Expoſition générale des Phénomenes du mouvement diurne vu du Soleil.

868. I. Phénomene. L*ES routes que les taches décrivent en même temps par le mouvement diurne de la planete étant ſuppoſées tracées ſur ſa ſurface qui paroît plane, ſont des lignes paralleles.*

869. La raiſon en eſt ſimple. Un globe ne peut être à une très-grande diſtance, qu'il ne paroiſſe comme un plan circulaire, & il ne peut tourner ſur un axe, que chaque point de ſa ſurface ne décrive des cercles dont les plans ſont chacun perpendiculaires à cet axe, & par conſéquent paralleles entr'eux.

870. II. Phénomene. *Les routes des taches paroiſſent ordinairement comme des courbes, plus convexes vers les extrêmités du diſque de la planete que vers le milieu.*

871. Ce phénomene prouve que *l'axe ſur lequel la planete tourne, n'eſt pas perpendiculaire au plan de ſon orbite annuelle*, parce que s'il lui étoit perpendiculaire, toutes les routes des taches ſeroient des droites paralleles entr'elles. Car alors tous les cercles que les taches décriroient, ſeroient dans des plans paralleles au plan de l'orbite annuelle dans lequel ſe trouve le centre du ſoleil, & par conſéquent l'œil de l'obſervateur. Et parce que le diametre ou diſque entier de la planete ne paroît que ſous un angle de quelques ſecondes, il eſt clair que tous les plans des cercles décrits par les taches paroîtroient à l'obſervateur tels, qu'étant prolongés, ils paſſeroient par ſon œil, & par conſéquent tous les cercles ne devroient lui paroître que comme des lignes droites égales à leurs diametres reſpectifs, ſuivant ce principe d'optique, qu'*un œil étant dans la prolongation du plan d'une figure plane quelconque, voit cette figure comme une ligne droite, égale à ſa plus grande dimenſion qui ſe trouve expoſée directement à l'œil*; parce que cet œil ne

peut voir qu'une partie du contour de cette figure, & nullement sa surface.

872. III. Phénomene. *Toutes les routes des taches d'une planete ont leur concavité tournée vers un même point.*

873. Il est clair que ce point doit être un des poles de la planete, c'est-à-dire, une des extrêmités de l'axe sur lequel elle tourne; car lorsqu'un globe tourne sur un axe, les deux bouts de cet axe sont deux points qui n'ont aucune rotation, & qui sont les poles de tous les cercles que décrivent les points qui tournent.

874. IV. Phénomene. *Tous les ans vers le* 21 *Juin, les routes des taches de la terre sont vers leur milieu paralleles au plan de l'écliptique pendant plusieurs jours. On voit vers l'extrêmité supérieure du disque de la terre plusieurs taches qui décrivent des especes d'ellipses entieres* a, b, c, (fig. 81) *autour d'un point fixe* P, (qui est (872) un des poles, & que l'observateur appellera le pole arctique ou boréal de la terre), *ce qui fait que ces taches ne disparoissent pas derriere la planete. D'autres taches décrivent autour du même pole* P *des portions d'ellipses* d, e, f, *d'autant plus grandes que des demi-ellipses, qu'elles sont plus près du pole* P, *de sorte que les taches qui les décrivent sont visibles sur le disque pendant plus de* 12 *heures, & le sont d'autant plus au-delà de* 12 *heures, que ces taches sont plus près du pole* P. *Au contraire dans la partie inferieure du disque, on voit d'autant moins que la moitié des ellipses* h, i, k, *qu'elles sont plus éloignées du pole* P, *& à proportion on voit ces taches pendant un espace moindre que de* 12 *heures.*

875. V. Phénomene. *Dans le cours des mois de Juillet & Août suivants, on voit toutes les ellipses précédentes se rétrecir en largeur* (fig. 82) *insensiblement d'abord, puis très-sensiblement. Elles deviennent de plus en plus inclinées au plan de l'écliptique, & le pole* P *se rapproche obliquement de la circonférence du disque. Les ellipses* a, b, c, *qu'on voyoit entieres cachent successivement derriere le disque les portions qui étoient au-delà du pole* P, *par conséquent les taches qui les décrivent cessent successivement*

d'être continuellement visibles ; on voit en même-temps que les portions d'ellipses, d, e, f *diminuent & deviennent de plus en plus des demi-ellipses, & les taches qui les décrivent approchent de plus en plus de n'être visibles que pendant douze heures. Au contraire dans la partie inférieure du disbue les portions d'ellipses* h, i, k *augmentent & tendent à devenir des demi-ellipses, les taches qui les décrivent apdrochent de plus en plus d'être visibles pendant* 12 *heures; & même vers la partie inférieure du disque, on voit paroître successivement de nouvelles taches, qui décrivent des petites portions d'ellipses* l, m, *qui s'agrandissent continuellement en longueur, tandis qu'elles rétrécissent en largeur aussi bien que les autres.*

876. VI. Phénomene. *Vers le 23 Septembre* (fig. 83), *les ellipses de la partie supérieure du disque sont tellement approchées d'être demi-ellipses en décroissant en largeur, & celles de la partie inférieure sont tellement approchées d'être demi-ellipses en diminuant aussi de largeur, qu'elles sont toutes devenues des demi-ellipses infiniment étroites, ou plutôt qu'elles sont toutes devenues confondues avec leur grand axe, & par conséquent des droites égales à leur grand axe, paralleles & inclinées de* 23° $28'$ $20''$ *sur le plan de l'écliptique. Le pole* P *est arrivé sur la circonférence, & le pole* Q *qui dans les deux phénomenes précédents restoit caché derriere le disque,* (& qu'on appelle pole antarctique ou austral), *est aussi sur sa circonférence : & par conséquent on voit alors toutes les taches de la terre pendant douze heures précisément.*

877. VII. Phénomene. *Aussi-tôt après le 23 Septembre, & pendant le cours des mois d'Octobre & Novembre, les routes des taches sont moins inclinées au plan de l'écliptique* (fig. 84); *elles redeviennent des portions d'ellipses qui tournent leur concavité vers le pole* Q *qui s'avance obliquement sur le disque, tandis que le pole* P *reste caché derriere. Ces ellipses s'élargissent de plus en plus. Celles qui sont dans la partie inférieure du disque deviennent d'autant plus grandes que des demi-ellipses, qu'elles sont près du pole* Q : *en sorte que les routes* n, m, l *deviennent successive-*

ment des ellipſes entieres, & les taches qui les décrivent ſont de perpétuelle apparition. Les taches qui décrivent les autres traces k, i, h *ſont ſur le diſque pendant un intervalle de temps d'autant plus grand que* 12 *heures, qu'elles ſont plus près du pole antarctique* Q. *Au contraire les traces de la partie ſupérieure deviennent des portions d'ellipſes plus petites en plus petites, & les taches qui les décrivent paroiſſent ſur le diſque pendant un intervalle d'autant moindre que de* 12 *heures qu'elles ſont plus loin du pole* Q, *en ſorte que les routes* c, b, a *qui en ſont les plus éloignées, diſparoiſſent ſucceſſivement avec les taches qui les décrivent.*

878. VIII. Phénomene. *Vers le* 21 *Decembre pendant quelques jours avant & après, les routes des taches ſont vers leur milieu paralleles au plan de l'écliptique* (fig. 85); *tout eſt dans un ordre renverſé à celui du* 21 Juin (874): *les portions d'ellipſes de la partie inférieure du diſque ſont d'autant plus grandes qu'elles étoient plus petites dans le phénomene* IV. *Les ellipſes* n, m, l *qui ne ſe voyoient pas le* 21 *Juin, paroiſſent ici toutes entieres; au contraire les ellipſes* a, b, c *ſont ici totalement diſparues, & leurs voiſines* d, e, f *ſont d'autant moindres que des demi ellipſes, qu'elles étoient plus grandes le* 21 *Juin, & les durées des apparitions des taches ſe reglent ſur la grandeur des portions d'ellipſes qu'elles décrivent.*

879. IX, X, XI. Phénomenes. *Dans les mois de Janvier & Février* (fig. 86) *toutes les ellipſes ſe rétréciſſent, & s'inclinent du côté oppoſé à celui vers lequel elles s'inclinoient précédemment. Le pole* Q *ſe rapproche de la circonférence du diſque. Les ellipſes de la partie inférieure diminuent de grandeur; les voiſines du pole* Q *ceſſent d'être entieres; celles de la partie ſupérieure augmentent de grandeur; en un mot, tout tend à ſe remettre dans l'état où tout ſe trouvoit dans le phénomene* IV. *En effet, le* 20 *Mars* (fig. 87) *toutes les ellipſes ſont devenues confondues avec leur grand axe, & par conſéquent lignes droites paralleles & autant inclinées ſur le plan de l'écliptique, qu'elles l'étoient le* 23 *Septembre, c'eſt-à-dire, de* 23° 28′ 20″, *mais dans un ſens oppoſé. Toutes les taches ſont*

visibles pendant douze heures : les deux poles P, Q sont sur le bord du disque. Enfin, pendant les mois d'Avril & Mai (fig. 88) ces droites redeviennent des ellipses moins inclinées à l'orbite de la terre ; elles tournent leur concavité vers le pole P qui s'avance sur le disque, tandis que le pole Q s'enfonce derriere de plus en plus : & ainsi tout se remet insensiblement dans le même état le 21 Juin qu'on l'a trouvé dans le phénomene IV, puis tout recommence dans le même ordre.

880. Tous les mêmes phénomenes se passent dans les autres planetes, avec la différence qu'ils se reglent sur leurs révolutions annuelles, & que dans les mêmes circonstances les ouvertures des ellipses dépendent de l'inclinaison de l'axe de l'équateur de la planete par rapport au plan de son écliptique.

ARTICLE II.

Conséquences immédiates de ces Phénomenes ; des Nuits & des Jours, de leurs différentes longueurs, & des différentes saisons de l'année ; des Solstices & des Equinoxes.

881. POUR établir une théorie générale de toutes ces apparences, l'Observateur supposera que les planetes sont des corps habitables, qui ne sont pas lumineux par eux-mêmes comme le soleil, mais qui ne le sont que par la réflexion de la lumiere du soleil : il supposera encore que chacune des taches qu'on voit sur les planetes, sont des points remarquables sur leur surface, comme des villes habitées. D'où il résulte....

882. 1°. Que les habitants de chaque tache sont dans l'obscurité ou dans la nuit pendant tout le temps que la tache est derriere le disque par rapport au soleil ; & qu'ils jouissent de la lumiere ou qu'ils sont dans le jour, pendant tout le temps que la tache paroît sur le disque.

883. 2°. Que le jour commence & la nuit finit à l'instant auquel la tache vient à paroître sur le bord du disque éclairé pour y entrer, & que le jour finit & la nuit com-

mence à l'inſtant auquel la même tache eſt ſur le bord du diſque pour repaſſer derriere.

884. 3°. Que lorſque les deux poles ſont ſur la circonférence du diſque (fig. 83 & 87) tous les habitants de la planete ſont dans le jour pendant une demi-révolution diurne & dans la nuit pendant l'autre demi-révolution; c'eſt pour cela que les temps auxquels ces deux phénomenes arrivent, s'appellent *les équinoxes de la planete*.

885. 4°. Que lorſqu'il n'y a qu'un pole ſur le diſque éclairé, les habitants des environs ſont dans un jour continuel, & ceux qui ſont aux environs de l'autre pole ſont dans une nuit continuelle.

886. 5°. Que le jour eſt d'autant plus long & la nuit d'autant plus courte, qu'on eſt plus près du pole éclairé & plus loin du pole caché; & par conſéquent, lorſqu'on eſt à égale diſtance de part & d'autre de ces deux poles, les jours ſont égaux aux nuits pendant toute l'année : c'eſt pour cela qu'on appelle *le cercle Equinoxial* ou *l'Equateur de la Planete*, le grand cercle qui paſſe au milieu entre les deux poles : ce cercle dans les figures 81 & ſuivantes, eſt repréſenté par la ligne T*g*R.

887. 6°. Que les plus grands jours poſſibles (& par conſéquent les plus courtes nuits), ſont par rapport à un habitant qui n'eſt pas ſur le cercle équinoxial, lorſque ſon pole le plus proche eſt au milieu de ſon paſſage ſur le diſque éclairé, que le milieu de la trace de la tache qu'il habite eſt parallele au plan de l'orbite de la planete, & que ſon ellipſe ceſſe d'augmenter pour commencer à diminuer. Au contraire les plus courts jours poſſibles arrivent lorſque le pole de la planete le plus voiſin de cet habitant eſt au milieu de ſa route derriere le diſque éclairé, que le milieu de la trace étant parallele au plan de l'orbite de la planete, ſon ellipſe ceſſe de diminuer & va commencer d'augmenter. Ces deux temps s'appellent *les Solſtices*.

888. 7°. Que puiſque les intervalles d'un équinoxe au ſolſtice voiſin, & de ce ſolſtice à l'équinoxe ſuivant, ſont chacun d'un quart de la révolution annuelle de la planete, chaque pole doit être éclairé continuellement pendant une

moitié de cette révolution, & rester dans la nuit pendant l'autre moitié.

889. 8°. Que dans les lieux habités aux environs des poles P, Q, il doit y avoir des jours de plusieurs mois, de plusieurs semaines, de plusieurs jours; & enfin qu'il doit y en avoir un où le plus grand jour au solstice d'été est précisément égal au temps de la révolution diurne de la planete; & c'est le lieu dont l'ellipse touche la circonférence du disque au-delà de chaque pole, laquelle par conséquent est la derniere de toutes les ellipses qu'on puisse voir en entier. Les cercles de la planete qui sont représentés par ces ellipses, s'appellent *les Cercles Polaires de la Planete* : ils sont représentés dans les figures par les ellipses *c* & *l*.

900. (*g*) 9°. Qu'entre un cercle polaire & l'équateur, les jours augmentent depuis le solstice d'hyver jusqu'au solstice d'été, & les nuits diminuent à proportion, & que les jours diminuent ensuite depuis le solstice d'été jusqu'au solstice d'hyver, de sorte que la nuit au solstice d'hyver est égale au jour du solstice d'été, & réciproquement.

901. 10°. Que par toute la surface de la planete, la somme des jours est à peu près égale à la somme des nuits.

Article III.

De la cause générale de tous ces Phénomenes.

902. Maintenant pour rendre une raison générale de tous ces phénomenes, l'Observateur remarquera que puisque ce n'est que le jour de l'équinoxe que les traces des taches sont des droites paralleles, il faut que ce jour-là les plans des cercles décrits par la rotation de chaque tache, soient tous dirigés au soleil; & que dans tous les autres temps les plans de ces cercles soient tantôt élevés, tantôt abaissés par rapport au soleil. C'est une conséquence de ce principe d'Optique, que *lorsque l'œil est hors du plan & de l'axe d'un cercle fort éloigné, il en voit la*

(*g*) On a passé par inadvertance de 889 à 900.

surface toute entiere, mais sous la forme d'une ellipse plus ou moins rétrecie, selon que l'œil est plus ou moins proche d'être dans le plan prolongé de ce cercle, en sorte que si l'œil se trouve dans ce plan, la surface paroît si rétrecie, qu'elle est confondue avec la circonférence même, & le cercle ne paroît que comme une droite égale à son diametre. Car alors tous les rayons tirés de l'œil à tous les points de la circonférence de ce cercle éloigné, & terminés sur une portion sensiblement plane de la surface de la voûte céleste qui borne la vue, y forment une projection ortographique de ce cercle (523).

903. Et parce que le centre du soleil est toujours dans le plan de l'orbite de la planete (33), il suit qu'à l'instant d'un équinoxe, le centre du soleil est en même-temps dans le plan de l'orbite de la planete, & dans le plan de son cercle équinoxial; & par conséquent *à l'instant de l'équinoxe, le centre du soleil est dans l'intersection du plan de l'orbite de la planete avec le plan de son équateur.*

904. Maintenant si par le centre de la terre, par exemple, on imagine un axe E C (fig. 81 & *suiv.*) perpendiculaire au plan de son orbe annuel (nous l'appellerons l'*axe de l'écliptique*), & un autre axe P Q qui aboutisse aux deux poles, (nous l'appellerons l'*axe de l'équateur*) il sera facile de faire voir que...

905. *Tous les phénomenes du mouvement diurne d'une planete, qui arrivent pendant le cours d'une de ses révolutions annuelles, sont une suite nécessaire de ce que la planete fait une rotation apparente sur l'axe de son écliptique, en même temps & avec une même vîtesse angulaire, que celle de la révolution annuelle; tandis qu'elle fait un grand nombre de rotations réelles sur l'axe de son équateur, qui reste toujours incliné de la même quantité sur le plan de l'écliptique de la planete.*

906. Car si un globe n'a uniquement qu'un mouvement de translation qui lui fasse faire sur un plan une révolution autour d'un point fixe placé sur le même plan, il est aisé de concevoir, (& on peut l'éprouver par soi-même en tournant autour d'un corps voisin, & en regardant toujours un

même point fixe infiniment éloigné, pour s'assurer que l'on n'a aucun mouvement de rotation), que ce globe vu de ce point autour duquel il tourne, doit paroître avoir en même-temps un mouvement de révolution, & un mouvement de rotation, lequel se fait sur un axe perpendiculaire au plan dans lequel le globe tourne, & paroît avoir la même vîtesse angulaire que celle de la révolution. Par conséquent, tous les points de la surface de ce globe doivent se présenter successivement au point central, & décrire des cercles paralleles entr'eux, & au plan dans lequel le globe se meut, à mesure que la révolution s'acheve. Cela posé....

907. Concevez d'abord que la planete traversée par l'axe de son équateur (incliné, comme on sait, sur le plan de l'écliptique), n'ait que son mouvement annuel de révolution autour du soleil : elle doit paroître, vue du soleil, avoir en même temps un mouvement annuel de rotation sur l'axe de l'écliptique : tous les points de sa surface, & nommément les poles de son équateur, doivent se présenter successivement au soleil, pour en être éclairés; chacun doit paroître décrire chaque année un cercle parallele à l'écliptique, avec la même vîtesse angulaire que celle du mouvement de révolution : & à cause de son inclinaison constante, l'axe de l'équateur doit paroître décrire autour de l'axe de l'écliptique qui traverse la planete, deux cones opposés & égaux, dont le sommet commun est au centre de la planete. Or l'axe de l'écliptique étant perpendiculaire au plan de l'orbite de la planete, chacun de ses poles est toujours exposé de la même maniere au soleil; ils sont toujours sur la circonférence du disque de la planete, c'est-à-dire, sur le grand cercle qui termine l'ombre & la lumiere : donc chaque pole de l'équateur doit décrire une moitié de son cercle sur le disque éclairé, & l'autre moitié sur le disque obscur; & comme ils sont diamétralement opposés, l'un doit être autant enfoncé sous le disque obscur, que l'autre est avancé sur le disque éclairé; & lorsque l'un est sur un bord du disque, l'autre doit être sur le bord opposé, & ainsi de suite. Maintenant il est évident que cette rotation apparente n'empêche pas que la planete ne puisse avoir une

rotation réelle autour de l'axe de l'équateur : ces deux ſortes de rotations ne feront que ſe compliquer enſemble pour produire tous les phénomenes détaillés dans l'article précédent, & dont on rendra raiſon dans la ſuite.

ARTICLE IV.

De l'obliquité de l'écliptique; des différentes ſituations des poles de l'Equateur à l'égard du Soleil; de la déclinaiſon du ſoleil, & de ſon aſcenſion droite.

908. I. PUISQUE dans le moment de l'équinoxe (fig. 83 & 87) les extrêmités P, Q de l'axe de l'équateur, ſont auſſi-bien que les extrêmités E, C de l'axe de l'écliptique, ſur la circonférence du diſque éclairé, il eſt clair que les arcs EP ou QC meſurent l'inclinaiſon de ces deux axes, & par conſéquent celle des plans de l'écliptique & de l'équateur. Cette inclinaiſon s'appelle l'*obliquité de l'écliptique*. Cet angle eſt ſur le diſque de la terre d'environ 23° 28'.

909. D'où l'on voit que *pour connoître l'inclinaiſon de l'axe de l'équateur d'une planete ſur le plan de ſon écliptique, il faut, lorſque les routes des taches ſont des lignes droites, meſurer l'obliquité de ces lignes à l'égard du plan de l'orbite de la planete.*

910. II. Puiſque le centre du ſoleil répond toujours directement au point du milieu de l'hémiſphere éclairé d'une planete, il eſt évident, que pendant une révolution annuelle chaque pole de l'équateur s'approche ou s'éloigne ſucceſſivement de ce milieu. Que dans les équinoxes la diſtance de chaque pole à ce point étant meſurée ſur la ſurface ſphérique de la planete, eſt un arc de 90°, parce que le point du milieu de l'hémiſphere éclairé eſt le pole du grand cercle dont la circonférence le termine. Que dans les ſolſtices le pole de l'équateur qui eſt ſur le diſque, en eſt le plus près qu'il eſt poſſible, & l'autre pole le plus éloigné qu'il eſt poſſible. Que dans les autres temps un pole étant à une certaine diſtance de ce point, l'autre pole eſt

précisément à la même distance du point du milieu de l'hémisphere obscur.

911. III. Si donc de chaque pole E, C de l'écliptique on imagine sur la surface de la planete deux petits cercles ADB, GKH à une distance égale à l'obliquité de l'écliptique, (fig. 81 & *suiv.*) ils représenteront les routes de chaque pole de l'équateur pendant une révolution annuelle de la planete. La projection de ces deux petits cercles est une droite égale à la corde du double de cette obliquité, parce que les plans de ces petits cercles sont paralleles à celui de l'écliptique, & très-peu élevés au-dessus, à cause de la petitesse du diametre apparent de la planete. Les intersections A, B, G, H de ces petits cercles avec le grand cercle qui termine le disque éclairé, sont les lieux des poles de l'équateur dans le moment des équinoxes, & ces poles s'avancent dans leur petit cercle à proportion que le centre de la planete parcourt la circonférence de son orbite. Etant donc donné l'arc de l'écliptique parcouru par le centre de la planete depuis son dernier équinoxe, ou celui qui lui reste à parcourir pour atteindre son plus proche équinoxe, il est facile de déterminer géométriquement le lieu du pole éclairé de l'équateur sur le disque éclairé. Par exemple, le 18 Avril 1761 à midi, la terre ayant parcouru sur son orbite 28° 36′ 47″, depuis l'équinoxe du mois de Mars précédent, il faut sur AB (fig. 88) comme diametre, décrire le demi-cercle AOB, & prendre depuis le point A qui représente le lieu où étoit le pole P au temps de l'équinoxe, l'arc AO de 28° 36′ 47″, & abaisser la perpendiculaire OP qui donnera le lieu P du pole sur le disque éclairé (528).

912. En imaginant sur la projection GHK, une portion H*q* derriere le disque éclairé, qui représente un arc de 28° 36′ 47″, le point *q* sera la position du pole austral derriere le disque éclairé.

913. IV. La situation de chaque pole de l'équateur étant déterminée de la sorte; si par le point S, qui est le milieu de l'hémisphere éclairé, & auquel répond le centre du soleil, (par cette raison ce point du milieu S sera appellé dans

la ſuite le lieu du ſoleil) on imagine ſur la ſurface de la planete une moitié P S Q, (fig. 81 *& ſuiv.*) de grand cercle terminée aux deux poles P, Q; 1°. Il eſt clair que ſon plan paſſant par l'œil de l'obſervateur, ſa projection doit toujours être une droite. 2°. Que ce demi-cercle ſera toujours coupé en deux également & perpendiculairement en *g* par le grand cercle T*g*R, qui repréſente l'équateur, (Trig. 8 & 21) & par conſéquent que l'arc P*g* ou Q*g* eſt toujours de 90°. On voit, 3°, que ce demi-cercle P S Q n'eſt viſible en entier que dans les équinoxes; dans les autres temps, une partie vers P ou vers Q eſt toujours cachée à proportion de ce que le pole auquel elle aboutit eſt enfoncé derriere le diſque obſcur. 4°. Que le point *g* d'interſection du demi-cercle P S Q avec l'équateur, eſt confondu avec le lieu S du ſoleil au moment des équinoxes; & dans les autres temps ces deux points ſont d'autant plus éloignés que la planete eſt plus loin des équinoxes. C'eſt pour cela que leur diſtance S*g* s'appelle *la déclinaiſon du ſoleil.* Elle eſt *boréale* ou *auſtrale*, ſelon que le pole boréal ou le pole auſtral eſt ſur le diſque éclairé; le demi-cercle P S Q s'appelle auſſi demi-cercle de déclinaiſon. 5°. Donc la déclinaiſon du Soleil croît depuis un équinoxe juſqu'au ſolſtice ſuivant; elle décroît depuis ce ſolſtice juſqu'à l'autre équinoxe où elle change de nom, & croît depuis cet équinoxe juſqu'à l'autre ſolſtice; enfin, elle décroît depuis le ſolſtice juſqu'à l'équinoxe ſuivant, où elle reprend ſon premier nom, & continue perpétuellement ſes variations. 6°. Dans le temps des ſolſtices le demi-cercle P S Q eſt couché ſur le demi-cercle qui paſſeroit par les poles E, C de l'écliptique, & par le point S, & alors il eſt facile de voir que l'arc S*g* de la plus grande déclinaiſon du ſoleil, eſt égal à l'obliquité de l'écliptique. Car (fig. 81) l'arc E S eſt de 90° auſſi-bien que l'arc P*g*, donc l'arc E P eſt égal à l'arc S*g*. Or l'arc E P qui eſt la diſtance du pole de l'écliptique au cercle décrit par le pole de l'équateur, eſt (604) égal à l'obliquité de l'écliptique. On voit, 7°, que l'arc de la diſtance P S ou Q S du ſoleil à un des poles P ou Q, eſt égal au complément de la déclinaiſon du ſoleil, ſi ce pole

eſt éclairé, ou à 90° plus cette déclinaiſon, ſi ce pole eſt ſur le diſque obſcur.

914. V. Si par le même point S milieu de l'hémiſphere éclairé, on tire le diametre IL, qui repréſente l'interſection du globe de la planete par le plan de l'écliptique, lequel par conſéquent repréſente une moitié de grand cercle de la ſphere de la planete vue du ſoleil, (on appellera cette moitié de grand cercle IL l'*Ecliptique;*) on voit, 1°, que dans le temps des équinoxes l'équateur T*g*R & l'écliptique ISL (fig. 83 & 87) s'entrecoupent au point S qui répond au ſoleil, & que dans les autres temps leur point d'interſection eſt d'autant plus loin du point S, que la planete eſt plus loin des équinoxes. En ſorte que dans le temps des ſolſtices, (fig. 81 & 85) l'équateur & l'écliptique s'entrecoupent aux points marqués ♈ & ♎ dans la circonférence du diſque éclairé. 2°, Que pendant une demi-révolution annuelle de la planete, & depuis un ſolſtice juſqu'à l'autre, une de ces interſections, par exemple, celle qui eſt marquée ♈, (fig. 81, 82, 83, 84, 85) parcourt tout le demi-cercle IL, en décrivant le même nombre de degrés ſur IL que chaque pole de l'équateur en décrit ſur ſon petit cercle, & pendant l'autre demi-révolution, l'interſection marquée ♎ (fig. 85, 86, 87, 88, 89), décrit le même demi-cercle I L. 3°, Que l'angle ſphérique S♈*g* ou S♎*g* (fig. 81 & *ſuiv.*) eſt toujours égal à l'obliquité de l'écliptique, puiſque c'eſt l'angle formé par l'interſection des plans de l'équateur & de l'écliptique. D'où il ſuit qu'étant connue la diſtance de la planete au plus proche équinoxe, c'eſt-à-dire, l'arc que le centre de la planete a parcouru ſur l'écliptique depuis ſon dernier équinoxe, ou doit parcourir juſqu'à ſon plus prochain, on peut calculer facilement la déclinaiſon du ſoleil, & ſa diſtance aux deux poles de l'équateur. Car dans le triangle ſphérique S♈*g* (fig. 81, 82, 83, 84, 85), ou S*g*♎, (fig. 85, 86, 87, 88) toujours rectangle en g (trig. 20), l'arc S♎ ou S♈ eſt égal à l'arc de la diſtance de la planete au plus proche équinoxe, & l'angle S♎*g* ou S♈*g* eſt égal à l'obliquité de l'écliptique.

915.

915. VI. L'arc de l'équateur g ♈ compris entre l'intersection ♈ de l'équateur avec l'écliptique & l'arc S g tiré perpendiculairement du lieu S du soleil sur l'équateur, s'appelle l'*ascension droite du soleil.* Le cercle P S Q, qui est toujours perpendiculaire à l'équateur, étant aussi perpendiculaire à l'écliptique dans les solstices, coupe l'équateur & l'écliptique à 90° de leur intersection (Trig. 22). Ainsi (fig. 81 & 85) ♎ S, ♈ S, ♎ g ♈ g sont des quarts-de-cercle. Donc dans l'équinoxe qui se fait en ♈, l'ascension droite du soleil est 0° ; elle est de 90° dans le solstice suivant, de 180° à l'équinoxe de ♎, de 270° au solstice suivant ; enfin de 360° ou de 0° à son retour au premier équinoxe. D'où il suit qu'étant donnés l'obliquité de l'écliptique, & l'arc de la distance de la planete au plus proche équinoxe, il est facile de calculer l'ascension droite du soleil ; puisque dans les triangles sphériques rectangles ♈ g S, ♎ g S, on connoît l'angle S ♈ g, ou S ♎ g, & le côté ♈ S ou ♎ S.

ARTICLE V.

Des temps de la rotation des Planetes ; du temps vrai & du temps moyen.

916. VII. SI on suppose que le plan du diametre P S Q ne participe aucunement au mouvement diurne de la planete, mais seulement au mouvement annuel, & par conséquent qu'il reste comme fixe à l'égard du mouvement diurne, (en ce cas ce demi-cercle s'appelle *le Méridien céleste*,) on voit clairement, 1°, qu'en vertu du mouvement diurne tous les points de la surface de la planete, & même ceux des cercles I S L, T g R qu'on imagine décrits sur cette surface, passeront successivement dans le plan de ce méridien, en décrivant autour de l'axe de l'équateur tous ces cercles qui vus du soleil paroissent des ellipses. (L'instant du passage d'un point quelconque s'appelle *le midi* de ce point).

917. 2°. Que les arcs de tous ces cercles qui passent

ſous le méridien ſeroient toujours exactement proportionnels aux temps, s'ils n'avoient qu'un ſeul mouvement de rotation ; mais à cauſe du mouvement de révolution périodique, pendant lequel la planete paroît faire une rotation entiere ſur l'axe de ſon écliptique, chaque intervalle du retour d'une tache quelconque au méridien, eſt composé d'une rotation entiere & uniforme de la planete ſur l'axe de ſon équateur, plus la partie de la rotation périodique ſur l'axe de l'écliptique qui convient à la durée de cet intervalle, & qui eſt proportionnée à la vîteſſe actuelle du mouvement de révolution. D'où il ſuit :

918. 3°. Qu'étant donné le temps d'une révolution entiere d'une tache à l'égard du ſoleil, pour connoître celui de la rotation de la planete ſur l'axe de ſon équateur, il faut faire cette analogie : *Comme 360° plus le mouvement propre de la planete pendant le temps de la révolution de la tache, ſont au temps de cette révolution ; ainſi 360° ſont au temps de la rotation.*

919. 4°. Que la vîteſſe du mouvement annuel étant inégale, à cauſe de l'excentricité de l'orbite de la planete, chaque intervalle du retour d'une tache au méridien (qui meſure un jour par rapport à cette tache) doit être inégal ; & par conſéquent ſi les habitans de la planete ont des horloges dont le mouvement ſoit très-uniforme, ces horloges ne doivent preſque jamais s'accorder à donner la même durée d'un midi à l'autre ; mais elles doivent marquer quelques ſecondes de plus quand le mouvement de la planete eſt accéléré, & quelques ſecondes de moins quand il eſt retardé.

920. Donc pour avoir égard à ces différences, il eſt naturel de diſtinguer deux ſortes de temps, un temps *vrai* ou *apparent*, & un temps *moyen*. Voyez le détail de cette théorie aux n° 462 & ſuivans.

ARTICLE VI.

De la différence de Meridiens; des longitudes & latitudes Géographiques; de la Méthode des Géographes.

921. DU passage successif de tous les points de la surface d'une planete sous le méridien céleste PSQ, il résulte encore que toutes ces taches comptent midi successivement les unes après les autres, qu'ainsi la tache qui passe une heure après une autre compte midi, tandis que cette autre compte une heure après midi : il en est ainsi des autres taches. Mais toutes les taches qui passent en même temps par le méridien comptent toujours la même heure au même instant; il y a donc sur la surface des planetes des lieux où l'on compte la même heure au même instant, & d'autres où l'on compte au même instant des heures toutes différentes. Or il est évident que tous les points où l'on compte midi au même instant, devant se trouver ensemble sous le méridien PSQ, tous ces points, dis-je, doivent être tellement disposés sur le globe de la planete, qu'ils soient dans la direction d'un demi-cercle qui va d'un pole à l'autre; mais les points où on compte midi à différents instants, ne peuvent être sous un tel demi-cercle. S'il s'agit de la terre, par exemple, & si par les deux poles P, Q de l'équateur, & par chaque point de sa circonférence, on fait passer des demi-cercles (qu'on appellera des *méridiens terrestres*, pour les distinguer du méridien céleste PSQ), chaque demi-cercle déterminera sur la surface de la terre tous les points qui comptent en même temps la même heure, & les distinguera des autres. Et si on réduit en temps, à raison de 24^h pour 360°, le nombre des degrés de l'équateur compris entre deux de ces méridiens terrestres, ou ce qui est la même chose (Trig. 12) le nombre de degrés qui mesure l'angle sphérique formé au pole par ces deux méridiens terrestres, on connoîtra la différence des temps que l'on compte sous ces deux

méridiens, & qu'on appelle en Astronomie *la différence des méridiens.*

922. Il est clair que *chacun des points consécutifs qui sont sous un même méridien terrestre, sont tellement situés à l'égard des poles de l'équateur, qu'il n'est pas possible que deux de ces points soient en même-temps à égale distance d'un même pole.*

923. On voit aussi que connoissant l'heure qu'on compte sur un point de la surface de la terre, & la différence des méridiens entre ce point & un autre point quelconque, on sait aussi-tôt quelle heure on compte sur cet autre point; & réciproquement connoissant les heures qu'on compte au même instant sur deux points quelconques de la surface de la terre, on connoît la différence de leurs méridiens.

924. De ce que le mouvement diurne se fait autour des poles de l'équateur, il suit que tous les points de la surface du globe qui sont à une même distance d'un des poles, décrivent le même cercle, ou paroissent, vus du soleil, décrire la même ellipse; donc si depuis l'équateur jusqu'aux deux poles on décrit sur toute la surface du globe des cercles paralleles à l'équateur, ces cercles (qu'on appelle simplement *des paralleles*, & qui sont nécessairement des petits cercles de la sphere) détermineront chacun tous les points qui sont à égale distance du pole, & serviront à marquer tous ceux qui passent successivement sous le méridien céleste PSQ, de sorte qu'il n'est pas possible que deux points soient en même-temps sous le même parallele & comptent la même heure, ou soient sur le même méridien terrestre. D'où il suit qu'on peut déterminer d'une maniere fixe & invariable la position d'un point quelconque sur la surface de la terre, en spécifiant sous quel parallele il se trouve, & quelle est sa différence des méridiens à l'égard du point de l'équateur qu'on aura choisi pour y faire passer le premier des méridiens terrestres : car on vient de voir qu'il est impossible que deux points différents aient ces deux mêmes conditions.

925. C'est ainsi en effet que les Géographes déterminent les positions des points remarquables de la Terre. 1°, Ils partagent l'équateur en

360°, & par chaque pole & chaque division ils font passer des méridiens; ils choisissent une de ces divisions, depuis laquelle ils comptent les autres, & le méridien qui y passe s'appelle *le premier méridien.* Mais à cet égard les Géographes ne s'accordent pas entr'eux; car les uns, comme les Anglois, veulent que leur premier méridien passe par Londres; d'autres, comme les Hollandois, le font passer par le Pic de Ténériffe, montagne très-remarquable dans une des Canaries: quelques François le font passer par Paris (g); ils s'accordent cependant assez généralement à le faire passer par la plus occidentale des Canaries, qu'on appelle l'*Isle de fer*, conformément aux anciens Géographes, & à une Ordonnance du Roi Louis XIII. Depuis le premier méridien, en allant toujours d'occident en orient, les Géographes comptent les autres, en disant que tous les points qui sont sur le méridien qui est éloigné d'un degré à l'orient du premier, ont un degré de longitude, que ceux qui sont sous le méridien suivant, ont deux degrés de longitude, &c. 2°, Ayant divisé le premier méridien, ou même un méridien quelconque, en 90° depuis l'équateur jusqu'à chaque pole, ils décrivent par toutes ces divisions des petits cercles paralleles à l'équateur: & tous les points qui se trouvent sur le premier cercle après l'équateur, ont un degré de latitude boréale, si ce cercle est du côté du pole boréal; ou australe, si ce parallele est du côté du pole austral. De même tous les points qui sont sur le parallele suivant, ont deux degrés de latitude boréale ou australe, selon la situation de ce parallele à l'égard du pole boréal ou austral, & ainsi des autres: de sorte que *la longitude Géographique d'un lieu est mesurée par l'arc de l'équateur compris depuis le premier méridien, & compté d'occident en orient jusqu'à la rencontre du méridien terrestre qui passe par ce lieu, & la latitude Géographique de ce même lieu est un arc de grand cercle qui mesure la distance de l'équateur au parallele qui passe par ce lieu-là*; ou, ce qui est la même chose, *c'est l'arc du méridien de ce lieu compris entre ce lieu même & l'équateur.* D'où il suit que *la latitude Géographique d'un lieu est le complément de sa distance au pole.*

ARTICLE VII.

Des hauteurs du Soleil & de toutes leurs variétés.

926. A Mesure qu'en vertu du mouvement diurne un point de la surface de la planete décrit sa route

---

(g) M. d'Anville dans ses excellentes Cartes de Géographie suppose le premier méridien à 20° de Paris; mais les navigateurs françois comptent du méridien de Paris à l'orient & à l'occident.

elliptique vue du ſoleil, il eſt évident, I°, que ce point en s'approchant du méridien céleſte P S Q, s'approche auſſi du lieu S du ſoleil : par exemple, lorſque ce point eſt ſur le bord du diſque éclairé, & que par conſéquent il ſe leve ou qu'il ſe couche, l'arc de ſa diſtance au point S eſt repréſenté par un rayon de l'hémiſphere éclairé, il eſt donc de 90°. Après ſon lever il s'approche de plus en plus du méridien P S Q, & par conſéquent du ſoleil, en ſorte que lorſqu'il eſt arrivé ſous le méridien céleſte, il eſt le plus près du point S qu'il eſt poſſible d'en approcher ce jour-là. Car les routes réelles des taches étant des petits cercles du globe dont les poles ſont P, Q, ces routes coupent perpendiculairement tous les grands cercles qui paſſent par les poles P, Q; elles coupent donc auſſi perpendiculairement le méridien céleſte P S Q. Donc lorſqu'une tache eſt arrivée à ce méridien, ſa diſtance au lieu S du ſoleil eſt un arc du cercle P S Q mené du point S perpendiculairement ſur la route de cette tache; donc cet arc eſt la plus petite diſtance qu'il eſt poſſible du point S à la route actuelle de la tache; donc lorſque la tache eſt au méridien, elle eſt le plus près qu'il eſt poſſible ce jour-là du lieu du ſoleil S.

927. II°, En ſuppoſant un habitant de la planete toujours debout, c'eſt-à-dire, tellement ſitué que la droite qui va de ſa tête à ſes pieds (& qu'on appelle *ligne verticale*, *ligne à plomb*) ſoit toujours dirigée perpendiculairement à la ſurface de la planete; ſi dans cette ſituation il compare la poſition des objets qu'il voit, à la poſition de cette verticale, ou plutôt au plan qui coupe perpendiculairement, la ligne verticale au point où elle paſſe par ſon œil, (on appelle ce plan *un plan horizontal*, *un plan de niveau*, & il eſt évident qu'à cauſe du peu d'élévation de l'œil au-deſſus de la ſurface de la planete, on peut concevoir ce plan comme un plan tangent au globe de la planete au point où eſt placé l'œil du ſpectateur) : ſi enfin cette comparaiſon ſe fait par les angles formés à l'œil entre ce plan de niveau & la droite tirée de l'œil à l'objet qu'on regarde, en appellant *degrés de hauteur*, ceux des arcs qui meſurent

ces angles : dans cette ſuppoſition, le ſoleil doit paroître s'élever & s'abaiſſer, à meſure que le point de la ſurface de la terre où eſt cet habitant s'approche ou s'éloigne du lieu S du ſoleil. De ſorte que *la hauteur du ſoleil doit toujours paroître égale au complément de cette diſtance, à très-peu près.* Car ſoit en E (fig. 89) la poſition de l'œil d'un habitant de la planete, E Z ſa ligne verticale, E N une droite qui repréſente le plan horizontal ou de niveau; ſoit en S le lieu où répond le centre du ſoleil qui, eu égard à la petiteſſe du diametre de la planete, en eſt comme infiniment éloigné dans la direction C S *s*; ſoit l'arc E S, diſtance de l'œil E au milieu S de l'hémiſphere éclairé, de 90°, (auquel cas (883) le point E ſe leve ou ſe couche par rapport au ſoleil), alors l'angle E C S étant droit, la ligne C S *s* tirée du centre de la planete au ſoleil, eſt parallele au plan de niveau E N : ſi donc du point E on tire une droite E *s* qui ſoit dirigée au centre du ſoleil, qui eſt à une très-grande diſtance, cette droite ne rencontrera la droite C S *s* qu'à une très-grande diſtance du centre de la terre : donc les deux droites C S *s*, E *s* ſont à très-peu près paralleles; or la ligne de niveau E N étant perpendiculaire à C E eſt parallele à la ligne C S *s*, donc la droite E *s* tirée de l'œil au ſoleil eſt à très-peu près couchée ſur le plan de niveau E N, donc la hauteur du ſoleil paroît comme nulle, lorſque la diſtance du ſpectateur au milieu de l'hémiſphere éclairé eſt de 90°. Soit maintenant l'œil du ſpectateur arrivé en *e*, à la diſtance *e s* du lieu S où répond le ſoleil : alors ſa ligne verticale eſt *e z*, & la ligne de niveau *e n*, & ſoit l'arc *e* S de 40°. Ayant tiré du point *e* une droite *e s* qui aboutiſſe au centre du ſoleil, laquelle eſt par conſéquent à très-peu près parallele à la droite C S *s* l'angle de la hauteur du ſoleil doit être meſuré par l'angle *n e s*, dont le complément eſt *s e z*, de 50°. Or à cauſe des droites C S *s*, *e s*, preſque paralleles, les angles *s e z*, *e* C S ſont à très-peu près égaux; donc la meſure de l'angle *s e n* de la hauteur du ſoleil, eſt à très-peu près le complément de l'arc *e* S de la diſtance du ſpectateur au milieu de l'hémiſphere éclairé de la planete.

928. REMARQUE. L'angle d'inclinaiſon des droites E*s*, *es* tirées de la ſurface de la planete au centre du ſoleil, ſur la droite CS*s* tirée du centre de la planete au centre du ſoleil, s'appelle *la parallaxe du ſoleil*; on en a parlé ailleurs (645); & cette parallaxe, lorſqu'elle eſt la plus grande eſt (626) égale à l'angle ſous lequel le demi-diametre de la planete eſt vu du ſoleil : or le plus grand de ces angles n'eſt que de 18 à 19''; c'eſt (*pag.* 110) le demi-diametre de Jupiter. On peut donc le négliger & ſuppoſer toujours que toutes les droites tirées des points quelconques de la planete au ſoleil, ſont paralleles entr'elles, & qu'ainſi la hauteur du ſoleil vu de la planete, eſt le complément de la diſtance de l'œil du ſpectateur au point du milieu de l'hémiſphere éclairé.

929. III°, Cela poſé, quand un point de la ſurface de la planete eſt ſous le méridien céleſte PSQ, (fig. 81 & *ſuiv.*) l'arc de la diſtance du lieu du ſpectateur à l'équateur, & l'arc de la diſtance du lieu S du ſoleil à l'équateur, ſe meſurent ſur le même cercle PSQ. Donc ſi ces deux lieux ſont du même côté par rapport à l'équateur, la différence de leurs arcs de diſtance à l'équateur donnera leur diſtance mutuelle; mais ſi l'un eſt d'un côté de l'équateur, & l'autre de l'autre côté, leur diſtance mutuelle ſera égale à la ſomme de leurs arcs de diſtance à l'équateur, c'eſt-à-dire, à la ſomme de la latitude géographique du lieu ſur la planete & de la déclinaiſon du ſoleil. Et de-là on tirera facilement les raiſons de toutes les apparences des ſaiſons & des inégalités des jours & des nuits, de celles des hauteurs méridiennes du ſoleil; puiſque tous ces phénomenes ne dépendent que de la combinaiſon de la déclinaiſon du ſoleil, avec la diſtance du ſpectateur à l'équateur de la planete.

930. IV°, Parce que les petits axes de toutes les ellipſes décrites par les taches de la planete, ſont dans le plan du méridien céleſte PSQ, il ſuit qu'à égale diſtance de part & d'autre de ce méridien les arcs d'une même ellipſe ſont égaux & poſés de la même maniere, & par conſéquent les diſtances d'une même tache au point S du milieu de l'hémiſphere éclairé, ſont égales en temps égaux avant & après

le passage de la tache par le méridien, ou ce qui est la même chose, la hauteur du soleil doit paroître la même à intervalles de temps égaux avant & après midi : ce qui donne lieu d'observer sur la planete les temps vrais (471).

Article VIII.

Détermination Géométrique & Trigonométrique des Phénomenes précédents.

931. Probleme I. *Etant données la déclinaison du soleil & la latitude Géographique d'un point pris sur la surface d'une planete, décrire géométriquement l'ellipse de son parallele, & déterminer les lieux où ce point se trouve à chaque heure du jour ou de la nuit.*

932. Solution. Soit le cercle EZCR (fig. 90) qui représente le disque éclairé, EC l'axe de l'écliptique ; ayant déterminé (911) la position P d'un des poles, tirez le diametre MPSQ qui est la projection du méridien, sur lequel prenez les parties SF égale au sinus de la latitude géographique, SI égale au sinus de la différence entre la latitude géographique & la déclinaison donnée, & SN égale au sinus de leur somme ; (ce qui se fait facilement en prenant de part & d'autre du point M les arcs MT égaux au complément de la latitude géographique, & les arcs TD, TR égaux à la déclinaison du soleil, puis en tirant TT, RR, DD) ; & vous aurez TFT, qui est le diametre du parallele du point donné, pour la mesure du grand axe de l'ellipse (523), & IN pour celle du petit axe ; car (929) quand la déclinaison est de même dénomination que la latitude géographique, le lieu du point donné est en I, à midi sur le disque éclairé ; & quand la déclinaison est de différente dénomination, le lieu du point donné est à midi en N. Ainsi dans le premier cas, N est le lieu du point donné à minuit derriere le disque, & dans le second I est son lieu à minuit. Cela posé, du point V milieu de IN, décrivez deux cercles dont les rayons soient

l'un VN, & l'autre égal à FT, diviſez-les de 15 en 15 degrés en commençant par le méridien MQ, & vous aurez (530) une ellipſe qui ſera la projection demandée, & diviſée de ſorte que le point donné ſe trouvera à chaque heure aux endroits marqués. Et ſi la déclinaiſon eſt de même dénomination que la latitude géographique, la partie infériere de l'ellipſe compriſe entre les deux points vers T où elle touche le bord du diſque, exprimera tout le temps que le ſoleil ſera viſible, ou la longueur du jour, & la partie ſupérieure exprimera la durée de la nuit. Ce ſera le contraire ſi la déclinaiſon eſt de différente dénomination. Ainſi les points de contact de l'ellipſe & du bord du diſque montreront l'heure du lever ou du coucher du ſoleil par rapport au point donné. L'ordre des heures du jour eſt d'Occident en Orient, parce que l'hémiſphere éclairé de la planete tourne en ce ſens par rapport au ſoleil.

933. REMARQUE. On pourroit déterminer graphiquement ſur cette eſpece de projection, toutes les circonſtances des phénomenes du mouvement diurne; mais nous n'entrerons pas dans ce détail, parce que le calcul par la Trigonométrie ſphérique eſt beaucoup plus ſuſceptible de préciſion. Ainſi nous allons montrer comment on doit trouver ſur le diſque éclairé les triangles ſphériques néceſſaires, en traçant groſſiérement une figure pour guider ſeulement dans le calcul.

934. PROBLEME II. *Etant données trois de ces quatre choſes : 1°, La latitude géographique d'un point quelconque ſur une planete, comme, par exemple, ſur la terre ; 2°, La déclinaiſon du ſoleil ; 3°, Un inſtant quelconque de temps vrai compté à l'endroit où ce point eſt ſitué ; 4°, La hauteur du ſoleil vu de ce point ; trouver la quatrieme, par le calcul trigonométrique.*

935. I. CAS. Quand la latitude géographique & la déclinaiſon du ſoleil ſont de différente dénomination. Soit la latitude géographique 48° 51′ boréale, la déclinaiſon du ſoleil 13° 18′ auſtrale, le temps donné trois heures avant midi. Décrivez un cercle EICR (fig. 92) qui repréſente le diſque éclairé, marquez-y les deux poles E, C de l'é-

cliptique; & parce que la déclinaiſon du ſoleil eſt auſtrale, tirez vers C une droite GH qui marque à-peu-près la route du pole antarctique, qui eſt alors éclairé, placez-y le pole antarctique en un point Q à-peu-près à 13 degrés du bord du diſque; ayant mené par Q & par S le cercle QS*g*M qui repréſente le méridien céleſte, il faut à la diſtance Q*g* de 90° décrire l'équateur T*g*R; & plus loin, à la diſtance *g*M de 48° 51′, décrire le parallele IMLV qui repréſente la trace du point donné ſur le diſque éclairé. Le point T de l'équateur eſt vers l'endroit où les points de la terre ſe couchent, & le point R vers leur levant. On prendra ſur l'arc *g*R de l'équateur un arc *g*O de 45°, à commencer du méridien *g* en allant vers l'occident, parce que le temps donné eſt trois heures avant midi, & que $3^h = 45°$. Par le pole Q & par le point O on tracera un arc de grand cercle QOL qui coupera en L le parallele ou la route IMLV du point donné, ce point L repréſente le vrai lieu du point donné ſur le diſque éclairé à l'inſtant donné. Enfin par le centre S & par L on menera le quart de grand cercle SLN, & l'arc LN meſurera la diſtance du point donné L au bord de l'hémiſphere éclairé, ou ce qui eſt la même choſe, (927) la hauteur à laquelle le centre du ſoleil paroît lorſqu'il eſt vu du point L. Cela poſé, dans le triangle ſphérique SQL le côté SQ eſt égal à la diſtance du ſoleil au pole, ou au complément de la déclinaiſon du ſoleil S*g*; ainſi SQ eſt de 76° 42′. L'arc QL eſt égal à QO de 90° + OL de 48° 51′: Ainſi cet arc QL eſt de 138° 51′, l'angle SQL au pole eſt meſuré par l'arc *g*O de 45°, le côté SL eſt la diſtance du ſoleil au zénith; connoiſſant donc trois de ces quantités, il eſt facile de calculer la quatrieme. On trouvera, par exemple, SL de 73° 47′, & par conſéquent LN de 16° 13′.

936. II. CAS. Quand la latitude géographique & la déclinaiſon du ſoleil ſont de même dénomination. Soit la premiere de 48° 51′ boréale, & la déclinaiſon de 13° 18′ boréale. Soient de même l'inſtant donné 3 heures avant midi; on demande la hauteur du ſoleil. Il faut décrire un cercle ECT (fig. 93) qui repréſente le diſque éclairé, S

le lieu du soleil, E, C les poles de l'écliptique. A cause de la déclinaison boréale, le pole boréal de l'équateur est éclairé, sa route autour du pole E est APB, & son lieu aux environs du point P. Le méridien céleste est PS*g*, l'équateur est T*g*R éloigné de 90° du pole P, & le parallele du lieu donné est IMLV éloigné de l'équateur de 48° 51′. Ayant pris de même *g*O de 45° sur l'équateur à l'Occident & mené PLO, son intersection avec le parallele IMLV donne le point L où se trouve le lieu donné à l'instant marqué; ayant donc mené SLN, l'arc LN est la hauteur du soleil. On la trouve de même par le moyen de son complément SL, qui est un côté du triangle sphérique PSL, dans lequel on connoît PL de 41° 9′, complément de LO distance du parallele du lieu L à l'équateur, on connoît SP de 76° 42′ complément de S*g* déclinaison du soleil, on connoît enfin l'angle SPL de 45° mesuré par l'arc *g*O; on aura donc SL de 51° 14′ $\frac{1}{2}$, & par conséquent la hauteur du soleil LN de 38° 45′ $\frac{1}{2}$.

937. 3°. On peut, par le moyen des calculs de ces triangles, trouver à quelle heure le soleil paroît se lever ou se coucher pour un lieu dont la latitude géographique soit donnée, & pour une déclinaison donnée du soleil; car dans les mêmes triangles QSL ou PSL, l'arc SL doit être alors de 90°, c'est-à-dire, les points N & L doivent être confondus : l'arc QS ou PS est connu, étant le complément de la déclinaison australe ou boréale : l'arc QL ou PL est aussi connu par la latitude géographique du lieu : il ne s'agit donc que de calculer quel est alors l'angle SQL ou SPL, lequel étant réduit en temps à raison de 24 heures pour 360°, donnera l'intervalle de temps entre l'instant auquel le lieu est sur le bord du disque éclairé, & celui auquel il est dans le méridien. On appelle cet intervalle l'*arc semi-diurne*.

938. Ainsi on trouvera (fig. 92) que l'angle SQL est de 74° 18′, ou de 4^h 57′ 12″ de temps, & l'angle SPL (fig. 93) de 110° 28′, ou de 7^h 21′ 52″ de temps. Le double de l'arc semi-diurne donne évidemment le temps de la demeure du lieu sur le disque éclairé pendant une révolution diurne de la terre.

ARTICLE IX.

Remarques sur la Théorie précédente.

939. TOUT ce qu'on a dit jusqu'ici des routes elliptiques des taches des planetes, n'est vrai que sensiblement; car, 1°, à cause que les planetes s'avancent continuellement dans leur orbite en vertu de leur mouvement annuel, ces routes sont réellement des épicycloïdes, & parce qu'elles sont vues obliquement, leurs projections sont des épicycloïdes elliptiques. 2°, A cause du petit axe de ces ellipses qui s'allonge ou qui se raccourcit toujours, ces courbes sont des especes de spirales elliptiques. Ainsi, absolument parlant, la courbe qui représente la route d'une tache vue du soleil est très-composée, puisqu'elle résulte de la complication de trois mouvements qui se font dans des plans différens; savoir, du mouvement annuel de la tache commun avec celui de la planete, dans un plan parallele au plan de l'écliptique, de son mouvement diurne dans le plan parallele au plan de son équateur, & du mouvement annuel apparent & conique qui lui est procuré par le mouvement conique de l'axe de l'équateur autour de celui de l'écliptique. Cependant dans la pratique on suppose que cette courbe est une vraie ellipse pour un temps assez court, comme pendant quelques heures, parce que la vîtesse angulaire du mouvement diurne est très-grande, en comparaison de celle des deux autres mouvements.





CINQUIEME SECTION,

Qui contient la troisieme Partie de l'Astronomie Solaire ;

OU

L'explication des mouvements des Planetes du second ordre vues du Soleil.

940. POUR établir quelque chose de certain sur les loix des mouvements des planetes du second ordre ou satellites, il faut, comme dans les recherches précédentes, établir des faits, & en tirer les inductions les plus conséquentes qu'il est possible. Ainsi l'observateur que nous supposerons toujours placé dans le soleil, ayant considéré attentivement les satellites de Saturne, de Jupiter (*h*), & celui de la terre, qui gardera le nom particulier de *Lune*, il fera les remarques suivantes.

941. PHENOMENE I. *Les satellites de Saturne, de Jupiter & de la Terre, sont alternativement à l'Orient, puis à l'Occident de leur planete, en s'en éloignant successivement d'un côté, & de l'autre ; chacun étant arrivé dans sa plus grande digression, se trouve autant éloigné d'un côté, qu'il étoit éloigné de l'autre, & il emploie toujours un intervalle de temps à très-peu près égal, à retourner à la même digression du même côté.* La Table suivante indique les temps de ces retours, & la quantité des plus grands écarts des satellites par rapport au centre de leur planete.

(*h*) Les satellites de Jupiter furent découverts par Galilée en 1610, ceux de Saturne, par Huygens & Cassini, en 1655 & 1684, mais ceux-ci ne se voyent que très-difficilement, & les Astronomes n'en font aucun usage, au-lieu que les satellites de Jupiter ont été extrêmement utiles pour la Géographie.

	Révolutions Synodiques, ou temps employés par chaque satellite à retourner dans la digression du même côté.				*Plus grande digression orientale & occidentale du satellite, mesurée en demi-diametre de sa Planete principale.*
	jours	heu.	min.	sec.	(i)
Ceux de Saturne.	1	21	18	27.	$8\frac{7}{8}$
	2	17	41	22.	$11\frac{1}{4}$
	4	12	25	12.	15
	15	22	41	14.	36
	79	7	48	0.	108
Ceux de Jupiter.	1	18	28	36.	$5\frac{2}{3}$
	3	13	18	52.	9
	7	3	59	40.	$14\frac{1}{3}$
	16	18	5	6.	$25\frac{1}{3}$
La Lune	29	12	44	3.	$60\frac{1}{5}$

942. Ce sont ces écarts & ces temps qui doivent servir à distinguer les satellites les uns des autres : ainsi on appellera *le premier satellite* de Saturne ou de Jupiter, celui qui s'éloigne le moins, & qui met moins de temps à faire sa révolution ; *le second*, celui qui s'en écarte le moins après le premier ; & ainsi de suite.

943. Il suit de ce phénomene, que *quelle que soit l'orbite des satellites, elle est rentrante*, comme un cercle ou une ellipse ; & que *la planete principale est dans celui de ses diametres dont la direction tend au soleil.* Car si cela n'étoit pas, les digressions occidentales des satellites ne seroient pas égales aux digressions orientales.

944. PHENOMENE II. *En allant de la digression occidentale à l'orientale, tous les satellites sont souvent cachés par le disque de la planete, derriere lequel ils passent par conséquent : quelquefois cependant il y en a qui passent au-dessus ou au-dessous ; mais ils ne passent jamais sur le disque de la planete.* Au contraire, *en allant de la digression orientale à la digression occidentale, ils ne passent jamais derriere le disque de la planete ; mais ils passent tous sur le*

(i) Il ne faut prendre que la moitié de ces nombres, l'Auteur a employé par méprise les diametres des orbites, au-lieu des simples distances à Saturne.

premier cas, ou bien ceux qui avoient passé au-dessus, passent au-dessous, & réciproquement.

945. Ce Phénomene établit trois faits. 1°, *Les satellites des planetes vont tous dans le même sens.* 2°, *La planete principale est en-dedans de leur orbite*, ou ce qui est la même chose, *ils tournent autour de leur planete principale.* 3°, *Les plans des orbites des satellites sont inclinés au plan de l'orbite de la planete principale.*

946. Car 1°, Si les satellites n'alloient pas tous dans le même sens, les uns devroient passer sur le disque de la planete en allant de la digression occidentale à l'orientale, & les autres derriere.

947. 2°, Si l'orbite d'un satellite étoit toute entiere au-de-là de la planete par rapport au soleil, il ne passeroit jamais sur le disque de la planete; & si elle étoit toute entiere en-deçà, il ne passeroit jamais derriere le disque.

948. Il faut donc distinguer dans la révolution des satellites, deux conjonctions avec la planete, l'une qui se fait au-delà de la planete par rapport au soleil, & dans le passage de la digression occidentale à la digression orientale; elle s'appelle *Conjonction supérieure*; & l'autre qui se fait en-deçà de la planete dans le passage de la digression orientale à l'occidentale, & qui s'appelle *Conjonction inférieure*. On appelle de même *demi-cercle supérieur* d'un satellite, la partie de son orbe comprise entre les deux points de ses digressions occidentale & orientale, & où se fait la conjonction supérieure : & *demi-cercle inférieur*, la partie où se fait la conjonction inférieure.

949. 3°, Si les plans des orbites des satellites étoient paralleles au plan de l'orbite de la planete principale, ces plans étant prolongés passeroient par le soleil, puisque le plan de l'orbite de chaque planete y passe, & par conséquent tous les satellites devroient toujours paroître parcourir une ligne droite (871) dans la direction du diametre de la planete par où le plan de son orbite la coupe; donc ils ne devroient jamais passer au-dessus ni au-dessous du centre de la planete lorsqu'ils sont en conjonction avec elle.

950. Une autre conséquence de ce phénomene est, que
si

ſi les planetes & les ſatellites n'ont d'autre lumiere que celle du ſoleil; un ſatellite en paſſant devant le diſque de ſa planete dans ſa conjonction inférieure, doit cacher le ſoleil aux habitants de la planete qui ſe trouvent au-deſſous de ſa route, ou, ce qui eſt le même, il les doit couvrir de ſon ombre; donc il doit former une *éclipſe de ſoleil*, par rapport à ces habitans. Et lorſque dans ſa conjonction ſupérieure il paſſe derriere le diſque de ſa planete, il doit ceſſer d'être éclairé par le ſoleil; il doit par conſéquent ſe plonger dans l'ombre de la planete, & n'être plus viſible pendant toute le temps qu'il reſte dans cette ombre, ce qui doit former une *éclipſe de ſatellite ou de lune.*

951. PHENOMENE III. *Les routes de chaque ſatellite étant rapportées au centre de leur planete, paroiſſent quelquefois toutes rectilignes, paſſant par le centre de la planete, & inclinées d'un certain ſens ſur ſon orbite. Auſſitôt après elles commencent à ſe former en ellipſes qui deviennent de plus en plus ouvertes, & dont les grands axes tendent au paralléliſme avec le plan de l'orbite, ce qui dure pendant un quart de la révolution annuelle de la planete; ce quart étant révolu les conjonctions ſupérieures ſe font au Nord du centre de la planete, & les conjonctions inférieures au Sud: après cela pendant un ſecond quart de révolution ces ellipſes ſe retreciſſent, leurs grands axes s'inclinent dans un ſens oppoſé au premier, les ſatellites paſſent plus près du centre dans leurs conjonctions, de ſorte qu'à la fin du ſecond quart de révolution, toutes ces ellipſes ſont devenues des droites inclinees de la même quantité, mais du ſens oppoſé au précédent. Enſuite elles s'elargiſſent de nouveau en ellipſes pendant le troiſieme quart de revolution, les conjonctions ſupérieures ſe font au ſud du centre, & les inférieures au nord; enfin pendant le quatrieme quart de révolution elles ſe rétreciſſent, & tout ſe remet dans ſon premier état, lorſque la plaente eſt retournée dans le même point de ſon orbite. Il faut cependant en excepter la lune, dont la route change de phaſe de 86 jours en 86 jours, c'eſt à dire, dans un intervalle moindre d'environ 5 jours, que le quart de la*

révolution annuelle de la terre; de ſorte que l'orbite de la lune redevient rectiligne pour la ſeconde fois, lorſque la terre a encore 19° 20' à parcourir pour achever ſa révolution.

952. Ce phénomene eſt cauſé par l'obliquité des plans des orbites des ſatellites ſur celui de leur planete, d'où l'on voit que les routes des ſatellites doivent avoir préciſément les mêmes apparences que les taches des planetes, & qu'on en doit tirer les mêmes concluſions. Ainſi....

953. 1°, Quand la route d'un ſatellite paroît rectiligne, l'œil de l'obſervateur, c'eſt-à-dire, le ſoleil, ſe trouve (902) dans le plan de l'orbite de ce ſatellite, & parce que le ſoleil eſt toujours dans le plan de l'orbite de la planete (33), le ſoleil eſt donc alors dans la ligne d'interſection de ces deux plans. Mais (574) le ſoleil vu de la planete paroît toujours dans le point du Ciel qui eſt diamétralement oppoſé à celui où eſt la planete; donc la route d'un ſatellite vue du ſoleil eſt rectiligne, & paroît paſſer par le centre de la planete, quand la planete vue du ſoleil eſt dans la ligne d'interſection du plan de ſon orbite avec le plan de l'orbite de ſon ſatellite.

954. La droite d'interſection du plan de l'orbite d'un ſatellite, avec le plan de l'orbite de ſa planete, s'appelle *la ligne des nœuds*, & on appelle, *nœud aſcendant du ſatellite*, le point au-delà duquel les conjonctions ſupérieures vont commencer à ſe faire au nord du centre de la planete, & *nœud deſcendant*, le point au-delà duquel les conjonctions ſupérieures commencent à ſe faire au ſud du centre de leur planete.

955. 2°, L'inclinaiſon de ces droites fait connoître celle du plan de l'orbite de chaque ſatellite, avec le plan de l'orbite de la planete (909).

956. 3°, On connoît que tous les ſatellites d'une même planete ſont dans un même plan, & ont un même nœud, ſi leurs routes ſont toutes à la fois rectilignes, paſſant par le centre, & également inclinées : on connoîtra, au contraire, que leurs plans, leurs nœuds & leurs inclinaiſons ne ſont pas les mêmes par les différentes inclinaiſons de

ces routes rectilignes, & par les différents points où la planete se trouvera dans son orbite, lorsqu'elles se trouveront rectilignes.

957. C'est ainsi qu'on peut déterminer, que la ligne droite que la lune paroît décrire, est inclinée sur le plan de l'écliptique d'environ 5 degrés 9 minutes, ce qui mesure l'inclinaison du plan de l'orbite de la lune avec le plan de l'écliptique : & que le nœud de la lune rétrograde tous les ans de 19° 20', parce que lorsque la terre acheve sa révolution annuelle, elle se trouve éloignée de 19° 20' du point, où la trace de la lune vue du soleil paroissoit rectiligne lorsque cette révolution a commencé.

958. On trouve de même que le nœud ascendant des cinq satellites de Saturne, est vers 20° ♒, en comptant depuis la premiere étoile du Bélier, parce que les routes de tous ces satellites sont rectilignes, lorsque Saturne est dans 20° ♒; & que les plans des orbes des quatre premiers sont inclinés sur celui de ♄ d'environ 30°, & celui du cinquieme d'environ 15°; de sorte que depuis 20° ♒ jusqu'à 20° ♌, les conjonctions supérieures se font au nord du centre de Saturne. Que le nœud ascendant des satellites de Jupiter est dans 15° ♑, & l'inclinaison de leurs orbites d'environ 2° 55'. Qu'enfin, ces nœuds & cette inclinaison sont à peu-près constans, parce que les mêmes phases reviennent environ dans les mêmes points des orbites de Saturne & de Jupiter.

959. REMARQUE. On verra par l'explication physique de la théorie de la lune, (Sect. VI, Chap. I, Art. VI.) que la ligne des nœuds des satellites ne peut être fixe, ni leur inclinaison constante ; aussi y a-t-on observé des inégalités sensibles, sur quoi on peut consulter les différents Mémoires de MM. Maraldi dans les Recueils de l'Académie Royale des Sciences (*k*).

960. 4°, Lorsque l'orbe d'un satellite embrasse de fort près le corps de la planete principale, & que le plan de cet

---

(*k*) Et sur la cause de leurs dérangemens, ou sur leurs attractions réciproques, la piece de M. de la Grange qui a remporté le prix de l'Académie, en 1766, & l'Ouvrage de M. Bailly, publié la même année.

orbe eſt très-peu incliné au plan de l'orbite de la planete principale, il eſt clair que dans toutes les conjonctions inférieures, ce ſatellite doit cacher au ſoleil une partie de la ſurface de la planete, & par conſéquent il doit cacher ſucceſſivement le ſoleil, & jetter ſon ombre ſur tous les points de cette ſurface qui ſe trouvent dans la route de cette ombre, ce qui doit y cauſer une *éclipſe de ſoleil*. Et dans toutes les conjonctions ſupérieures, ce ſatellite doit traverſer l'ombre de la planete, & par conſéquent s'éclipſer.

961. 5°, Mais pour peu que l'orbe d'un ſatellite ſoit incliné ſur le plan de l'orbite de ſa planete, ſi cet orbe eſt fort grand, comme ſont ceux du quatrieme & cinquieme ſatellite de Saturne, celui du quatrieme ſatellite de ♃, & celui de la lune; il eſt évident que dans les conjonctions qui ſe font loin des nœuds, c'eſt-à-dire, lorſque les routes apparentes de ces ſatellites, ſont devenues des ellipſes aſſez élargies, pour que leur petit axe excede le diametre de la planete, le ſatellite dans ſes conjonctions inférieures ne cache au ſoleil aucune partie de la planete, & par conſéquent il n'y a pas d'éclipſe de ſoleil; & dans les conjonctions ſupérieures le corps de la planete ne cache pas le ſatellite au ſoleil, & par conſéquent il n'y a pas d'éclipſes de ſatellites ou de lune : ainſi *les éclipſes n'arrivent que lorſque les ſyzygies ſe font près des nœuds des orbites de ces ſatellites.*

962. Si donc la planete eſt préciſément dans un des nœuds à l'inſtant d'une conjonction inférieure, l'éclipſe de ſoleil paſſe par le milieu du diſque de la planete; & dans la conjonction ſupérieure, le ſatellite paſſe par l'axe du cône d'ombre de la planete.

963. Plus la planete eſt loin du nœud, plus l'ombre du ſatellite paſſe loin du centre du diſque éclairé de la planete dans ſes conjonctions inférieures, & plus le ſatellite paſſe loin du centre de l'ombre de la planete dans les conjonctions ſupérieures.

964. Lorſque la planete n'eſt qu'un peu en-deçà des points de ſon orbite où les conjonctions des ſatellites éloignés ne ſont plus écliptiques, (on appelle ces points *les*

limites des éclipſes) alors il n'y a qu'une partie du corps du ſatellite, qui dans les conjonctions inférieures cache une partie de la ſurface de la planete ; & dans les conjonctions ſupérieures, il n'y a qu'une partie du ſatellite qui entre dans l'ombre de la planete, & cette partie eſt d'autant plus petite que la planete eſt plus près des limites. Les éclipſes de cette eſpece s'appellent éclipſes *partiales*, & les autres *totales*. Ainſi *près des nœuds les éclipſes ſont totales, près & en-deçà des limites les éclipſes ſont partiales.*

965. On voit encore que dans les conjonctions inférieures écliptiques, le ſoleil n'eſt éclipſé qu'à l'égard des points du diſque de la planete, qui ſont préciſément ſous la trace de l'ombre du ſatellite : ſi donc la planete eſt un peu groſſe par rapport au ſatellite, les habitants qui ſont ſitués ſur les points de ſa ſurface éloignés de la ſection du globe de la planete par le plan de ſon écliptique, ne doivent voir le ſoleil éclipſé, que lorſque ce ſatellite eſt un peu éloigné du plan de l'écliptique de la planete, du côté où ces habitants ſont ſitués. Dans ce cas, les habitants qui ſont placés de l'autre côté de l'écliptique, ne doivent pas voir d'éclipſe de ſoleil. Donc *à l'égard des habitants de la planete qui ſont ſitués vers les poles, l'éclipſe de ſoleil n'arrive que lorſque le ſatellite a un peu de latitude de même dénomination que la hauteur du pole de ces habitants.* C'eſt ainſi qu'à Paris, dont la hauteur du pole eſt de 48° 51′ vers le nord, les éclipſes de ſoleil ne ſont conſidérables, que lorſque la lune en conjonction, a 30 ou 40 minutes de latitude ſeptentrionale.

966. Au contraire, dans les conjonctions ſupérieures écliptiques, lorſque le ſatellite ſe plonge dans l'ombre, ſa lumiere paroît s'effacer, de quelque point du monde qu'il ſoit vu ; ainſi il ne ſe peut faire qu'un ſatellite paroiſſe éclipſé aux uns & non éclipſé aux autres. On peut donc dire que *les éclipſes de lune ou de ſatellites ſont univerſelles, mais que les éclipſes de ſoleil ne ſe font qu'à l'égard de quelques habitants de la planete principale.*

967. Dans les éclipſes de ſoleil on conçoit que le corps du ſatellite vu de ſa planete, peut ne paroître pas ſi gros,

qu'il cache le ſoleil tout entier à un ſpectateur, mais ſeulement qu'il n'en cache qu'une partie vers le centre, enſorte que les bords du ſoleil paroiſſent tout autour formant un anneau lumineux. On appelle cette ſorte d'éclipſe *une éclipſe annulaire*. Mais ſi le ſatellite paroiſſoit aſſez gros pour couvrir le ſoleil tout entier par rapport à un habitant de la planete principale, l'éclipſe s'appelleroit ſimplement *totale*.

968. On conçoit enfin, qu'une éclipſe de ſoleil ne ſe faiſant que par l'interpoſition ſucceſſive du corps du ſatellite entre la planete & le ſoleil, laquelle occaſionne une trace de l'ombre du ſatellite, qui couvre ſucceſſivement différents points du diſque éclairé de la planete : 1°, L'éclipſe doit paroître commencer à l'égard d'un ſpectateur, lorſque le ſatellite, par ſon mouvement, s'eſt tellement approché du lieu où l'on voit le ſoleil dans le ciel, que la diſtance du centre du ſatellite au centre du ſoleil, paroiſſe égale à la ſomme des angles, ſous leſquels le ſpectateur voit les demi-diametres du ſatellite & du ſoleil; & cette éclipſe finit à l'égard du même ſpectateur, lorſque le centre du ſatellite, en s'éloignant de celui du ſoleil paroît à la même diſtance. 2°, Elle doit donc paroître commencer à l'égard d'un ſpectateur placé dans un endroit de la ſurface de la planete, tandis qu'à l'égard d'un autre, elle peut paroître au milieu, ou même à ſa fin, & que dans un autre endroit, elle n'eſt pas encore près de ſon commencement. 3°, Les habitants qui ſe trouvent ſur les bords intérieurs de la route de l'ombre du ſatellite, ne doivent voir l'éclipſe totale que pendant un inſtant, au lieu que ceux qui y ſont plus enfoncés, la voyent totale plus long-temps. 4°, Ceux qui ſont vers le bord extérieur de l'ombre, ne doivent voir qu'une partie du ſoleil éclipſée, d'autant plus petite qu'ils ſont plus loin de ce bord, parce qu'alors il n'y a qu'une partie du corps du ſatellite qui leur cache le ſoleil, en ſorte qu'à une certaine diſtance du bord de l'ombre on ne voit aucune éclipſe : ainſi *une même éclipſe de ſoleil peut paroître totale dans un endroit, partiale dans un autre; dans un endroit, elle peut paroître vers la partie ſeptentrionale du diſque du ſoleil; & dans un autre, vers la partie auſtrale.*

969. Au contraire, dans les éclipſes de ſatellites, à meſure que le ſatellite s'enfonce dans l'ombre, les différentes parties de ſon diſque ceſſent d'être éclairées, & par conſéquent d'être viſibles, tous les ſpectateurs qui peuvent voir le ſatellite, le voient en même-temps s'y enfoncer de la même maniere, totalement ſi l'éclipſe eſt totale, en partie ſeulement ſi l'éclipſe eſt partiale; en général, *deux obſervateurs ne doivent voir aucune différence dans les phaſes d'une éclipſe de lune ou de ſatellite, en quelque endroit de la ſurface de la planete qu'ils ſoient ſitués, pourvu que le ſatellite ſoit viſible à tous deux.*

970. Il ſuit delà que les obſervations des temps des phaſes des éclipſes de ſatellites ſont très-propres à déterminer immédiatement les différences des méridiens des lieux où les obſervations ont été faites: mais que les obſervations des temps des phaſes des éclipſes de ſoleil, ne peuvent donner ces différences ſans y faire des réductions. Ceci ſera expliqué plus en détail dans la ſuite.

971. Il faut cependant remarquer que le mouvement de la lumiere, qui n'eſt pas inſtantané, doit être cauſe que la même phaſe d'une éclipſe vue de différents points de l'univers, doit paroître arriver d'autant plus tard, que l'œil de l'obſervateur eſt plus éloigné de la planete ou de ſon ſatellite. On obſerve en effet que, toutes choſes d'ailleurs égales, les éclipſes des ſatellites de Jupiter obſervées de deſſus la terre, arrivent plus tard d'environ 8 minutes de temps, lorſque Jupiter eſt près de ſes quadratures avec le ſoleil, que lorſqu'il eſt en oppoſition. Or une planete en quadrature, eſt à l'égard de la terre à peu près autant éloignée de la terre que du ſoleil; & lorſqu'elle eſt en oppoſition, elle eſt plus près de la terre que du ſoleil de toute la diſtance du ſoleil à la terre; d'où il ſuit que ſelon ces obſervations, la lumiere employe 8′ à parcourir cette diſtance; & qu'ainſi, en ſuppoſant uniforme le mouvement de la lumiere, les rayons qui partent du ſoleil n'arrivent à la terre qu'au bout d'environ 8′ de temps. Mais parce que la lune eſt plus de 330 fois plus près de la terre que le ſoleil, la lumiere n'emploie que 1″ $\frac{1}{2}$ de temps à venir de la lune à la terre; c'eſt pourquoi on n'a pas égard au mouvement de la lumiere dans l'uſage qu'on fait des obſervations de la lune.

972. PHENOMENE IV. *En conſidérant les mouvements des ſatellites par rapport aux etoiles, & non par rapport au centre de leur planete, les trois premiers ſatellites de Saturne, & le premier de Jupiter, ſont 1°, ſtationnaires, ou comme*

immobiles pendant quelque temps en deux points de leur orbite, ſavoir, avant la digreſſion occidentale, & après la digreſſion orientale. 2°. Ils ſont directs, ou vont ſelon l'ordre des ſignes du zodiaque, depuis leur ſtation occidentale, juſqu'à leur ſtation orientale. 3°, Ils ſont rétrogrades, ou vont contre l'ordre des ſignes, depuis leur ſtation orientale, juſqu'à leur ſtation occidentale. 4°, Dans leurs digreſſions ces ſatellites ne vont ni plus ni moins vîte que leur planete, mais leur vîteſſe s'accelere depuis un des points de ſtation juſqu'à la conjonction ſuivante, & delà, elle diminue juſqu'à la ſtation qui ſuit. 5°, Ils ſont plus de temps à aller de la digreſſion occidentale à la digreſſion orientale, que pour aller de la digreſſion orientale à l'occidentale, quoique leur vîteſſe ſoit plus grande dans leur conjonction ſupérieure que dans leur conjonction inferieure.

973. *Au contraire, la lune, le quatrieme & cinquieme ſatellite de Saturne, le ſecond, troiſieme & quatrieme ſatellite de Jupiter, ſont toujours directs, jamais ſtationnaires: dans leurs digreſſions ils vont preciſement auſſi vîte que la planete, ainſi que les autres ſatellites; mais enſuite en allant de la digreſſion occidentale à la conjonction ſuperieure, ils accelerent leur vîteſſe, & paſſent à l'orient au-delà de la planete; mais après la conjonction ſupérieure, ils rallentiſſent leur vîteſſe, de ſorte que dans la digreſſion orientale elle eſt égale à celle de la planete. Enſuite cette vîteſſe continue de diminuer tellement, que la planete paſſe à ſon tour au-delà de ces ſatellites dans leur conjonction inferieure, & les laiſſe ainſi derriere elle à l'occident. Mais après cette conjonction, la vîteſſe de ces ſatellites augmente, redevient égale à celle de la planete dans leur digreſſion occidentale, & continue perpétuellement les mêmes variations apparentes.*

974. Toutes ces apparences s'expliquent facilement par la théorie des mouvements relatifs & des épicycloïdes, qu'on a appliquée ci-devant aux mouvements apparents des planetes vues de la terre; mais nous allons montrer comment on peut les expliquer indépendamment de cette théorie.

975. Il eſt clair que le mouvement d'un ſatellite rapporté à une étoile qui eſt fixe, dépend de trois cauſes, qui en peuvent faire varier les apparences. 1°, De la vîteſſe réelle du ſatellite. 2°, De la direction de cette vîteſſe à l'égard du ſpectateur. 3°, De la vîteſſe réelle de la planete principale, qui entraîne l'orbe du ſatellite, & par conſéquent le ſatellite même dans la direction du mouvement de la planete.

976. La vîteſſe réelle des ſatellites eſt ſenſiblement uniforme, parce que leurs orbites ſont ſenſiblement circulaires : ſuppoſons que celle de la planete le ſoit auſſi, (car les inégalités des mouvements propres de Saturne, de Jupiter & de la Terre, ne ſont pas aſſez conſidérables pour cauſer de grandes variations dans ces apparences;) ſuppoſons encore que S ſoit (fig. 91) le lieu du ſoleil, I celui de la planete qui ſe meut dans l'arc & ſuivant la direction IK. Soit ODBG l'orbite du ſatellite. En tirant par S & par I la droite SO, elle marque le point O où ſe fait la conjonction ſupérieure, & le point C de la conjonction inférieure. En tirant du point S les tangentes SD, SG à l'orbite, le point G marque la digreſſion occidentale, & le point D la digreſſion orientale.

977. 1°, Quand le ſatellite eſt en O dans ſa conjonction ſupérieure, alors la direction OA de ſon mouvement étant perpendiculaire au rayon SO, ou ce qui eſt la même choſe, parallele & dans le même ſens que la direction de la planete, le ſatellite rapporté à un point fixe, paroît aller avec une vîteſſe égale à la ſomme de ſa vîteſſe réelle, & de la vîteſſe réelle de la planete : donc alors la vîteſſe apparente du ſatellite eſt directe, & la plus grande qu'il eſt poſſible.

978. 2°, Quand le ſatellite eſt en P entre la conjonction ſupérieure & ſa digreſſion orientale, alors la direction PQ de ſa vîteſſe étant oblique au rayon SP, ou à la direction IK de la planete, l'œil en S ne voit pas la vîteſſe du ſatellite telle qu'elle eſt réellement ; mais il ne la voit que comme ſi elle étoit PT, & par conſéquent, il la voit plus petite qu'elle n'eſt : donc le mouvement du

ſatellite paroît direct encore, & égal à P T plus la vîteſſe reelle de la planete : donc dans le paſſage de la conjonction ſupérieure à la digreſſion orientale le ſatellite eſt direct, mais ſa vîteſſe apparente ſe rallentit de plus en plus, parce que ſa vîteſſe réelle devient de plus en plus oblique à l'œil de l'obſervateur.

979. 3°, Quand le ſatellite eſt en D dans la digreſſion orientale, alors la direction D R de ſa vîteſſe étant confondue avec le rayon S D, le ſatellite ne doit paroître ſe mouvoir ni ſuivant la ſuite des ſignes I K, ni contre la ſuite des ſignes I M ; mais comme il reſte dans le même rayon S D, il paroîtroit immobile s'il n'étoit entraîné par ſa planete. Donc dans la digreſſion orientale le ſatellite eſt direct, & ſa vîteſſe paroît préciſément égale à celle de la planete.

980. 4°, Après que le ſatellite a paſſé la digreſſion orientale, & qu'il ſe trouve vers H, la direction H F de ſa vîteſſe réelle eſt contre la ſuite des ſignes ; mais comme elle eſt oblique au rayon S H, elle ne paroît être que de la quantité H N, & alors il peut arriver trois cas ; ou H N eſt encore plus petit que la vîteſſe réelle de la planete ſelon la ſuite des ſignes, & par conſéquent le ſatellite eſt emporté ſelon la ſuite des ſignes par l'excès de la vîteſſe réelle de la planete ſur la vîteſſe apparente H N du ſatellite ; ou H N eſt égale à la vîteſſe réelle de la planete ſelon la ſuite des ſignes, & par conſéquent ces deux vîteſſes ſe détruiſent, & le ſatellite paroît immobile ou ſtationnaire ; ou enfin H N eſt plus grande que la vîteſſe réelle de la planete, & par conſéquent le ſatellite paroît *rétrograder* ou aller contre la ſuite des ſignes avec une vîteſſe égale à l'excès de H N ſur la vîteſſe réelle de la planete. Et parce que la direction de la vîteſſe du ſatellite devient de moins en moins oblique au rayon tiré du ſoleil, en ſorte qu'elle lui eſt perpendiculaire en C dans la conjonction inférieure, il ſuit que dans le paſſage du ſatellite depuis ſa digreſſion orientale juſqu'à ſa conjonction inférieure, ſa vîteſſe contre la ſuite des ſignes paroît augmenter, & que ſon mouvement eſt composé de la différence de la vîteſſe réelle de la

planete avec la vîtesse apparente du satellite. Donc dans le passage de la digression orientale à la conjonction inférieure, le satellite paroîtra stationnaire, puis rétrogradera en accélérant sa vîtesse, si sa vîtesse apparente contre la suite des signes peut devenir égale, & surpasser ensuite la vîtesse réelle de la planete, & c'est ce qui arrive au premier, second & troisieme satellite de ♄, & au premier satellite de ♃; & il ne paroîtra ni stationnaire, ni rétrograde, mais sa vîtesse paroîtra seulement diminuer si sa vîtesse apparente contre la suite des signes ne peut égaler la vîtesse réelle de la planete suivante la suite des signes, & c'est ce qui arrive à la lune, au second, troisieme & quatrieme satellite de ♃, & au quatrieme & cinquieme satellite de ♄.

981. 5°, Dans la conjonction inférieure en C, la direction CB de la vîtesse réelle du satellite contre la suite des signes étant vue toute entiere, sa différence avec la vîtesse réelle de la planete, sera la plus grande qu'il est possible. Donc dans la conjonction inférieure le satellite rétrograde avec une plus grande vîtesse que dans tous les autres instants de sa rétrogradation, ou bien il va selon la suite des signes avec la moindre vîtesse possible.

982. 6°, Dans le passage de la conjonction inférieure à la digression occidentale en G, la direction de la vîtesse réelle & rétrograde du satellite devient de plus en plus oblique à l'œil de l'observateur, & paroît par conséquent diminuer de plus en plus : donc la différence entre la vîtesse apparente du satellite & la vîtesse réelle de la planete augmente de plus en plus ; donc si le satellite paroissoit rétrograde dans la conjonction inférieure, il paroît diminuer sa vîtesse de plus en plus, & devenir ensuite stationnaire, puis direct ; ou s'il ne paroissoit pas rétrograde dans sa conjonction inférieure, sa vîtesse apparente selon la suite des signes augmente de plus en plus.

983. 7°, Dans la digression occidentale G, il est clair que la vîtesse apparente du satellite n'est égale qu'à la vîtesse réelle de la planete, comme dans la digression orientale D.

984. 8°, Dans le passage de la digression occidentale à

la conjonction supérieure, la direction de la vîtesse réelle du satellite est suivant la suite des signes, & elle devient de moins en moins oblique à l'œil de l'observateur; donc elle se joint à la vîtesse réelle de la planete, & cette vîtesse composée paroît augmenter de plus en plus jusqu'à la conjonction supérieure en O.

985. Il est facile encore de voir, 1°, *pourquoi la vîtesse du satellite rétrograde dans la conjonction inférieure, est moindre que sa vitesse directe dans la conjonction supérieure*, parce que l'une est la différence des vîtesses réelles du satellite & de la planete, & l'autre est leur somme. 2°, *Pourquoi un satellite emploie plus de temps à aller de la digression occidentale à l'orientale, que pour venir de la digression orientale à l'occidentale*; c'est parce que les rayons tangents SD, SG ne peuvent embrasser la moitié de l'orbite du satellite, mais seulement la partie DCB, parce qu'il faudroit que ces rayons fussent paralleles, & que par conséquent l'orbite du satellite fût infiniment éloignée du soleil. D'où il suit que *plus l'orbite d'un satellite est réellement petite & éloignée du soleil, plus le temps de son passage par le demi-cercle supérieur approche d'être égal à celui de son passage par le demi-cercle inférieur, & au contraire.*

986. Pour examiner maintenant quelles sont les vîtesses réelles des satellites, & leur rapport avec les vîtesses réelles de la planete, il faut déterminer par les digressions des satellites, le rapport du rayon de leur orbite à celui de l'orbite de la planete, & le rapport du temps de leur révolution à celui de la révolution de la planete; car il est clair que la vîtesse réelle d'un corps qui tourne est d'autant plus grande, que son orbe ou que le rayon de son orbe est plus grand, & que le temps de sa révolution est plus court; ainsi *les vîtesses réelles des planetes sont en raison composée de la directe des rayons de leurs orbes, & de l'inverse de leurs temps périodiques.*

987. Pour avoir le rapport du rayon de l'orbe d'un satellite à celui de sa planete, il faut calculer combien le rayon de l'orbe de la planete contient de fois le demi-diametre

de la planete même ; il faut ensuite diviser cette valeur par la quantité de la digression du satellite. Par exemple, le demi-diametre de Jupiter étant de $18'' \frac{1}{2}$ (voyez la Table page 115), si on cherche la valeur du grand côté d'un triangle rectangle dont le plus petit côté est 1, & le plus petit angle de $18'' \frac{1}{2}$, ou le trouvera de 11151, donc le rayon de l'orbe de ♃, contient 11151 demi-diametres de ♃ : ayant divisé 11151 par $5 \frac{2}{3}$ digression du premier satellite de Jupiter, on aura 1964, & par conséquent l'orbe de Jupiter est à l'orbe du premier satellite, comme 1964 à 1.

988. De même pour avoir le rapport des révolutions des satellites à celles de leur planete, il faut diviser le temps de la révolution de la planete par celle du satellite. De cette sorte on aura la Table suivante.

		Rapport du rayon de l'orbe de la Planete au rayon de l'orbe de chaque Satellite.	*Rapport du temps de la révolution de la Planete à celui de chaque Satell.*	*Rapport de la vîtesse réelle de chaque Sat. à celle de la Planete.*
Pour Saturne	1	comme 2905 à 1...	comme 5702 à 1...	comme 5702 à 2905
	2	2292 à 1	3932 à 1	3932 à 2292
	3	1719 à 1	2382 à 1	2382 à 1719
	4	717 à 1	675 à 1	675 à 717
	5	238 à 1	135 à 1	135 à 238
Pour Jupiter	1	comme 1964 à 1...	comme 2449 à 1...	comme 2449 à 1964
	2	1236 à 1	1220 à 1	1220 à 1236
	3	778 à 1	606 à 1	606 à 778
	4	443 à 1	260 à 1	260 à 443
La Lune		comme 340 à 1	$12\frac{1}{3}$ à 1	$12\frac{1}{3}$ à 340

989. On voit donc par cette Table que les trois premiers satellites de Saturne & le premier de Jupiter ayant une vîtesse réelle plus grande que celle de leur planete, ils doivent être rétrogrades dans leur conjonction inférieure, & que les autres doivent toujours être directs. Que le second satellite de Jupiter ayant une vîtesse presque égale à celle

de sa planete, il doit être comme stationnaire dans sa conjonction inférieure (*l*).

990. On voit enfin que le mouvement de chaque satellite vu du soleil est composé de son mouvement propre, & du mouvement de sa planete, & qu'ainsi il faut distinguer dans les satellites deux sortes de révolutions, l'une *périodique*, & c'est le temps que le satellite emploie à décrire 360 degrés, vu du centre de sa planete; & l'autre *synodique*, & c'est le temps que le satellite emploie à retourner à la même phase à l'égard du soleil; & il est clair (541) que la révolution synodique excede la révolution périodique de tout le temps que le satellite emploie à parcourir dans son orbite un arc d'un nombre de degrés égal à celui que la planete a décrit pendant le temps de la révolution périodique du satellite.

991. PHÉNOMENE V. *En comparant les temps des conjonctions supérieures à ceux des conjonctions inferieures des satellites de Jupiter & de Saturne, leurs intervalles sont sensiblement égaux à leur demi-revolution. Au lieu que dans la lune ces intervalles sont tantôt plus longs de cinq ou six heures, tantôt plus courts.*

992. Ce phénomene joint au premier, suivant lequel les écarts des satellites sont sensiblement égaux, fait connoître que les mouvements des satellites sont sensiblement uniformes (*m*), & que leurs orbites sont des cercles dont la planete est le centre; mais que le mouvement de la lune est sujet à quelques irrégularités plus sensibles, qu'on examinera dans la suite.

993. A l'égard de la cause physique qui fait tourner les satellites autour de leur planete principale, on trouve qu'elle est analogue à celle qui fait tourner les planetes autour du

(*l*) Il s'agit ici du satellite que l'on compareroit à une étoile; mais comme on ne les rapporte jamais qu'à la planete qu'ils suivent, ces calculs ne sont d'aucun usage.

(*m*) M. Wargentin dans ses dernieres Tables des mouvemens des satellites de Jupiter a été obligé d'admettre une excentricité dans plusieurs.

ſoleil. Car les rayons vecteurs des ſatellites parcourent des aires proportionnelles aux temps, puiſque leurs orbites ſont ſenſiblement des cercles, dont la planete principale occupe le centre, & les rayons de ces orbites ſont comme les racines cubiques des quarrés des temps de leurs révolutions autour de la planete, ainſi qu'on peut s'en aſſurer par le calcul de la Table n° 941. *Il y a donc lieu de croire que les ſatellites tournent autour de leur planete en vertu d'une force d'impulſion combinée avec une force centrale tendante à la planete principale.* Nous verrons dans la ſection ſuivante ce qui doit modifier l'effet de ces deux forces.





SIXIEME SECTION,

Qui contient la troisieme Partie de l'Astronomie Terrestre ;

OU

L'explication de la Théorie de la Lune vue de la Terre, & par analogie, de celle des autres satellites vus de leur Planete principale.

CHAPITRE PREMIER.

De la Théorie des mouvements de la Lune.

994. QUOIQUE la terre soit à l'égard de la lune, ce qu'est le soleil à l'égard de la terre, & qu'en conséquence la lune suive à peu près à l'égard de la terre les mêmes loix dans son mouvement, que la terre à l'égard du soleil; cependant on y a remarqué des inégalités si variables, que la plupart des Astronomes du siecle passé ont cru qu'il étoit impossible de les assujettir à une loi bien constante. Ce n'est que depuis que M. Newton a démontré que les vrais éléments de la théorie d'un satellite dépendoient de la combinaison de la pesanteur réciproque du soleil, de la planete, & de son satellite, que l'on a commencé à construire des tables qui servent à calculer les mouvements de la lune avec quelque précision. Nous ne nous proposons ici que de faire connoître d'une maniere générale les causes

causes physiques de toutes ces inégalités; le détail du calcul de leurs effets seroit seul la matiere d'un livre (*n*).

Article Premier.

Des Phases de la Lune.

995. On appelle *Phases de la Lune* les différentes figures que son disque nous présente pendant le cours d'une lunaison entiere. Tout le monde sait que le jour de la conjonction de la lune avec le soleil, qu'on appelle *la Nouvelle lune*, son disque ne paroît pas dans le ciel; que les jours suivants on le voit en forme de croissant dont la convexité est toujours tournée vers le soleil, & la concavité se remplit de plus en plus jusqu'à l'opposition de la lune au soleil, qu'on appelle la *Pleine Lune*, où l'on voit le disque terminé en cercle entier. Ensuite la partie occidentale de la lune cesse de paroître; la partie orientale prend à son tour la figure d'un croissant qui diminue de largeur jusqu'à la nouvelle lune suivante, où la lune disparoît totalement; puis elle recommence à prendre successivement les mêmes figures.

996. Il est aisé de trouver la raison de ces phénomenes. La lune est un globe qui n'est ni lumineux ni diaphane. La lumiere que nous lui voyons, n'est autre chose que celle qui lui vient du soleil, de même que la lumiere que la terre reçoit ne vient que du soleil. Or selon les regles de l'optique, & la nature des corps sphériques, il est certain...

997. I. Que *le soleil n'éclaire sensiblement que la moitié de la surface de la lune*. Ainsi la lune a toujours un hémisphere éclairé & un hémisphere obscur.

998. Donc l'hémisphere éclairé est séparé de l'hémisphere obscur par un grand cercle dont la position est toujours constante par rapport au soleil, parce que son plan est

(*n*) Il y en a plusieurs en effet sur cette matiere, de MM. Euler, d'Alembert, Clairaut, la Grange, Mayer, Simpson, &c.

toujours perpendiculaire à la droite tirée du soleil à la lune. Pour abréger, j'appellerai ce cercle E.

999. II. *On ne peut voir qu'environ la moitié de la surface d'un globe.*

1000. Donc, 1°, de tous les grands cercles qu'on peut tracer sur la surface d'un globe, on ne peut voir en entier que celui qui termine l'hémisphere visible, (ou ce qui est la même chose, que celui dont le plan est perpendiculaire au rayon tiré de l'œil au centre du globe), & on voit nécessairement la moitié de chacun des autres. J'appellerai le cercle V, celui qui termine l'hémisphere de la lune visible de dessus la terre.

1001. Donc, 2°, la situation du plan du cercle V, est toujours constante par rapport à la terre, & la figure de ce cercle ne peut paroître que circulaire.

1002. III. Par les phénomenes des phases de la lune, il est constant que l'hémisphere éclairé fait à l'égard de l'hémisphere visible de dessus la terre, une révolution entiere à chaque lunaison, en tournant sur la ligne de l'intersection commune des plans des deux cercles E & V, laquelle est (Trig. 8) nécessairement un diametre du globe.

1003. Donc, 1°, le plan du cercle E passe par toutes les positions possibles à l'égard du rayon tiré de l'œil de l'observateur au centre de la lune, & par conséquent la figure de ce cercle est tantôt circulaire, tantôt elliptique, tantôt rectiligne, selon que son plan est perpendiculaire à ce rayon, incliné, ou dirigé le long de ce rayon.

1004. Donc, 2°, par la révolution du cercle E sur un diametre du cercle V, la partie de la surface de la lune qui paroît éclairée par rapport à la terre, est toujours renfermée entre deux demi-cercles, dont l'un, qui est la moitié du cercle V, est toujours vu en demi-cercle (1001), & l'autre qui est la moitié du cercle E, est vu tantôt en demi-cercle, tantôt en demi-ellipse, tantôt en ligne droite.

1005. Cela posé, dans la conjonction de la lune avec le soleil, où la lune est située précisément entre la terre & le soleil, le cercle E est confondu avec le cercle V; mais

comme l'hémiſphere éclairé ſe trouve oppoſé à la terre, on ne voit alors aucune partie de la lune qui ſoit éclairée.

1006. A meſure que la lune avance dans ſa révolution, l'hémiſphere éclairé s'avance ſur l'hémiſphere viſible, les demi cercles E & V ſont à leur interſection deux angles ſphériques aigus. Donc quelque temps après la nouvelle lune, on doit voir un petit eſpace éclairé renfermé entre la moitié Occidentale du cercle V, & une moitié du cercle E. Cette moitié E paroît elliptique, mais d'abord preſque circulaire, parce que le plan de ce cercle E eſt encore fort éloigné d'être perpendiculaire au rayon tiré de la terre à la lune; & la convexité de cette ellipſe eſt du côté de la concavité du demi-cercle V. C'eſt ce qui fait l'apparence des cornes de la lune; les pointes, qui ſont les ſommets des angles ſphériques, ſont les extrêmités du diametre de la lune ſur lequel le cercle E tourne.

1007. Le cercle E s'avançant de plus en plus ſur l'hémiſphere viſible, & faiſant aux pointes des cornes de la lune des angles ſpheriques de plus grands en plus grands, ſon plan s'incline par conſéquent de plus en plus vers le rayon tiré de la terre à la lune; la moitié de ce cercle E paroît donc une demi-ellipſe qui ſe rétrécit de plus en plus, juſqu'à ce qu'au quart de la révolution de la lune, où le plan du demi-cercle E eſt devenu perpendiculaire au plan du demi cercle V, & par conſéquent dirigé le long du rayon tiré de la terre à la lune, cette demi-ellipſe ne paroît plus que comme une ligne droite, & la figure de la partie éclairée de la lune eſt celle d'un demi-cercle terminé par un diametre. Cette phaſe s'appelle *le premier quartier de la lune.*

1008. Enſuite le demi-cercle E continuant de s'avancer ſur l'hémiſphere viſible, & formant à ſes interſections avec le demi-cercle V des angles ſphériques de plus en plus obtus, la demi-ellipſe (qui eſt l'apparence du demi cercle E) tourne ſa convexité à l'oppoſite de la moitié occidentale du cercle V; elle s'élargit de plus en plus, & donne par conſéquent à la partie éclairée une figure qui approche de plus en plus d'être un cercle entier. Elle acquiert enfin cette

figure, lorſque dans l'oppoſition de la lune au ſoleil, le plan du cercle E étant devenu perpendiculaire au rayon tiré de la terre à la lune, ce cercle ſe voit tout entier, & eſt confondu avec le cercle V. On appelle cette phaſe *la pleine lune.* Le cercle E a fait la moitié de ſa révolution, auſſi-bien que la lune.

1009. Enfin le cercle E faiſant l'autre moitié de ſa révolution, redonne à la lune toutes les mêmes figures. Le demi-cercle E qui, avec la moitié orientale du cercle V, renferme la partie éclairée, redevient une demi-ellipſe d'abord fort approchante du demi-cercle; puis elle ſe rétrécit de plus en plus juſqu'à ne paroître plus qu'une ligne droite, ce qui arrive après les trois quarts de la révolution, & cette phaſe s'appelle *le dernier quartier de la lune.* Après cette phaſe la demi-ellipſe s'élargit de plus en plus en tournant ſa convexité vers la concavité du demi-cercle V; enfin elle diſparoît en ſe confondant avec le cercle V dans la nouvelle lune ſuivante.

ARTICLE II.

Enumération des principaux Eléments de la Théorie des mouvements de la Lune, déduits des Obſervations Aſtronomiques.

1010. AVANT que d'expliquer la théorie phyſique de la lune, il eſt néceſſaire d'établir les faits qui ſont avoués de tous les Aſtronomes, parce qu'ils les ont déduits des obſervations, indépendamment de tout raiſonnement phyſique.

1011. I. La lune fait une révolution entiere à l'égard des étoiles en 27 jours 7^h $43'$ $12''$, c'eſt ſa *révolution ſydérale* : à l'égard du premier point du ♈ en 27 jours 7^h $43'$ $5''$, ce qui s'appelle *ſa révolution périodique*; à l'égard du ſoleil, en 29 jours 12^h $44'$ $3''$, on l'appelle *ſa révolution ſynodique*; à l'égard d'un de ſes nœuds en 27 jours 5^h $5'$ $35''$; & à l'égard de ſon apogée en 27 jours 13^h $18'$ $34''$, c'eſt ſa révolution *anomaliſtique.*

1012. II. La ligne des abſides de la lune fait une révolution entiere à l'égard du premier point du ♈ en 8 ans 309 jours 8^h 20$'$.

1013. III. La ligne des nœuds de la lune fait une révolution entiere en rétrogradant à l'égard du premier point du ♈, en 18 ans 224 jours 5^h.

1014. IV. Les mouvements de la lune ſont ſujets à un grand nombre d'inégalités, parmi leſquelles on en démêle aſſez facilement quatre, ſur l'exiſtence deſquelles il n'y a pas de doute parmi les Aſtronomes.

1015. 1°, On voit en général que la vîteſſe de la lune augmente ou diminue à meſure que ſon diametre paroît augmenter ou diminuer, & que par conſéquent ſa diſtance à la terre devient plus petite ou plus grande. Et comme les termes des plus grandes & plus petites vîteſſes ſont en des points du ciel ſenſiblement oppoſés, cette inégalité eſt évidemment cauſée par une excentricité dans l'orbite de la lune : on la repréſente par le calcul de l'*équation du centre*.

1016. 2°, Les quantités abſolues des plus grandes & des plus petites vîteſſes de la lune ayant été obſervées dans une révolution, on ne les trouve plus les mêmes dans la révolution ſuivante ; & on remarque, que plus le ſoleil s'éloigne de la ligne des abſides de la lune, aux extrêmités de laquelle ſont les termes de ſa plus grande & de ſa plus petite vîteſſe, plus l'inégalité entre ces deux vîteſſes extrêmes va en augmentant : d'où il ſuit que la premiere inégalité de la lune eſt elle-même ſujette à une inégalité annuelle, qui dépend de la poſition de la ligne des abſides de la lune à l'égard du ſoleil. Cette ſeconde inégalité s'appelle l'*évection de la lune*. Elle n'a pas échappé aux anciens Aſtronomes Grecs, non plus que la premiere ; mais ils s'en ſont tenus-là.

1017. 3°, La ligne des abſides de la lune ſe trouvant éloignée d'environ 45° du ſoleil, auquel cas la ſeconde inégalité ne devoit pas avoir lieu, & la premiere devoit donner une même équation, & par conſéquent une même vîteſſe à la lune dans la ſyzygie & dans la quadrature, Tycho-Brahé s'apperçut que la vîteſſe dans la ſyzygie etoit cependant plus grande ; il a donc fallu admettre une troiſieme

inégalité dans la théorie de la lune. On l'appelle *la variation* : Elle est représentée par une équation qui est nulle dans les syzygies & dans les quadratures, mais qui est la plus grande dans les points qui sont mitoyens, & qu'on appelle les *octans de la lune*.

1018. 4°, Les Astronomes du commencement du siecle passé ayant comparé les intervalles des temps des éclipses observées avec exactitude, se sont apperçus que les révolutions périodiques de la lune n'étoient de même durée que dans les mêmes saisons de l'année. Que les plus longues étoient dans les mois de Décembre & de Janvier, & les plus courtes en Juin & Juillet; les uns avoient attribué cette inégalité aux révolutions diurnes de la terre, qu'ils avoient cru plus promptes lorsque la terre est périhélie, que lorsqu'elle est aphélie. Ce sentiment a été détruit par les expériences faites avec les horloges à pendule; il est d'ailleurs contraire à la théorie de la rotation des planetes (355). D'autres avoient attribué cette inégalité au plus ou moins de facilité que la lune doit avoir de tourner autour de la terre, selon que la terre est plus près ou plus loin du soleil. Quoi qu'il en soit, cette inégalité produit dans la théorie de la lune trois petites équations annuelles, proportionnelles à l'équation du centre du soleil. L'une est pour le mouvement de la lune sur son orbite, l'autre pour le mouvement de son apogée, & la troisieme pour celui de son nœud (*o*).

1019. V. Le plan de l'orbite de la lune n'est pas toujours incliné au plan de l'écliptique d'une même quantité. Tycho a remarqué le premier que les plus grandes latitudes de la lune, qui arrivent dans les quadratures, sont à peine de 5 degrés, tandis que celles qui arrivent dans les syzygies sont de 5° 18′ (*p*).

(*o*) Il y a un grand nombre d'autres petites inégalités que MM. Euler, d'Alembert, Clairaut & Mayer, &c. ont discutées par l'analyse du problême des trois corps & le calcul des attractions du soleil sur la lune.

(*p*) C'est, au contraire, quand le soleil est dans les nœuds que l'inclinaison est la plus grande. La même inversion est à l'article 1067.

1020. VI. La diſtance de la lune à la terre déduite des obſervations de ſes parallaxes, varie depuis 55,72 juſqu'à 64,74 demi-diametres de l'équateur terreſtre. Sa diſtance moyenne eſt donc de 60,23 de ces demi-diametres, leſquels ſont de 19686078 pieds de roi à très-peu près, ſelon les meſures qui en ont été faites au Pérou ; & par conſéquent la diſtance moyenne de la lune à la terre eſt d'environ 1185692478 pieds ou en nombres ronds de 1185700000 pieds.

1021. VII. La lune eſt près de 340 fois plus proche de la terre que le ſoleil. Car, (645), la diſtance moyenne du ſoleil à la terre eſt de plus de 20000 demi-diametres terreſtres.

1022. VIII. La lune eſt environ 50 fois plus petite que la terre ; car, ſelon les obſervations, le diametre réel de la lune eſt à celui de la terre, comme 3 à 11, à très-peu près ; & par conſéquent leur ſolidité, ou volume, (Elem. 718) comme 27 à 1331, ou comme 1 à 493. Mais ce rapport n'exprime pas celui des maſſes de la lune & de la terre, parce qu'il n'eſt pas certain qu'elles ayent été formées d'une même maniere, ni que leur denſité ſoit la même : au contraire un grand nombre d'inductions nous porte à croire que la maſſe de la lune n'eſt gueres que $\frac{1}{70}$ de celle de la terre (*q*).

1023. IX. La lune fait une rotation ſur ſon axe en 27 jours $7^h\,43'\,5''$, c'eſt-à-dire, pendant chacune de ſes révolutions périodiques. Ce qui ſe déduit de ce que la lune nous préſente toujours la même face. Car il eſt clair qu'un objet qui tourne autour d'un autre en le regardant toujours, fait une révolution ſur ſon axe, à meſure qu'il en fait une autour de cet objet : il eſt facile de l'éprouver par ſoi-même.

1024. X. Les taches de la lune paroiſſent à chaque révolution de la lune avoir un petit mouvement particulier à l'égard de ſon centre. Elles paroiſſent s'en approcher tant

(*q*) C'eſt ſur-tout l'effet de la lune ſur le flux & le reflux de la mer qui nous a appris que ſa denſité étoit moindre que celle de la Terre.

en longitude qu'en latitude, puis s'en écarter & se rétablir à-peu-près dans le même état. Cela s'appelle *la libration de la lune*, parce que ce mouvement affecte tout le corps de la lune (1069).

ARTICLE III.

De la nature de la force centrale de la Lune à l'égard de la Terre : & par analogie, de la nature de la force centrale des Planetes à l'égard du Soleil.

1025. LA distance moyenne de la lune à la terre étant connue assez exactement, on peut calculer la quantité absolue, dont la force centrale de la lune la retire à chaque instant de la direction rectiligne de son mouvement uniforme pour la rapprocher vers la terre. Or on trouve, en faisant ce calcul, que cette quantité est à très-peu près telle que l'exige la pesanteur que nous éprouvons tous les jours sur la surface de la terre, & qui pousse tous les corps vers le centre, en leur faisant décrire 15,1 pieds pendant la premiere seconde de temps de leur chûte libre, ou 54360 pieds pendant la premiere minute, puisque (78) le quarré de $1''$ est au quarré de $60''$, comme 15,1 à 54360 (*r*).

1026. En effet, puisque la force centrale doit toujours être en raison inverse du quarré de la distance au centre (258), il faut qu'à la distance de 60,23 demi-diametres, la pesanteur soit $\frac{1}{(60,23)^2}$ de celle qu'on éprouve sur la surface de la terre. Il faut donc qu'en une minute de temps, la force centrale retire la lune vers la terre, de $\frac{54360}{(60,23)^2}$

(*r*) La premiere idée de Newton fut de comparer ainsi la chûte des graves avec la courbure de l'orbite lunaire, d'où il conclud d'abord que l'attraction de la terre devoit diminuer en raison inverse du carré de la distance au centre de la terre. *Pemberton.*

= 14,985 pieds, ou de 15 pieds à très-peu près.

1027. Soit maintenant L N (fig. 98) l'arc de l'orbite de la lune dans sa distance moyenne parcouru en une minute de temps : cet arc est de $32'' \; 56''' \frac{1}{2}$, à raison de 27 jours $7^h \; 43' \; 12''$ pour 360°. Soit la terre en C au centre de cet arc. Ayant tiré CL, & CM terminée à la tangente LM, il est évident que MN est l'effet absolu de la force centrale de la lune. Or MN est l'excès de l'hypothénuse CM sur le côté CL = 1185700000 pieds, MN est aussi l'excès de CM pris pour secante, sur CL pris pour sinus total. Selon les tables de sinus, la secante de $32'' \; 56''' \frac{1}{2}$ est 1,000000012754, le sinus total étant = 1. Donc comme 1 à 0,000000012754, ainsi 1185700000 pieds sont à 15,12 pieds. D'où l'on voit que la force centrale de la lune n'est autre chose que sa pesanteur sur la terre, en supposant que cette pesanteur diminue en raison du quarré de la distance au centre de la terre.

1028. REM. Dans ce calcul on a négligé la pesanteur de la lune à l'égard du soleil, qui modifie un peu sa pesanteur à l'égard de la terre, comme on le verra dans l'article suivant.

1029. Par analogie on peut conclure que *la force centrale qui fait tourner les corps célestes autour d'un astre principal n'est autre chose que la pesanteur de ces corps à l'égard de cet astre.*

ARTICLE IV.

Des Expressions Analytiques des forces qui animent la Lune dans son orbite.

1030. SI la lune n'avoit d'autre force centrale que celle qui la dirige à chaque instant vers le centre de la terre, elle suivroit à son égard précisément les mêmes loix dans ses inégalités, que les planetes à l'égard du soleil; c'est-à-dire, elle décriroit relativement à la terre une ellipse réguliere dont l'axe garderoit un parallélisme conf-

tant dans le ciel, la terre seroit à l'un des foyers, & les aires renfermées entre les rayons vecteurs seroient exactement proportionnelles aux temps. La terre entraînant avec elle la lune, n'en trouble pas le mouvement relatif, non plus qu'un plan mobile celui d'un corps posé dessus. Seulement à l'égard du soleil, ou de tout autre point fixe pris hors de la terre dans l'espace absolu, le mouvement de la lune se fait dans des épicycloïdes allongées. Nous ne considérons ici la lune que comme tournant autour de la terre. Dans ce point de vue toutes les observations concourent à prouver que les inégalités de la lune varient non-seulement dans les différents degrés de son anomalie, mais aussi dans ses différentes positions à l'égard du soleil ; d'où on doit conclure que *parmi toutes les différentes forces perturbatrices, dont la lune, en qualité de corps céleste, est animée à la fois, celle qui a sa source dans le soleil produit des effets très-sensibles*, & qu'ainsi, pour expliquer les causes des inégalités des mouvements de la lune autour de la terre, il faut déterminer les effets de cette force.

1031. Comme nous ne nous proposons pas de donner une théorie complette des mouvements de la lune, laquelle n'est du ressort que de l'analyse la plus sublime, (*f*) nous nous contenterons d'examiner les effets généraux des forces perturbatrices qui produisent les inégalités de la lune, sans prétendre en déterminer les quantités absolues, qui dépendent en grande partie des masses de la terre, du soleil & de la lune, sur lesquelles on n'a pas encore de connoissances exactes. Nous n'aurons donc pas égard à ces masses.

1032. Pour ne pas embrasser trop de difficultés à la fois, supposons d'abord que la lune ait été destinée à décrire uniformément un cercle autour de la terre qui en occupe le centre, tandis que la terre elle-même décriroit uniformément un cercle autour du soleil qui en occupe le centre.

1033. Soit (fig. 94 & 95) la lune en un point quel-

(*f*) V. les Ouvrages de MM. Euler, d'Alembert, Clairaut, de la Grange.

conque L de ſon orbite CROQ. Son mouvement ſe fait ſuivant la ſuite des ſignes, dans le ſens LRQ. Soit T le lieu de la terre au centre de l'orbite de la lune, S le ſoleil, OCS la ligne des ſyzygies, C le point de la conjonction (fig. 94), ou de l'oppoſition (fig. 95), R le point de la quadrature qui ſuit le paſſage de la lune par le point C. Ayant tiré TS qui repréſente la diſtance de la terre au ſoleil, & LS qui repréſente la diſtance de la lune au ſoleil, il eſt clair qu'à cauſe de la ſituation de la lune en L, ſa tendance vers le ſoleil eſt ou plus grande (fig. 94), ou plus petite (fig. 95) que celle de la terre vers le ſoleil: D'où il ſuit que dans ces deux cas la force centrale de la lune à l'égard de la terre eſt diminuée. Cela eſt évident dans la fig. 94, cela le ſera auſſi dans la fig. 95, ſi l'on conſidere que l'excès de la tendance de la terre au ſoleil ſur celle de la lune au ſoleil, ſouſtrait d'autant la terre à l'effet de la tendance de la lune ſur la terre, & par conſéquent diminue cet effet. Il y a des cas où la peſanteur de la lune ſur la terre eſt augmentée. Nous les examinerons dans la ſuite.

1034. Pour déterminer comment, & dans quel rapport ſe fait cette variation de peſanteur, (*t*) par le ſoleil S tirez la droite LD qui ſoit à TS, comme la peſanteur de la lune ſur le ſoleil eſt à la peſanteur de la terre ſur le ſoleil, ou comme ST^2 à SL^2, & ſur cette droite LD comme diagonale, conſtruiſez le parallélogramme LGDF dont les côtés LG, DF ſoient paralleles & égaux à ST. La tendance de la lune vers le ſoleil repréſentée par LD, ſe peut donc décompoſer en deux; l'une exprimée par LG, laquelle étant égale & parallele à ST, agit dans le même ſens, & avec la même force que la tendance de la terre au ſoleil, & par conſéquent elle ne peut cauſer aucune inégalité dans le mouvement de la lune autour de la terre; &

(*t*) Cette méthode eſt à-peu-près celle que Newton ébaucha en 1687, dans le 3e Livre de ſes Principes, & qui fut étendue par Gregori, en 1702, *Aſtronomiæ phyſicæ & geometricæ Elementa*, p. 282 & ſuiv. de l'Edition in-fol. Mais elle ne ſuffit pas pour calculer la quantité des inégalités que cauſe dans la lune l'attraction du ſoleil.

l'autre exprimée par L F, qui repréſente la quantité dont la peſanteur de la lune ſur le ſoleil la porte plus (fig. 94) vers cet aſtre, que la terre n'y tend par ſa peſanteur, ou (fig, 95) la quantité dont l'excès de la tendance de la terre au ſoleil diminue la peſanteur de la lune à ſon égard. Or à cauſe que la terre eſt près de 340 fois plus éloignée du ſoleil que de la lune, la droite S D eſt fort petite par rapport à S T, & par conſéquent D F eſt ſenſiblement couchée ſur ſa parallele S T, & le point F ſenſiblement confondu avec le point A; de ſorte qu'on peut prendre, ſans erreur ſenſible, L A pour la différence entre les tendances de la terre & de la lune à l'égard du ſoleil, & pour l'expreſſion de la force qui produit les inégalités du mouvement de la lune. C'eſt pourquoi cette ligne ſera appellée *l'expreſſion de la force perturbatrice abſolue que la lune éprouve.*

1035. Ayant prolongé la droite T L s'il eſt néceſſaire, & conſtruit ſur L A comme diagonale, le parallélogramme rectangle L E A B, on voit que la force perturbatrice abſolue peut encore être décompoſée en deux; l'une L E, laquelle étant dans la direction du rayon vecteur T L, tend à éloigner (dans ces deux figures) la lune de la terre, & par conſéquent elle exprime la quantité dont la force perturbatrice abſolue fait varier la peſanteur, ou la force centrale de la lune à l'égard de la terre; & l'autre L B, laquelle étant perpendiculaire au rayon vecteur T L, tend à faire varier la force tangentielle ou la vîteſſe de la lune dans ſon orbite. Ces variations ſe font ſelon les rapports & ſelon les poſitions des lignes L A, L E, L B, qu'il nous faut déterminer.

1036. LEMME. *Si* a $\pm$ b *eſt une expreſſion telle que* b *ſoit extrêmement petit en comparaiſon de* a, *je dis que l'on peut ſuppoſer que le quarré de* a $\pm$ b *eſt* aa $\pm$ 2 a b: *& l'erreur ſera d'autant moindre, que* b *ſera plus petit à l'égard de* a.

DEM. Car ſi b étoit ſi petit, qu'on pût ſuppoſer $b = \frac{1}{\infty}$, alors le quarré de $a \pm b$ ſeroit $aa \pm \frac{2a}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}$, où l'on voit que $\frac{1}{\infty^2}$, eſt

un infiniment petit du second ordre, & par conséquent $= 0$ en comparaison de $\frac{2a}{\infty}$: donc en ne supposant que b extrêmement petit, dans le quarré de $a \pm b$, qui est $aa \pm 2ab + bb$, le terme $+bb$ est d'autant plus négligeable, que b est plus petit à l'égard de a.

1037. Maintenant, I°, à cause de $DL : ST :: ST^2 : SL^2$, & de $SL = ST - HL$ (fig. 94) & par conséquent (1036) $SL^2 = ST^2 - 2HL \times ST$, on a $DL : ST :: ST^2 : ST^2 - 2HL \times ST :: ST : ST - 2HL$, donc $DL : ST :: ST : ST - 2HL$. Donc $DL - ST : ST :: ST - ST + 2HL : ST - 2HL$. Donc $DL - ST = \frac{ST \times 2HL}{ST - 2HL} = 2HL + \frac{4HL^2}{ST - 2HL}$; ce qui se trouve en faisant la division à l'ordinaire; & à cause du terme $\frac{4HL^2}{ST - 2HL}$, qui devient comme infiniment petit, $DL - ST = 2HL$. Par un semblable raisonnement on trouvera (fig. 95) $ST - DL = 2HL$. Donc en général la différence entre DL & ST est 2HL, & par conséquent DS, qui est la différence entre DH & ST, est $= 3HL$. Or à cause des droites égales LG, FD, ST, & de DF couchée sur SA, on a $DS = TA$, donc $TA = 3HL$. Mais HL est le cosinus de la distance de la lune à la ligne des syzygies ; donc *l'expression de la force perturbatrice absolue de la lune est toujours le troisieme côté d'un triangle rectiligne, dont l'un est le rayon de l'orbite de la lune, & l'autre le triple du cosinus de la distance de la lune à la plus proche syzygie.*

1038. II°, Ayant continué LH jusqu'en I, on a $LI = 2LH$; & ayant abaissé IK perpendiculaire sur LT (prolongée s'il est nécessaire), les triangles rectangles ILK, ATE, sont semblables, à cause des paralleles AE, KI; donc $AT : LI :: AE$ ou $LB : IK$. Or $AT : LI :: 3HL : 2HL :: 3 : 2$. Donc $LB : IK :: 3 : 2$, & $LB = \frac{3}{2} IK$. Mais IK est le sinus de l'angle ITK, double de l'angle KLI, égal à l'angle CTL de la distance de la lune à la ligne des syzygies. *Donc la partie de la force perturbatrice qui altere la force tangentielle de la lune, & qui est ex-*

primée ici par L B, *est toujours comme les* $\frac{3}{2}$ *du sinus du double de la distance de la lune à la ligne des syzyg es.*

1039. III°, Dans les mêmes triangles semblables I L K, A T E, on a A T : L I : : 3 : 2 : : T E : L K : : T L + L E : T L + T K. Donc 3 T L + 3 T K = 2 T L + 2 L E. Otant de part & d'autre 2 T L, reste T L + 3 T K = 2 L E. Donc L E = $\frac{1}{2}$ T L = $\frac{3}{2}$ T K; (si le point E tomboit entre L & T, on auroit L E = $\frac{1}{2}$ T L — $\frac{3}{2}$ T K). Or T K est le cosinus de l'angle K T I double de la distance de la lune à la ligne des syzygies. *Donc la partie de la fo ce perturbatrice de la lune qui altere la force centrale ou la pesanteur de la lune à l'egard de la terre, est comme la somme ou comme la difference du demi rayon, & des* ^{3} *du cosinus du double de la distance de la lune à la ligne des syzygies.*

ARTICLE V.

De la combinaison des forces précédentes qui produit des inegalites dans les mouvements de la Lune.

1040. PUISQUE les inégalités de la lune dans son orbite doivent provenir de la combinaison de trois forces, & que nous avons trouvé dans l'article précédent les expressions qui donnent leur rapport, il s'agit maintenant pour en découvrir à-peu-p ès les effets, de trouver le sens dans le juel elles s'exercent, & les termes où elles son. les plus grandes, les plus petites, ou nulles.

1041. I°, *La force perturbatrice absolue* L A *est la plus grande dans les syzygies, & la plus petite dans les quadratures ou elle n'est que la moitié de ce qu'elle est dans les syzygies.* Car à cause du côté constant T L, le côté L A est le plus grand, lorsque le côté T A est le plus grand; c'est donc lorsque L H = T L, & que par conséquent l'angle R T L est droit, ou lorsque le point L est en C, & alors L A = 2 T L. Par une raison contraire L A est le plus petit côté quand T A ou L H = o, ou quand le point L

est au point R : alors LA = LT, ainsi LA n'est que la moitié de ce qu'il est dans la syzygie.

1042. II°, *La partie* LB *de la force perturbatrice qui tend à altérer la force tangentielle de la lune, ou sa vîtesse dans son orbite, est nulle dans les syzygies & dans les quadratures, elle est la plus grande dans les octans.* Car le double de la distance de la lune à la syzygie, est 0° dans la syzygie, 180° dans la quadrature, & 90° dans l'octans. *La direction de cette force* LB *change donc, & prend une situation opposée chaque fois que la lune passe par une syzygie ou par une quadrature.* D'où l'on voit que *la vîtesse de la lune est retardée en allant de la syzygie à la quadrature, & accélérée en allant de la quadrature à la syzygie, & les degrés d'accélération ou de retardement croissent jusques aux octans, puis décroissent.* C'est-là *la variation* de la lune.

1043. III°, *La partie* LE *de la force perturbatrice qui altere la pesanteur ou force centrale de la lune à l'égard de la terre, cause la plus grande diminution de cette pesanteur dans les syzygies; elle est nulle à 54° 44′ de part & d'autre de la syzygie; & elle cause la plus grande augmentation de pesanteur dans les quadratures, où cependant l'augmentation n'est que la moitié de la diminution qui se fait dans la syzygie.* Car dans la syzygie TK = 0, & LE confondue avec LA devient = 2 TL. Cette force dirigée alors à l'opposite du point T étant de plus égale à toute la force perturbatrice absolue de la lune, y cause la plus grande diminution de pesanteur à l'égard de la terre. Dans la quadrature, où le double de la distance à la syzygie est 180°, dont le cosinus = TL, la formule $LE = 2\,TL - \frac{3}{2}\,TL$ se réduit à $LE = -\,TL$; & cette force tendant vers T s'emploie toute entiere à augmenter la pesanteur de la lune sur la terre; mais elle ne l'augmente que de la moitié de la diminution qui se fait dans la syzygie, & qui est exprimée par 2 TL. On voit enfin que LE = 0 quand $\frac{1}{2}\,TL = -\frac{3}{2}\,TK$, ou, divisant par $\frac{3}{2}$, quand $\frac{1}{3}\,TL = -\,TK$; or TL étant le rayon = 1, $-\,TK = -\,0,33333$ qui est le cosinus d'un angle obtus, puisqu'il est négatif, & cet angle est 109° 28′

double de la diſtance de la lune à la ſyzygie quand $LE = o$; cette diſtance eſt donc $54^o\ 44'$.

1044. COROLL. I. *La partie de la force perturbatrice qui altere la peſanteur de la lune, doit rendre l'orbite de cette planete plus applatie dans les ſyzygies & plus convexe dans les quadratures* (108) : de ſorte que l'orbite de la lune qui ſans la force perturbatrice eût été circulaire, doit en vertu de cette force prendre une figure ovale ou approchante de l'ellipſe, dont le grand axe eſt dans la ligne des quadratures, le petit axe dans celle des ſyzygies, & la terre au centre.

1045. COROLL. II. *En vertu de la partie* LE *de la force perturbatrice qui altere la peſanteur de la lune, les vîteſſes de la lune doivent auſſi aller en décroiſſant de la ſyzygie à la quadrature, & en croiſſant de la quadrature à la ſyzygie*, puiſque les diſtances de la lune à la terre doivent aller en croiſſant de la ſyzygie à la quadrature, & en décroiſſant de la quadrature à la ſyzygie.

1046. REM. La diſtance de la lune au ſoleil étant plus petite d'environ $\frac{1}{170}$, dans les conjonctions que dans les oppoſitions, ſa force perturbatrice & par conſéquent ſes inégalités ſont un peu plus grandes vers la conjonction que vers l'oppoſition; mais nous négligeons ici les petites circonſtances auxquelles on ne doit avoir égard que dans le calcul rigoureux de la théorie de la lune.

ARTICLE VI.

Combinaiſon des effets des forces précédentes avec l'excentricité & l'inclinaiſon de l'orbite de la Lune.

1047. QUOIQUE nous ayons ſuppoſé que l'orbite de la lune ait été originairement deſtinée à être un cercle, tandis qu'elle eſt réellement une courbe un peu excentrique, qu'on peut ſuppoſer elliptique, & dont la terre occupe un foyer; cependant on conçoit que les inégalités que nous avons examinées dans les articles précédents doivent avoir leur effet ; ils doivent ſe compliquer avec les mouvements dans l'ellipſe tels que nous les avons déterminés

déterminés dans la premiere Section. Nous allons voir ce qui résulte de cette combinaison.

1048. I°, *Quelles que soient les forces perturbatrices de la lune, les aires des secteurs qu'elle décrit par rapport au centre de la terre, sont proportionelles aux temps dans les syzygies & dans les quadratures ; elles sont d'autant moins exactement proportionnelles aux temps que la lune est plus proche des octans.* Car les aires ne sont proportionnelles aux temps, qu'en supposant que les sommets des secteurs sont placés au point où réside la force centrale. Or dans les syzygies & dans les quadratures, la force perturbatrice LA est dans la direction du rayon vecteur de la lune, & par conséquent la force composée de cette force perturbatrice & de la pesanteur de la lune, tend au centre de la terre : dans tous les autres points la force LA est d'autant plus oblique au rayon vecteur TL, que la lune est plus près des octans, & par conséquent la direction de la force composée de la force perturbatrice LA & de la pesanteur de la lune, s'écarte d'autant plus du centre T de la terre.

1049. II°, *Le temps de la révolution périodique de la lune est plus long, lorsque la terre est périhélie, que lorsque la terre est aphélie.* Car plus la terre s'approche du soleil, plus la pesanteur de la lune devient grande à l'égard du soleil ; donc plus la diminution de la pesanteur de la lune sur la terre dans les syzygies est grande ; & quoique l'augmentation dans les quadratures soit aussi plus grande, cependant, comme la diminution est à-peu-près double de l'augmentation (1043), on voit en général que la lune pese moins sur la terre périhélie, que sur la terre aphélie ; & que par conséquent la lune s'approche moins de la terre dans le premier cas que dans l'autre ; d'où il suit que toutes choses d'ailleurs égales, l'aire de l'orbite de la lune est plus grande lorsque la terre est périhélie, que lorsque la terre est aphélie. Or (276) les temps des révolutions périodiques autour d'un même centre dépendent des grands axes des orbites, de sorte qu'ils sont plus longs lorsque les axes sont plus grands. Donc le temps de la révolution périodique de la lune est plus long, & par conséquent sa vîtesse angu-

laire moyenne est plus petite, lorsque la terre est périhélie, que lorsqu'elle est aphélie.

1050. Par la même raison, on voit que le temps de la révolution de la lune à l'égard de son apogée & de son nœud, doit être plus long quand la terre est périhélie, que lorsqu'elle est aphélie.

1051. COROLL. Les mouvemens moyens de la lune, de son apogée & de son nœud, ne sont donc pas uniformes pendant l'année, & ils ont besoin d'une équation annuelle, qui dépend de la distance de la terre au soleil, & par conséquent de l'anomalie moyenne du soleil. C'est la quatrieme inégalité de la lune (1018).

1052. III°, Lorsque la ligne des syzygies concourt avec celle des absides, la force centrale de la lune, qui est la plus foible dans la syzygie apogée, y reçoit la plus forte diminution, (qui est exprimée (1043) par le double de la distance apogée), & la force centrale qui est la plus forte dans la syzygie périgée, y reçoit la moindre diminution (exprimée par le double de la distance périgée) : d'où il suit que dans le cours de la révolution, le rapport primitif des forces centrales de la lune apogée & périgée est le plus troublé qu'il est possible. Mais dans chacune des deux quadratures intermédiaires, la lune étant dans ses distances moyennes à la terre, ses forces centrales sont égales & également augmentées ; donc alors leur rapport primitif n'est pas troublé ; d'où l'on voit que *quand la ligne des absides concourt avec celle des syzygies, l'orbite primitive de la lune est le plus altérée qu'il est possible :* Elle garde à peu près sa figure vers les points des quadratures, & la change le plus qu'il est possible vers les points des syzygies.

1053. Par un semblable raisonnement, quand la ligne des absides concourt avec celle des quadratures, la force centrale de la lune est la même dans chacune des syzygies, & y est diminuée de la même quantité, parce que la lune est alors dans ses distances moyennes : ainsi le rapport primitif des forces centrales n'est pas altéré. Dans la quadrature apogée, la force centrale qui est la plus petite,

reçoit une plus grande augmentation ; & dans la quadrature périgée, la force centrale qui eſt la plus forte, reçoit une plus petite augmentation ; ainſi le rapport primitif des forces centrales eſt peu altéré. Donc, *quand la ligne des abſides concourt avec celles des quadratures, l'orbite primitive de la lune eſt le moins altérée.*

1054. IV°, Si on ſuppoſe que malgré les effets de la force perturbatrice de la lune, ſon orbite reſte toujours elliptique, il eſt évident (288 & 293) que le grand axe doit changer à chaque inſtant de grandeur & de poſition, & que par conſéquent la ligne des abſides de la lune doit être mobile, & ſon excentricité variable. Ainſi, en vertu de la force L B qui modifie la force tangentielle de la lune, le grand axe doit s'allonger (289) dans le paſſage de l'octans par la quadrature à l'octans ſuivant, & ſe raccourcir dans le paſſage de l'octans par la ſyzygie à l'octans ſuivant. Et en vertu de la force L E qui modifie la force centrale de la lune, l'axe doit s'allonger depuis la quadrature juſqu'à la ſyzygie, & s'accourcir en allant de la ſyzygie à la quadrature. De plus cet axe doit (293) ſe mouvoir tantôt dans un ſens, tantôt dans un autre, & l'excentricité de l'orbite doit changer continuellement.

1055. Nous ne pouvons pas entrer dans des détails ſur toutes ces variations, tant parce qu'ils nous meneroient trop loin, que parce que dans les meilleures théories de la lune & qui ſont les plus récentes, on ne ſuppoſe plus que ſon orbite reſte toujours elliptique, ainſi qu'ont fait MM. Halley & Newton d'après Horroxius. Nous nous contenterons de remarquer que dans cette hypotheſe en ſuivant les principes que nous avons établis n° 293 & ſuiv. & en faiſant abſtraction de l'effet de la force L B, pour ne conſidérer que celui de la force L E, (à l'exemple de MM. Halley & Newton), on trouve que l'*accroiſſement ou la diminution de l'excentricité de l'orbite de la lune par rapport à ſon état primitif & naturel, le mouvement de la ligne des abſides de la lune dans le ſens direct ou rétrograde, & le plus ou moins de vîteſſe dans ce mouvement, dépendent de l'allongement ou du raccourciſſement du grand*

axe de l'orbite de la lune par rapport à l'état primitif & naturel de ce grand axe.

1056. Ainsi lorsque la lune est dans une syzygie, sa force centrale est la plus diminuée qu'il est possible pendant cette révolution ; le grand axe de son orbite est donc (290) le plus allongé ; son excentricité est la plus grande, & le mouvement de la ligne des absides est direct & le plus rapide. Tout cela décroît jusqu'à la quadrature suivante, savoir le mouvement de la ligne des absides par une gradation rallentie & le raccourcissement de l'axe & la diminution de l'excentricité par une gradation de plus en plus rapide : de sorte qu'à 54° 44′ depuis la syzygie la ligne des absides cesse de s'avancer ; elle est stationnaire ; le grand axe & l'excentricité sont remis dans leur état primitif & naturel. Au-delà de ce point le grand axe & l'excentricité deviennent plus petits que dans leur état primitif ; ils décroissent de plus en plus lentement ; la ligne des absides commence à rétrograder en accélérant sa vîtesse jusqu'à la quadrature, où l'axe & l'excentricité sont devenus les plus petits, & la vîtesse de la retrogradation de la ligne des absides la plus grande ; après quoi le grand axe & l'excentricité commencent à s'accroître de plus en plus, la ligne des absides à retrograder avec moins de vîtesse, de sorte qu'à 35° 16′ depuis la quadrature le grand axe & l'excentricité sont retournés dans leur état naturel, la ligne des absides est stationnaire. Enfin passé ce point le grand axe & l'excentricité s'accroissent au-delà de leur grandeur naturelle, & la ligne des absides commence à s'avancer directement, de sorte qu'au retour de la lune dans la syzygie, tout se retrouve dans le même état, à peu près, que dans la syzygie précédente.

1057. Dans cette explication on voit que le mouvement direct de la ligne des absides surpasse de beaucoup le mouvement retrograde, & qu'ainsi il n'est pas étonnant que cette ligne paroisse faire une révolution entiere selon la suite des signes dans l'espace d'environ 9 ans.

1058. En appliquant à cette même explication ce que nous avons dit plus haut (nº 1052 & 1053) on verra aisément

que ce que nous avons appellé le plus grand allongement de l'axe, la plus grande excentricité, la plus grande vîteſſe de la ligne des abſides, &c. n'étant que pour une ſeule révolution, il ne les faut pas entendre d'une maniere abſolue : puiſque ces quantités plus grandes varient dans les différentes révolutions, & qu'elles ne ſont réellement les plus grandes poſſibles, que quand l'orbite de la lune eſt le plus troublée, c'eſt-à-dire (1052), lorſque la ligne des abſides concourt avec celle des ſyzygies.

1059. V°, Mais ſi au lieu de regarder l'orbite de la lune comme une ellipſe variable & mobile ſur un foyer, on la traite comme une trajectoire qui termine tous les rayons vecteurs de la lune dirigés au centre de la terre, & dont les longueurs dépendent de la combinaiſon de l'effet des forces LB, LE avec celui de l'excentricité conſtante d'une ellipſe déterminée, & primitivement deſtinée à être l'orbite de la lune ; alors il ne ſera pas néceſſaire de donner à la ligne des abſides un mouvement alternativement direct & retrograde, ni à l'orbite de la lune une excentricité variable. Il ſuffira d'attribuer un mouvement direct & uniforme au point du périgée de la trajectoire que la lune doit décrire à chaque révolution, & de partager l'inégalité des vîteſſes de la lune en trois parties, l'une provenant de l'excentricité conſtante de l'ellipſe primitive, & qui dépend de l'anomalie de la lune, l'autre provenant de l'effet de la force L B qui dépend principalement de la diſtance de la lune à la ſyzygie ou au ſoleil ; & l'autre provenant de l'effet de la force LE, qui dépend non-ſeulement de la poſition de la ligne des abſides à l'égard de celle des ſyzygies, ou ce qui revient au même, de la diſtance du ſoleil à l'apogée de la lune ; mais auſſi de la longueur du rayon vecteur T L, laquelle longueur dépend de l'anomalie de la lune. De ſorte qu'il en réſultera les trois équations principales de la lune, qui ſont *l'équation du centre*, *la variation* & *l'évection*.

1060. VI°, *Dans chaque révolution de la lune, les nœuds de ſon orbite ſont toujours ſtationnaires lorſque la lune eſt en quadrature ; ils ſont ordinairement rétrogrades*

lorſque la lune eſt dans les ſyzygies ; ils rétrogradent le plus dans l'intervalle d'une quadrature à l'autre, lorſque la ligne des nœuds concourt avec celle des quadratures ; & ils rétrogradent le moins dans l'intervalle d'une quadrature à l'autre, lorſque la ligne des nœuds concourt avec celle des ſyzygies. En même temps l'angle de l'inclinaiſon de l'orbite de la lune ſur le plan de l'écliptique, va en augmentant dans l'intervalle d'une ſyzygie à la quadrature ſuivante, & en diminuant dans l'intervalle d'une quadrature à la ſyzygie ſuivante. Il eſt le plus grand qu'il eſt poſſible dans la quadrature où la ligne des nœuds concourt avec celle des ſyzygies, & le plus petit qu'il eſt poſſible dans la ſyzygie où la ligne des nœuds concourt avec celle des quadratures.

1061. DEM. Si le plan de l'orbite de la lune, n'étoit pas incliné à celui de l'écliptique, les parallélogrammes LGDF, LEAB, (fig. 94 & 95) qui ſervent à décompoſer les différentes forces centrales qui animent la lune, ſeroient dans le plan de l'écliptique, & par conſéquent ces forces n'auroient aucune action pour faire ſortir la lune hors de ce plan. Mais comme le plan de l'orbite de la lune eſt incliné d'environ 5° 9′, il ſuit que ces parallélogrammes ne ſont dans le plan de l'écliptique, que lorſque la lune L eſt eſt dans quelqu'un de ſes nœuds, & que dans ce cas les différentes forces centrales qui animent la lune ne peuvent rien changer à la ſituation du plan de ſon orbite. Mais ſi la lune en L a une latitude, il n'y a abſolument parlant aucune ligne du parallélogramme L G D F qui ſoit dans le plan de l'écliptique. Cependant, comme on a ſuppoſé DF couchée ſur S T, on doit conſidérer le triangle T L A comme ayant ſon côté T A dans le plan de l'écliptique, les deux autres T L, L A étant inclinés à ce plan. Du point A (fig. 99) tirez A V perpendiculairement au plan de l'orbite de la lune, que je ſuppoſe prolongé ſuffiſamment, enſorte que le point V ſoit dans ce plan, & conſtruiſez le parallélogramme L M A V dont L A ſoit la diagonale, pour décompoſer la force L A en deux ; l'une L M = A V perpendiculaire au plan de l'orbite de la lune, & que nous

avons appellé la *force déturbatrice* ; l'autre LV couchée ſur ce plan. A cauſe que le côté LV eſt toujours très-grand à l'égard de LM, & que le peu d'inclinaiſon de l'orbite de la lune rend toujours l'angle VLA très-petit, on peut prendre LV = LA. Or on a vu dans les théorêmes précédents les effets de la force LA ; reſte maintenant à conſidérer ici ceux de la force déturbatrice LM, & ſon rapport avec l'augmentation ou la diminution de la force centrale de la lune.

1062. Pour trouver le rapport de la force LM ou AV, avec TL, qui exprime l'augmentation de la force centrale dans la quadrature, ſoit TP la ligne des nœuds, du point V menez-lui la perpendiculaire VP, & joignez PA ; il eſt clair (Elem. 630) que l'angle VPA eſt égal à l'inclinaiſon du plan de l'orbite de la lune ſur le plan de l'écliptique. On a donc TR ou TL : TA : : R : 3 *ſin* LTR (715), enſuite TA : AP : : R : *ſin* ATP (Elem. 747), enfin AP : AV ou LM : : R : *ſin* APV. Multipliant terme-à-terme, & diviſant la premiere raiſon par TA × AP, on a (Elem. 296) TL : LM : : R^3 : 3 *ſin* LTR × *ſin* ATP × *ſin* APV. C'eſt-à-dire, *l'augmentation de la force centrale dans les quadratures, eſt à la force déturbatrice, comme le cube du rayon, eſt au triple ſinus de la diſtance de la lune à la quadrature, multiplié par le ſinus de la diſtance du nœud à la ſyzygie, & par le ſinus de l'inclinaiſon de l'orbite de la lune.* D'où il ſuit, 1°, que la force déturbatrice eſt nulle dans trois cas, quand la lune eſt en quadrature, quand la ligne des nœuds concourt avec celle des ſyzygies, & quand la latitude de la lune eſt nulle. Car, dans chacun de ces trois cas, un des ſinus étant nul, le produit total eſt nul. 2°, Que cette force eſt la plus grande poſſible, quand la lune étant dans les ſyzygies, elle eſt en même-temps dans ſes limites. Car alors les trois ſinus ſont les plus grands. 3°, Qu'en général cette force eſt d'autant plus grande, que la lune eſt plus près de la ſyzygie, ayant une plus grande latitude.

1063. L'effet de la force déturbatrice LM eſt de don-

ner à la lune une tendance continuelle vers le plan de l'écliptique auquel aboutiſſent les deux forces TL, AL; & par conſéquent la force déturbatrice tend non-ſeulement à faire varier l'inclinaiſon de l'orbite de la lune ſur le plan de l'écliptique, mais encore à faire que la lune arrive au plan de l'écliptique, & le traverſe plutôt qu'elle n'auroit fait ſans l'action de cette force. D'où il ſuit que ſelon que cette force augmente, diminue, ou eſt nulle, l'inclinaiſon de l'orbite de la lune diminue, augmente ou eſt la plus grande, & le nœud vers lequel la lune s'avance, s'en approche plus ou moins, ou point du tout.

1064. Car, 1°, ſoit la lune en L dans le paſſage de la conjonction à la premiere quadrature en R, on voit qu'à cauſe de la tendance de la lune vers M, & de ſa tendance vers N en vertu de ſon mouvement propre ſelon la ſuite des ſignes, la lune doit (88) ſuivre une route moyenne L *n*, qui ſoit dans la direction de la diagonale du parallélogramme formé ſur les deux droites qui expriment le rapport & la direction de ces deux tendances. Son orbite doit donc prendre la poſition L *n*, enſorte que le nœud *n* doit ſe trouver rapproché de N en *n* contre la ſuite des ſignes & l'inclinaiſon de cette orbite, ou l'angle ſphérique L *n* D doit devenir plus grand. C'eſt la même choſe dans le paſſage de l'oppoſition à la ſeconde quadrature. Donc en général *dans le paſſage d'une ſyzygie à la quadrature ſuivante, le nœud de la lune va en rétrogradant, & l'inclinaiſon de l'orbite en augmentant.*

1065. 2°, Soit la lune en *l* dans le paſſage de la ſeconde quadrature à la conjonction, ſoit *l m* la direction de la force qui agit ſur la lune pour la rapprocher du plan de l'écliptique; il eſt clair qu'à cauſe de la direction *l* C du mouvement propre de la lune ſelon la ſuite des ſignes, la lune doit ſe mouvoir dans la direction moyenne *l* Q, & ſon orbite D *l* C doit prendre la ſituation *d l* Q; ce qui fait que l'angle *l d m* de l'inclinaiſon devient plus petit que l'angle *l* D *m*, & que le nœud va de D en *d* contre la ſuite des ſignes. Donc, *dans le paſſage d'une quadrature à la ſyzygie ſuivante, le nœud de la lune va en rétrogradant, & l'inclinaiſon de l'orbite en diminuant.*

1066. Donc en général, *le nœud de la lune ne va jamais ſelon la ſuite des ſignes, il n'eſt ſtationnaire que lorſque la lune eſt en quadrature, ou que la lune eſt ſans latitude, & dans tous les autres cas il rétrograde avec d'autant plus de vîteſſe que la lune eſt plus proche de la ſyzygie, & qu'elle a une plus grande latitude.*

1067. *A l'égard de l'inclinaiſon de l'orbite de la lune*, on voit qu'elle change quatre fois à chaque révolution; elle augmente deux fois, & diminue deux fois; *elle eſt la plus grande lorſque la ligne des nœuds concourt avec celle des quadratures, & la plus petite lorſque la ligne des nœuds concourt avec celle des ſyzygies* (*u*).

ARTICLE VII.

De la Libration de la Lune.

1068. PUISQUE la lune eſt ſujette à pluſieurs inégalités conſidérables dans chacune de ſes révolutions autour de la terre, tandis que ſon mouvement de rotation eſt (355) uniforme, il ſuit que ces deux mouvements ne ſe doivent pas toujours accorder. Par exemple, ſi lorſque la lune a fait préciſément un quart de ſa rotation, elle n'a pas fait un quart de ſa révolution dans ſon orbite, parce que ſa vîteſſe aura été diminuée tant par ſon paſſage par l'apogée, que par le concours des deux forces centrales qui l'animent; alors les taches qui ſont vers le bord oriental de la lune, doivent paroître plus avancées ſur ſon diſque. Ce ſeroit tout le contraire ſi la vîteſſe de la lune ayant été accélérée, elle avoit décrit plus que le quart de ſon orbite.

1069. Deux autres cauſes qui ſe compliquent avec celle-ci, ſont l'inclinaiſon du plan de l'équateur de la lune, à l'égard de ſon écliptique, & l'inclinaiſon de cette écliptique de la lune à l'égard de l'écliptique de la terre. En

---

(*u*) C'eſt le contraire. V. art. 1019.

vertu de la premiere, chaque pole de l'équateur doit se présenter pendant une demi-révolution à un œil situé dans le plan de l'écliptique de la lune, & se cacher pendant l'autre demi-révolution, comme on a vu (907). En vertu de la seconde un œil placé sur la terre est tantôt au-dessus & tantôt au-dessous du plan de l'écliptique de la lune, à cause du mouvement de la lune en latitude. Tout cela doit donc produire une grande variété dans les phénomenes de la libration ; leur détail nous meneroit trop loin (*v*).

ARTICLE VIII.

Des inégalités dans les mouvemens de la Terre, produites par l'effet de la pesanteur de la Lune.

1070. SI la terre n'avoit pas de Satellite, elle ne recevroit d'impression sensible que celle de sa force centrale ou pesanteur à l'égard du soleil. Mais parce qu'elle est toujours accompagnée de la lune qui pese sur elle, il est clair que le mouvement de la terre autour du soleil en doit être altéré, quoique d'une quantité peu sensible ; car mettant à part l'effet de l'excentricité de l'orbite de la lune, ses autres inégalités dont la somme monte à environ deux degrés & demi, & qui sont causées par la combinaison des pesanteurs réciproques de la lune, de la terre & du soleil, ne sont remarquables que parce que la lune est fort proche de la terre. Ces inégalités étant vues du soleil, doivent paroître près de 340 fois plus petites, & par conséquent de 26 à 27″ au plus. Si donc la lune pouvoit transmettre par son action toutes ses inégalités à la terre, le mouvement annuel apparent du soleil n'en pourroit paroître altéré de plus de 27″, quantité assez peu sensible. Mais la masse de la lune étant environ 70 fois plus petite que celle

(*v*) V. la Sélénographie d'Hévélius ; les Elémens d'Astronomie de M. Cassini ; les Mémoires de Nuremberg, les Ephémérides de Berlin, & le XXe Livre de mon Astronomie.

de la terre, il eſt clair que l'action de la lune ſur la terre doit être à proportion plus foible. Auſſi les Géometres qui ont calculé avec le plus de ſoin tous les effets des actions réciproques de la lune & de la terre, ont trouvé qu'ils ne peuvent produire dans la théorie du ſoleil, qu'une petite équation qui monte à $8'' \frac{1}{2}$ au plus. On ne doit donc y avoir égard que dans les calculs du ſoleil, qui demandent une grande préciſion. Voyez les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1754. pag. 521 (*x*).

1071. La peſanteur de la lune ſur la terre, jointe à la figure applatie de la terre, produit encore deux phénomenes aſſez ſenſibles : l'un eſt le flux & le reflux de la mer, qui eſt un effet étranger à l'Aſtronomie pure; l'autre eſt de faire varier inégalement la poſition du plan de l'équateur à l'égard de celui de l'écliptique, c'eſt-à-dire, de faire rétrograder avec des vîteſſes inegales l'interſection de ces deux plans, & de cauſer des variations périodiques dans leur inclinaiſon; c'eſt ce que nous allons faire entendre en peu de mots (*y*).

1072. Il faut remarquer d'abord que le plan de l'orbite de la lune étant incliné à celui de l'écliptique, d'environ $5^{\circ}\, 9'$, & que la ligne des nœuds paſſant ſucceſſivement par tous les degrés de l'écliptique dans l'eſpace de 19 ans, il ſuit que le plan de cette orbite change à tout moment d'inclinaiſon par rapport au plan de l'équateur terreſtre. Car quand le nœud aſcendant de la lune concourt avec le premier point du Bélier, qui eſt le nœud aſcendant de l'équateur, l'inclinaiſon de l'orbite de la lune eſt à ſon égard de $28^{\circ}\frac{2}{3}$, (c'eſt la ſomme de $5^{\circ}\frac{1}{6}$ & de $23^{\circ}\frac{1}{2}$). Au contraire quand le nœud aſcendant de la lune concourt avec le premier point de la Balance, qui eſt le nœud deſcendant de l'équateur, l'orbite de la lune n'eſt inclinée à l'équateur que de $18^{\circ}\frac{1}{3}$. De ſorte que l'inclinaiſon de l'or-

(*x*) M. Clairaut y donne le calcul des inégalités que la terre éprouve par les attractions de la lune, de Jupiter & de Vénus.

(*y*) Newton ayant trouvé la loi de l'attraction en tira cette conſéquence dans ſon fameux Livre des Principes, en 1687.

bite de la lune par rapport au plan de l'équateur, croît pendant un peu plus de 9 ans, depuis 18° $\frac{2}{3}$ jusqu'à 28° $\frac{1}{3}$, & décroît de même pendant neuf autres années.

1073. Il faut remarquer encore que si la terre étoit un globe homogene parfaitement rond, sa force centrale à l'égard du soleil & de la lune ne causeroit aucun changement dans la position de son axe (355). Mais comme elle a (764) une figure fort approchante de celle d'un sphéroïde formé par la rotation d'une ellipse sur son petit axe, si on conçoit dans ce sphéroïde une sphere inscrite, qui ait pour axe le petit axe du sphéroïde, l'excédent de la matiere du sphéroïde qui ne sera pas comprise dans la sphere, enveloppera cette sphere comme une couche fort mince vers chaque pole, mais dont l'épaisseur augmente de plus en plus de part & d'autre en approchant de l'équateur.

1074. Cela posé, imaginons que toute la matiere qui compose cette couche, soit réduite en une espece d'anneau adhérent à la terre dans l'endroit où cette couche est la plus épaisse, c'est-à-dire, dans le plan de l'équateur ; alors les deux points d'intersection de cet anneau avec le plan de l'écliptique, ou si on veut, *ses deux nœuds*, sont les deux points équinoxiaux du Belier & de la Balance. Supposons encore que les particules de matiere qui composent cet anneau soient comme autant de petites lunes, qui fassent leur révolution autour de la terre en même temps que les points de sa surface, c'est-à-dire, en $23^h\ 56'\ 4''$; toutes ces lunes seront animées de trois forces centrales ou pesanteurs : la premiere, & qui est comme infiniment grande par rapport aux deux autres, est leur pesanteur à l'égard du centre de la terre ; la seconde est leur pesanteur à l'égard de la vraie Lune ; & la troisieme est leur pesanteur à l'égard du soleil.

1075. Donc en combinant la premiere de ces pesanteurs avec chacune des deux autres, de la même maniere qu'on a combiné ci-dessus les deux pesanteurs de la lune, on voit, I°. Que *les nœuds de cet anneau doivent toujours tendre à rétrograder, & que par conséquent la ligne d'in-*

terſection des plans de l'équateur & de l'écliptique doit tendre à rétrograder, ce qui fait *la préceſſion des équinoxes.*

1076. II°. Qu'à cauſe que le plan de l'écliptique dans lequel le ſoleil eſt ſitué, fait conſtamment un angle de $23^{o}\frac{1}{2}$ avec celui de l'équateur, la partie de la préceſſion des équinoxes qui réſulte de la combinaiſon de la peſanteur de l'anneau ſur la terre, avec celle qu'il a ſur le ſoleil, eſt ſenſiblement égale à chaque révolution de la terre.

1077. III°. Mais parce que l'orbite de la lune eſt tantôt inclinée de $18^{o}\frac{1}{3}$, tantôt de $28^{o}\frac{2}{3}$ ſur le plan de l'équateur, la quantité de la rétrogradation des nœuds de l'anneau, ou la partie de la préceſſion des équinoxes qui réſulte de la combinaiſon de la peſanteur de l'anneau à l'égard de la terre & de la lune, doit varier, & être la plus grande quand l'angle de cette inclinaiſon eſt le plus grand, & au contraire ; puiſque LM (fig. 99) qui repréſente la force qui cauſe la rétrogradation des nœuds de la lune, eſt d'autant plus grande, que les plans DMN, DCN ſont plus écartés.

1078. D'où il ſuit que *la préceſſion des équinoxes*, qui réſulte de ces deux cauſes, *varie pendant une période d'environ 19 ans ; qu'elle eſt la plus grande*, (& ſelon les obſervations de M. Bradley, d'environ 58″ en un an,) *lorſque le nœud aſcendant de la lune arrive à 0 degré du Belier ; elle eſt la plus petite* (& d'environ 43″ par an,) *lorſque le nœud aſcendant de la lune atteint 0° de la Balance.* Enfin *elle eſt moyenne* (& d'environ $50''\frac{1}{3}$ par an) *lorſque les nœuds de la lune ſont dans le colure des ſolſtices.*

1079. Par la même raiſon l'inclinaiſon de cet anneau, & par conſéquent celle du plan de l'équateur ſur le plan de l'écliptique, doit être ſujette à des variations perpétuelles : celles qui proviennent de la révolution diurne de cet anneau, & celles qui proviennent de l'action du ſoleil, ſont trop petites pour être obſervées ; il n'y a que celles qui proviennent de l'inégalité de l'action de la lune, qui croiſſent pendant plus de 9 ans, par des degrés preſque inſenſibles,

puis décroissent de même pendant 9 autres années, & par ce moyen font paroître l'obliquité de l'écliptique plus grande d'environ $18''$ lorsque le nœud ascendant de la lune est dans le point équinoxial du Bélier, que lorsque ce nœud est dans le point équinoxial de la Balance ; ainsi l'obliquité de l'écliptique est sujette à deux mouvements, l'un sensiblement uniforme (455) par lequel elle décroît d'environ $\frac{3}{4}$ de minutes en un siecle, l'autre périodique & inégal, par lequel elle augmente d'environ $9''$ en neuf années, & diminue d'autant pendant les neuf années suivantes.

ARTICLE IX.

Explication & calcul des inégalités apparentes dans le mouvement des Astres, causées par la précession inégale des équinoxes : avec la méthode de calculer les mouvements apparents des Etoiles qui en résultent.

1080. SOit AEC (fig. 75) une moitié de ce que nous avons appellé le colure des équinoxes, E le pole de l'écliptique, ADC une moitié de l'écliptique : P le pole de l'équateur, AKC une moitié de l'équateur; A, C les points équinoxiaux. Le pole de l'équateur doit toujours être à 90 degrés des points équinoxiaux : si donc on imagine que le pole P décrive uniformément & dans l'espace de 25740 ans, le petit cercle PHN dont le pole est en E, les intersections A, C se feront successivement dans différents points de l'écliptique ; & c'est-là ce qu'on appelle *la précession moyenne des équinoxes*, laquelle est de $50''\frac{1}{3}$ par an.

1081 Mais parce que les observations des étoiles ont fait voir qu'à chaque révolution du nœud de la lune, l'inclinaison du plan de l'équateur varie à l'égard du plan de l'écliptique, ensorte qu'il en résulte un mouvement conique dans l'axe de l'équateur ; il suit que le pole de l'équateur ne peut rester dans le cercle PHN, mais qu'abstraction faite de son mouvement uniforme, dont nous avons

parlé dans le nº précédent, il doit décrire en 19 ans autour du point P une espece d'épicycle *p t r* : & ce mouvement s'appelle *la nutation de l'axe de la terre.*

1082. Par la combinaison du mouvement uniforme dans le cercle PHN, & du mouvement dans l'épicycle *p t r*, le pole *p* de l'équateur décrit réellement des épicycloïdes fort allongées, dont la base est, selon les observations de M. Bradley, de 6′ 13″ d'un grand cercle, & l'axe de 18″½ d'un grand cercle.

1083. Comme les longitudes des astres se comptent depuis les intersections actuelles A, C de l'équateur & de l'écliptique, les compléments des latitudes depuis le pole E, les ascensions droites depuis les intersections actuelles A, C, & les compléments des déclinaisons depuis le pole *p*; il est évident Iº, que *ni la précession moyenne des équinoxes, ni la nutation de l'axe de la terre ne peuvent altérer les latitudes des astres*, puisque le point E reste fixe. IIº, *Que la précession moyenne fait varier uniformément toutes les longitudes, & inégalement toutes les ascensions droites*, parce qu'elle procure aux deux colures un mouvement angulaire uniforme autour du point E, & que les longitudes se comptent par des angles autour du point E, tandis que les ascensions droites se comptent par des angles autour du point P. IIIº, Que *la nutation du pole fait varier inégalement les longitudes & les ascensions droites*, puisqu'elle se fait tantôt dans un sens & tantôt dans un autre. IVº. Que *les déclinaisons des astres sont inégalement altérées par ces deux causes.*

1084. Pour calculer ces petits mouvements dans les étoiles, nous les distinguerons sous deux noms : nous appellerons simplement *précession* l'effet de la précession moyenne, & *déviation* (z) l'effet de la nutation de l'axe de la terre : la déviation n'est proprement qu'une équation propre à représenter la précession inégale des équinoxes.

(z) C'est ce que les autres Astronomes appellent *Nutation* ; elle a été découverte par Bradley, & annoncée en 1748 dans les Transactions philosophiques.

Calcul de la précession.

1085. LA précession en longitude étant uniforme, elle est simplement proportionnelle au temps, à raison de 50'', 3 par an : on la suppose toujours donnée, pour la réduire à la précession en ascension droite, & à la précession en déclinaison.

1086. *Pour la précession en ascension droite.* Cherchez dans les tables Astronomiques le point de l'écliptique qui répond au point de l'équateur qui marque l'ascension droite de l'étoile : prenez dans ces mêmes Tables la déclinaison de ce point de l'écliptique : appellez X la somme de cette déclinaison & de celle de l'étoile, si elles sont de dénomination différente ; ou leur différence, si elles sont de même dénomination : faites cette analogie : *Le produit du cosinus de la déclinaison de l'étoile par le cosinus de la déclinaison du point de l'écliptique qui répond à l'ascension droite de l'étoile, est au produit du cosinus de l'obliquité de l'écliptique par le cosinus de l'arc* X ; *comme la précession en longitude, est à la précession en ascension droite*, laquelle est toujours de même signe que la précession en longitude, excepté lorsque l'arc X excede 90 degrés : auquel cas la précession en ascension droite est négative à l'égard de la précession en longitude.

1087. Car dans le triangle PEA (fig. 45. Voyez n° 437 l'explication des parties de cette figure) où PE & AE sont constants, on a (Trig. 299) $dE : dP :: cof\,AO \times t\,PAE : cof\,AR \times f\,PAE$. Or dans le triangle ASR, on a (Trig. 222) $t\,RAS$ ou $t\,PAE = \frac{cot\,ASR}{cof\,AS}$, & (Trig. 221) $f\,PAE = \frac{cof\,ASR}{cof\,AR}$: donc $dE : dP :: \frac{cof\,AO \times cot\,ASR}{cof\,AS} : \frac{cof\,AR \times cof\,ASR}{cof\,AR} :: cof\,AO \times cot\,ASR : cof\,AS \times cof\,ASR$. Mettant à la place du rapport de $cot\,ASR$ à $cof\,ASR$, celui de 1 à $f\,ASR$ (Trig. 50), ou parce que $f\,ASR$ ou $f\,OSC = \frac{cof\,SCO}{cof\,OS}$ (Trig. 221), celui de $cof\,OS \times$ à

$cos\,SCO$, on a $dE : dP :: cos\,AO \times cos\,OS : cos\,SCO \times cos\,AS$.

1088. *Pour la précession en declinaison.* Faites (Trig. 301) *comme le quarré du rayon au produit du sinus de l'obliquité de l'écliptique par le cosinus de l'ascension droite de l'etoile, ainsi la precession en longitude est à la precession en déclinaison*, laquelle est $\left\{\begin{array}{c}\text{additive}\\ \text{soustractive}\end{array}\right\}$ pour les étoiles $\left\{\begin{array}{c}\text{boréales}\\ \text{australes}\end{array}\right\}$ lorsque leur ascension droite est entre 270° & 90°. Mais elle est $\left\{\begin{array}{c}\text{soustractive}\\ \text{additive}\end{array}\right\}$ quand l'ascension droite est entre 90° & 270° ; ce qui doit cependant s'entendre lorsqu'on veut réduire la déclinaison d'un temps antérieur à celle d'un temps postérieur ; car il faudroit changer les signes, si l'on vouloit conclure la déclinaison d'un temps postérieur à celle d'un temps antérieur.

Calcul de la déviation.

1089. SELON la théorie exposée ci-dessus, lorsque le nœud ascendant de la lune est dans ♈ 0°, le pole de l'équateur doit être le plus éloigné de celui de l'écliptique, il doit donc être en *r* sur l'épicycle *p u r* (fig. 75), & quand le ☊ de la lune est en ♎ 0°, le pole doit être en *u* : d'où il suit qu'en ajoutant 3 signes à la longitude du ☊ de la lune, on a la position du pole dans son épicycle, laquelle peut s'appeller *l'ascension droite du pole*, puisqu'elle se compte par des angles autour du point P.

1090. Soit donc en *p* cette ascension droite à l'instant donné. Alors E *p d* devient une portion du colure des solstices, *a* E *c* une moitié de celui des équinoxes, *a* F ou *a* ES mesure la longitude apparente de l'astre S, sa latitude SF ne change pas, *ap* S ou *ak* mesure son ascension droite, SK sa déclinaison, & E*p* l'obliquité actuelle de l'écliptique. La différence entre ces positions & celles qu'on auroit en faisant passer le colure des solstices par le point P s'appelle respectivement, *la déviation en longitude, en ascension droite, en déclinaison.*

1091. *Pour la déviation en longitude.* Calculez le lieu du ☊ de la lune ; ajoutez-y 3 ſignes, pour avoir l'aſcenſion droite du pole ; & faites, *le ſinus de l'obliquité de l'écliptique eſt au coſinus de l'aſcenſion droite du pole, comme* $9''$ *ſont à la déviation en longitude*, qu'il faut ajouter à la longitude lorſque l'aſcenſion droite du pole eſt dans les trois derniers ou dans les trois premiers ſignes, & qu'il faut retrancher, lorſque l'aſcenſion droite du pole eſt depuis trois ſignes incluſivement, juſqu'à neuf ſignes excluſivement : & l'on a la longitude de l'étoile affectée de la déviation.

1092. Car la déviation en longitude eſt exprimée ici par Aa ou Dd ou pEP : ſuppoſant du point p la perpendiculaire px, on a $R : \mathit{ſ}pu :: Pp$ ou $9'' : px = 9'' \times \mathit{ſ}pu$, enſuite $\mathit{ſ}Ex$ ou $\mathit{ſ}EP : px$ ou $9'' \times \mathit{ſ}pu :: r : Dd = \frac{9'' \times \mathit{ſ}pu}{\mathit{ſ}EP}$,

1093. *Pour l'obliquité de l'écliptique.* Faites : *Le rayon eſt au ſinus de l'aſcenſion droite du pole, comme* $9''$ *ſont à la variation de l'obliquité de l'écliptique* ; cette variation eſt additive dans les ſix premiers ſignes de l'aſcenſion droite du pole, & ſouſtractive dans les ſix derniers.

1094. *Pour la déviation en aſcenſion droite.* Faites d'abord : *la tangente de l'obliquité de l'écliptique eſt au coſinus de l'aſcenſion droite du pole, comme* $9''$ *ſont à une premiere équation*, additive dans les trois derniers & les trois premiers ſignes de l'aſcenſion droite du pole, ſouſtractive dans les autres. Otez enſuite l'aſcenſion droite du pole de l'aſcenſion droite de l'étoile, pour avoir l'argument de la ſeconde équation, & faites : *la cotangente de la déclinaiſon de l'étoile eſt au ſinus de cet argument, comme* $9''$ *ſont à la ſeconde équation*, $\left\{\begin{matrix}\text{additive}\\ \text{ſouſtractive}\end{matrix}\right\}$ pour les étoiles $\left\{\begin{matrix}\text{boréales}\\ \text{auſtrales}\end{matrix}\right\}$ dans les ſix premiers ſignes de l'argument, $\left\{\begin{matrix}\text{ſouſtractive}\\ \text{additive}\end{matrix}\right\}$ dans les ſix derniers ſignes de l'argument, pour avoir l'aſcenſion droite de l'étoile affectée de la déviation.

1095. Car la déviation en aſcenſion droite eſt la différence entre l'angle EPS & l'angle EpS : prolongez Pp en G, & dans le triangle EPG, on a (Trig. 276) dPG ou pP : dEPG : : tEP : $ſ$GPE. Dans le triangle GPS on a de même dPG ou Pp : dSPG : : t PS : $ſ$SPG.

1096. *Pour la déviation en déclinaiſon.* Otez l'aſcenſion droite du pole de l'aſcenſion droite de l'étoile pour avoir l'argument de la déviation, & faites : *le rayon eſt au coſinus de cet argument, comme* 9″ *ſont à la déviation en déclinaiſon,* {additive / ſouſtractive} pour les étoiles {boréales / auſtrales} dans les trois derniers & les trois premiers ſignes de l'argument, {ſouſtractive / additive} dans les ſix autres ſignes, pour avoir la déclinaiſon de l'étoile affectée de la déviation. Car dans le triangle SPG, on a (Trig. 273) dPG : dPS : : R : $coſ$ SPG.

1097. REMARQUE. En examinant ſes obſervations M. Bradley s'eſt apperçu qu'au lieu du cercle prt on pouvoit employer une ellipſe dont $ru = 18''$ fût le grand axe : & M. d'Alembert (a) a trouvé par le calcul des forces qui produiſent la nutation de l'axe de la terre, que le petit axe de cette ellipſe devoit être $= 13'', 4$: ce qui s'accorde avec les calculs faits depuis par M. Euler. Afin donc d'avoir des équations plus exactes, il faut imaginer une ellipſe qui ſoit la projection orthographique de l'épicycle prt : il faut placer ſur l'épicycle le point p ſelon l'aſcenſion droite du pole, & chercher (528) ſon point correſpondant dans l'ellipſe, avec ſa diſtance pP au centre de cette ellipſe ; on pourra les trouver par ces deux analogies : *Comme* 134 *à* 180 ; *ainſi la tangente de l'aſcenſion droite du pole trouvée ci-deſſus, eſt à la tangente de l'aſcenſion droite réduite, &*

(a) Recherches ſur la preceſſion des équinoxes 1749. C'eſt le premier Ouvrage où ce problême difficile ait été réſolu analytiquement & complétement.

qu'on doit employer à la place de l'autre dans le calcul des regles précédentes. Le ſinus de l'aſcenſion droite ainſi réduite eſt au ſinus de l'aſcenſion droite employée précédemment, comme 9'' ſont à la quantité qu'il faut employer dans toutes les regles précédentes à la place de 9''.

1098. Outre cette déviation, il y en a encore une à laquelle on doit avoir égard lorſqu'il s'agit de faire des réductions de longitude & latitude d'étoiles pour des années un peu éloignées de l'époque. Nous avons remarqué (455) que l'obliquité de l'écliptique alloit maintenant en diminuant d'environ 46'' par ſiecle, (*b*) la théorie de ces mouvements, & les hauteurs du pole qui paroiſſent être invariables ſur terre, prouvent que c'eſt le pole de l'écliptique qui ſe rapproche de celui de l'équateur, d'où il ſuit que cette diminution n'affecte ni les aſcenſions droites ni les déclinaiſons des étoiles, mais ſeulement leurs longitudes & latitudes. Or par les analogies différentielles (Trig. 276 & 273) en ſuppoſant l'aſcenſion droite & la déclinaiſon conſtantes, on trouvera aiſément les formules du calcul des variations en longitude & en latitude qui répondent à une variation donnée dans l'obliquité de l'écliptique (*c*).

Application de ces calculs aux Planetes.

1099. Puiſque (745) les mouvements des planetes ſe comptent depuis l'interſection du Bélier, la préceſſion moyenne ſe trouve employée dans tous les calculs qui concernent les planetes. Il reſte donc à y appliquer la déviation en ſuivant les mêmes regles que pour les étoiles. Or dans la pratique de l'Aſtronomie, lorſqu'on fait tous ces calculs pour les étoiles, c'eſt preſque toujours pour avoir leur poſition apparente ; c'eſt-à-dire, affectée de tous ces petits mouvements : & lorſque l'on les fait pour les planetes, c'eſt preſque toujours pour dépouiller une poſition

---

(*b*) Il y a des Aſtronomes qui réduiſent cette diminution à 30'' par ſiecle.

(*c*) Ce n'eſt pas la ſeule variation de l'obliquité de l'écliptique qui produit les variations en longitude & en latitude, mais un mouvement du plan de l'écliptique produit par les attractions de Vénus & de Jupiter ſur la terre ; ainſi l'on ne peut pas dire qu'elle n'affecte point les aſcenſions droites. Mais on en peut voir le détail dans mon *Aſtronomie*, Livre XVIe, & dans les Mémoires de l'Académie pour 1758 & 1761.

obſervée de l'effet de ces petits mouvements. C'eſt pourquoi quand on voudra ſe ſervir des regles précédentes pour faire les réductions néceſſaires à une poſition obſervée, il faudra changer les ſignes de la déviation, & la mettre additive où elle eſt marquée ſouſtractive, & réciproquement.

CHAPITRE II.

Du calcul des Eclipſes des Satellites vues de deſſus la ſurface de la Planete principale.

ARTICLE PREMIER.

De la détermination des Phaſes des Eclipſes de Lune & de Soleil.

1100. SUIVANT la théorie des éclipſes des ſatellites qui a été expliquée ci-deſſus (n°. 960 & *ſuiv.*) une éclipſe de ſoleil commence & finit lorſque l'arc de la diſtance des centres du ſoleil & du ſatellite paroît égale à la ſomme de leurs demi-diametres, d'où il ſuit qu'*ayant calculé par les Tables le lieu & l'inſtant de la conjonction véritable du ſatellite avec le ſoleil, ſi la latitude apparente du ſatellite eſt plus petite que cette ſomme, il y aura infailliblement une éclipſe de ſoleil*, puiſque cette latitude exprime alors l'arc de la diſtance des centres du ſoleil & du ſatellite vue de deſſus la planete principale.

1101. De même, l'éclipſe d'un ſatellite ou d'une lune doit commencer & finir lorſque ſon centre paroît éloigné du point de l'écliptique de la planete, directement oppoſé au centre du ſoleil, (on appelle ce point le *centre de l'ombre*), de la ſomme du demi-diametre du ſatellite vu de la planete, & du demi-diametre de l'ombre à l'endroit où il la traverſe : & une éclipſe de ſatellite commence ou finit d'être totale, lorſque le centre du ſatellite eſt éloigné du

centre de l'ombre, de l'excès du demi-diametre de l'ombre sur celui du satellite; car alors on conçoit que le bord du disque du satellite touche en-dedans le bord de l'ombre. On appelle *temps de l'immersion*, celui que le satellite emploie à entrer totalement dans l'ombre, & *temps de l'émersion*, celui qu'il emploie à s'en dégager entiérement.

1102. Il suit de-là, qu'*ayant calculé par les tables Astronomiques le moment & le lieu de l'opposition du satellite, on s'assure qu'il sera éclipsé, lorsque sa latitude, au moment de son opposition, est plus petite que la somme des demi-diametres de l'ombre & du satellite vu de la planete; & que l'éclipse sera totale, lorsque la latitude est plus petite que l'excès du demi-diametre de l'ombre, sur le demi-diametre du satellite.* (*d*)

1103. Pour avoir la grandeur du demi-diametre de l'ombre à l'endroit où le satellite la traverse, *il faut ajouter ensemble les parallaxes horizontales du soleil & du satellite à l'égard de la planete principale, & en retrancher le demi-diametre du soleil vu de la planete.*

1104. Car, soit SA (fig. 96) le demi-diametre du soleil S vu de la planete T sous l'angle STA, soit CI un arc de l'orbite du satellite L, qui doit traverser l'ombre BEG de la planete T. Le centre de cette ombre est en L, & l'arc CL (qui est sensiblement une ligne droite) est le demi-diametre de l'ombre. L'angle BAT est (626) égal à la parallaxe horizontale du soleil, l'angle BCT est égal à la parallaxe horizontale du satellite. L'angle CTD est (Elem. 492) égal à la somme de ces deux parallaxes; si donc on en retranche l'angle LTD ou ATS égal au demi-diametre du soleil vu de la planete, restera l'angle CTL ou l'arc CL, qui est le demi-diametre de l'ombre de la planete, à l'endroit où le satellite la traverse.

(*d*) Cet article & les suivans ne s'appliquent véritablement qu'aux éclipses de lune; car pour les satellites de Jupiter, on ne tient compte ni de leurs parallaxes ni de leurs demi-diametres. Cependant il y a sur la détermination des diametres des satellites un très-bon Mémoire de M. Bailly, dans le Volume de l'Académie, pour 1771.

1105. REMARQUE I. Quoique le point C ſoit le terme de l'ombre de la planete, cependant la lumiere du ſatellite eſt extrêmement affoiblie avant que d'y arriver ; parce qu'à meſure qu'il avance depuis le point H, où il rencontre la tangente HBM juſques vers C, il perd de plus en plus la vue du diſque du ſoleil S, qui paroît ſe cacher derriere la planete T, & par conſéquent la lumiere du ſatellite s'affoiblit de plus en plus, juſqu'à ce qu'étant en C, il perd totalement la vue du ſoleil & la lumiere. L'eſpace HC étant par ce moyen beaucoup moins éclairé du ſoleil, s'appelle *la Pénombre.* Il en eſt de même de l'eſpace KI, dans lequel le ſatellite devient de plus en plus éclairé.

1106. REM. II. Il arrive quelquefois qu'un ſatellite paſſe aſſez près de l'ombre pour entrer en partie dans cette pénombre. Alors on le voit s'obſcurcir vers la partie la plus voiſine de l'ombre, & recouvrer enſuite ſon éclat.

1107. REM. III. Comme l'atmoſphere d'air qui environne la terre eſt une matiere aſſez denſe, ſur-tout vers la ſurface de la terre, elle contribue à augmenter la grandeur de l'ombre de la terre : c'eſt pourquoi, on ajoute quelques ſecondes à la parallaxe horizontale de la lune, plus ou moins ſelon les différentes opinions qu'on a de l'étendue de cette atmoſphere.

1108. REM. IV. Un autre effet de l'atmoſphere, eſt de briſer les rayons du ſoleil qui ſont tangents à la planete, & de les faire rentrer en-dedans de l'ombre vers L, ce qui en diminue l'obſcurité ; cet effet eſt principalement ſenſible dans les éclipſes totales de lune, pendant leſquelles on ne la perd pas de vue ordinairement, & où même la lune eſt plus viſible vers le milieu de ſon éclipſe en L, que lorſqu'elle eſt proche des termes C, K de l'ombre.

1109. PROBLEME I. *Déterminer graphiquement toutes les circonſtances d'une éclipſe de ſatellite.*

1110. SOLUT. Calculez par le moyen des Tables Aſtronomiques le lieu du ſatellite réduit à l'écliptique, ſa latitude, ſon mouvement horaire, ſa parallaxe horizontale & ſon demi-diametre ; enſuite le lieu du ſoleil, ſon mouvement horaire, ſa parallaxe horizontale, & ſon demi-dia-

metre; le tout pour un instant quelconque peu différent du moment où le satellite doit être en opposition. Soit proposée, par exemple, l'éclipse de lune du 30 Août 1746. Ayant trouvé par le calcul des Tables de M. Cassini, que l'opposition doit arriver vers minuit, je cherche tous les éléments énoncés ci-dessus pour l'instant de 11 h 30′ temps vrai, & je trouve le lieu de la lune dans 7° 4′ 33″)(, la latitude 41′ 50″ australe, son mouvement horaire 31′ 28″, sa parallaxe horizontale 56′ 15″, son demi-diametre 15′ 13″; le lieu du soleil dans 7° 18′ 36″ ♍, son mouvement horaire 2′ 25″, son demi-diametre 15′ 55″, sa parallaxe horizontale 10″ : d'où il suit que le demi-diametre de l'ombre de la terre est (1103) 40′ 29″; ou, en y ajoutant 49″ à cause de l'atmosphere, 41′ 18″; l'inclinaison de l'orbite de la lune avec son cercle de latitude, est de 84° 45′ vers l'Orient : ce qui fait voir que la lune tend vers son nœud ascendant.

1111. Sur une grande feuille de papier je construis une échelle AB (fig. 97) de 60 minutes de degrés, ensorte que chaque minute soit au moins de deux lignes du pied de roi. Je marque à gauche l'Orient, à droite l'Occident, en-haut le Nord, en-bas le Midi. Je tire une ligne indéfinie OC qui représente l'écliptique, sur laquelle je prends à volonté un point D pour le lieu de la lune à 11^h 30′. J'éleve la perpendiculaire DL du côté d'en-bas, à cause que la latitude de la lune est australe; je la termine en L, en faisant DL de 41′ 50″ par le moyen de l'échelle. Alors le point L représente le vrai lieu de la lune à 11^h 30′. Je fais en L l'angle DLP de 84° 45′ du côté de l'Orient, & la droite PL représente l'orbite de la lune. On suppose à cause de la régularité des mouvements de la lune dans les syzygies (1048), & du peu de chemin qu'elle fait pendant le temps d'une éclipse, que l'arc de son orbite qu'elle parcourt est rectiligne, & qu'elle le décrit uniformément. Avec l'échelle je marque de D vers l'Orient en Z un espace de 31′ 28″, qui est le mouvement horaire de la lune par rapport à l'écliptique, je tire ZF perpendiculaire à OC, & le point F est le vrai lieu de la lune dans son orbite véritable à 12^h 30′.

1112. Je prends la distance de la lune à l'opposite du lieu du soleil, c'est-à-dire, la différence entre 7° 18' 36", & 7° 4" 33", & j'ai 14' 3" pour la quantité dont la lune est moins avancée, & par conséquent plus occidentale que le lieu de l'opposite du soleil, qui est en même-temps le lieu du centre de l'ombre de la terre. Je porte par le moyen de l'échelle AB ces 14' 3" de D vers l'Orient en G, & le point G est le lieu du centre de l'ombre à 11^h 30'. Je marque de G en M 2' 25", qui est le mouvement horaire du soleil ou de l'ombre, & le point M est le lieu du centre de l'ombre à 12^h 30'; & parce que l'Observateur ne voit de dessus la terre que le mouvement relatif de la lune, je joins MF, par le point G je lui tire la parallele & égale GK, & le point K est (512) le lieu apparent de la lune par rapport à l'ombre supposée immobile en G. Par le point L je tire NLKI, qui est l'orbite optique ou apparente de la lune. (*e*) Je divise l'espace LK en minutes de temps, comme de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5, &c. en marquant 11^h 30' au point L, & 12^h 30' au point K. Je continue cette division tout le long de l'orbite apparente NI, ce qui me fait connoître les lieux apparents du centre de la lune à tous les instants qui ont précédé & suivi celui de 11^h 30', pour lequel j'ai fait mes calculs.

1113. Du point G je tire sur cette orbite apparente la perpendiculaire GE; comme elle est la plus courte ligne qu'on y puisse mener du point G, où le centre de l'ombre est supposé immobile, elle détermine en E le lieu apparent du centre de la lune à l'instant où il étoit le plus près qu'il est possible du centre de l'ombre, & par conséquent à l'instant du milieu de l'éclipse. Par les divisions de la ligne NI, je vois que le point E répond à 12^h 7'; d'où je conclus le milieu de l'éclipse à douze heures 7'.

1114. Pour en avoir le commencement & la fin, je

(*e*) C'est celle que j'appelle orbite relative ou orbite composée, afin de ne pas la confondre avec l'orbite apparente qui est vue de la surface de la terre, & affectée par la parallaxe.

prends sur l'échelle 56′ 31″, somme des demi-diametres de l'ombre & de la lune, & du point G comme centre, je détermine sur l'orbite apparente de la lune les points N, I, qui tombent vers les divisions de $10^h 44'\frac{1}{2}$, & de $13^h 29\frac{1}{2}$: d'où je conclus le commencement de l'éclipse a $10^h 44'\frac{1}{2}$, & la fin le 31 à $1^h 29'\frac{1}{2}$ du matin.

1115. Enfin, pour savoir la grandeur de l'éclipse, du point E comme centre avec un rayon pris sur l'échelle de 15′ 13″ égal au demi-diametre de la lune, je décris un cercle VFH, qui représente la lune au milieu de son éclipse ; j'en divise le diametre VH en douze parties égales, qu'on appelle *doigts écliptiques* : du point G comme centre avec un rayon pris sur l'échelle de 41′ 18″ égal au demi-diametre de l'ombre, je décris un arc de cercle SXT qui marque le terme de l'ombre, la ligne VX est la partie du diametre de la lune enfoncée dans l'ombre, & le nombre des divisions de cette ligne, qui est ici $6\frac{2}{5}$, exprime la grandeur de l'éclipse, laquelle se trouve, comme on voit, dans la partie septentrionale du disque de la lune, & de 6 doigts 24′. Car chaque doigt se subdivise en 60 minutes.

1116. REMARQUE I. On voit par la construction de cette figure, qu'en réduisant l'orbite véritable LF de la lune à son orbite apparente LK, on diminue l'angle de l'inclinaison de l'orbite de la lune sur son cercle de latitude, d'une petite quantité KLF, qui dépend du rapport des mouvements horaires du soleil & de la lune, & qu'en même-temps on rend l'arc LK de l'orbite apparente plus petit que l'arc horaire LF de l'orbite veritable, d'une quantité sensiblement égale au mouvement horaire KF ou GM du soleil. C'est pourquoi, dans la pratique, pour abréger, on ôte de l'inclinaison de l'orbite de la lune cet *angle de réduction* KLF, qu'on trouve dans les tables Astronomiques modernes (*f*), par ce moyen on tire tout de suite l'orbite apparente LI, sur laquelle on prend une portion LK égale à l'excès du mouvement horaire de la lune

(*f*) De M. Cassini.

dans ſon orbite ſur celui du ſoleil, (*g*) (on appelle cet excès *le mouvement horaire composé*), & on la diviſe en temps, comme on a vu.

1117. Autre exemple pour l'éclipſe totale arrivée le 8 Août 1729. Selon les Tables de M. Caſſini, on trouve l'oppoſition de la lune au ſoleil à $13^h\ 17'\ 30''$, temps vrai, dans $16^o\ 16'\ 57''$ ♒. La latitude de la lune boréale de $7'\ 18''$, ſon mouvement horaire $34'\ 48''$, & dans ſon orbite $34'\ 56''$, ſon demi-diametre $16'\ 0''$, ſa parallaxe horizontale $59'\ 10''$, l'inclinaiſon véritable de ſon orbite ſur le cercle de latitude de $84^o\ 59'$ à l'Occident. Le mouvement horaire du ſoleil $2'\ 24''$, ſon demi-diametre $15'\ 51''$, & par conſéquent le vrai demi-diametre de l'ombre de la terre de $44'\ 18''$, le mouvement horaire composé de $32'\ 32''$, & l'inclinaiſon apparente $84^o\ 35'$.

1118. Ayant conſtruit l'échelle AB (fig. 100) je décris l'écliptique OC, je marque en G le vrai lieu de la Lune réduit à l'écliptique, & en L ſon vrai lieu dans ſon orbite, en ſorte que GL ſoit tirée en-haut, (à cauſe de la latitude boréale de la lune), & égale à $7'\ 18''$ priſes ſur l'échelle. Je fais vers l'Occident l'angle GLN de $84^o\ 35'$, & je tire l'orbite apparente de la lune PLN. Je prends LK égal au mouvement composé de la lune & du ſoleil $32'\ 32''$. Je la diviſe en parties de temps, enſorte que le point L réponde à $13^h\ 17'\frac{1}{2}$, & le point K à $14^h\ 17'\frac{1}{2}$. Du point G j'abaiſſe ſur l'orbite apparente la perpendiculaire GE, qui me donne le milieu de l'éclipſe en E à $13^h\ 16'$. Je prends ſur l'échelle $60'\ 18''$, ſomme des demi-diametres de l'ombre & de la lune; & du point G comme centre je marque ſur l'orbite apparente à l'Orient & à l'Occident, les points N & I qui me donnent le commencement de l'éclipſe à $11^h\ 24'$, & la fin à $15^h\ 7'$. Je prends ſur l'échelle $28'\ 18''$ différence des demi-diametres de l'ombre & de la

(*g*) On trouve l'inclinaiſon apparente en faiſant cette proportion; la différence des mouvements du ſoleil & de la lune en longitude eſt au mouvement de la lune en latitude comme le rayon eſt à la tangente de l'angle cherché. Le mouvement horaire composé ſe trouve en diviſant la différence des mouvemens en longitude par le coſinus de l'inclinaiſon apparente.

lune, & du point G comme centre je marque sur l'orbite apparente deux autres points Q, P qui me donnent le moment de l'immersion totale à 12 h 25', & celui du commencement de l'émersion à 14h 6'. Enfin, du point E comme centre avec un rayon égal au demi-diametre de la lune 16' 0'', je décris un cercle qui me représente la lune au milieu de son éclipse. Par E je mene indéfiniment le diametre GX, je divise VH en douze doigts, je continue la division jusqu'à ce qu'elle passe au-delà du cercle OXC décrit du centre G avec un rayon égal au demi-diametre de l'ombre 44' 18'', & qui représente la section de l'ombre de la terre. La partie VX exprime la grandeur de l'éclipse, qui se trouve de 20 doigts environ.

1119. Il est facile d'appliquer à cette construction un calcul de Trigonométrie rectiligne, qui donnera avec beaucoup plus de précision les phases annoncées par les Tables. Ainsi dans le triangle GLE rectangle en E on a GL = 7' 18'' & GLE = 84° 35'. Donc GE = 7' 16'', & EL = 41''. Dans les triangles GEN, GEQ, rectangles en E, on a GE = 7' 16'', GN = 60' 18'', & GQ = 28' 18''; donc EN = 59' 52'', & EQ = 27' 21''. Otant 2' 24'', mouvement horaire du soleil de 34' 48'', mouvement horaire de la lune dans l'écliptique, & réduisant EL, EN, EQ en temps, à raison de la différence 32' 24'' pour une heure : on a EL = 1' 17'', ce qui donne le point E, ou le milieu de l'éclipse à 13 h 16' 13''; EN = 1 h 50' 51'', qui donne le commencement de l'éclipse à 11 h 25' 22'', & la fin à 15 h 7' 4''; on a enfin EQ = 50' 39'' ce qui donne l'immersion à 12h 25' 34'' & l'émersion à 14h 6' 52''. Faisant encore, *le demi-diametre de la lune* 16' 0'' *est à 6 doigts, comme* 53' 2'', *différence entre* GE *ou* 7' 16', *& la somme* 60' 18'' *des demi-diametres de l'ombre & de la lune, à* 19 *doigts* 53' grandeur de l'éclipse (*h*).

1120. PROBLEME II. *Déterminer graphiquement les phases d'une éclipse de soleil, pour un lieu donné sur la surface d'une planete, comme la terre.*

(*h*) Quoiqu'il n'y ait que 12 doigts dans le diametre entier de la lune, on compte ici 19 doigts, parce que la lune est enfoncée de 7 doigts dans l'ombre.

1121. Pour construire la figure d'une éclipse de soleil, il faut supposer l'observateur dans le soleil même, qui regarde la terre tourner sur son axe, & tous les lieux qui occupent sa surface exposée au soleil, décrire des ellipses, ainsi qu'il a été expliqué dans la Section IV. Or, si tandis que l'observateur considere un de ces lieux, comme par exemple, la ville de Paris, la lune vient à passer entre son œil & cette Ville, il cesse de la voir, & en même-temps, ceux qui sont dans Paris cessent de voir le point du soleil où l'observateur est placé.

1122. Il s'agit donc de représenter sur un plan la trace qu'un point de la surface de la terre paroît, vu du soleil, décrire en vertu de la rotation de la terre, & en même-temps la trace de la lune, afin qu'on puisse voir quand & comment la lune cache ce point au soleil.

1123. Soit donc proposé de déterminer les phases de l'éclipse de soleil qui a dû arriver le 26 Octobre 1753 ; la conjonction vraie du soleil & de la lune, selon les Tables de M. Halley, est à 10 h 57′ de temps vrai du matin, dans 3° 10′ 26″ ♏, le soleil ayant 12° 35′ ½ de déclinaison australe, 2′ 30″ de mouvement horaire, son demi-diametre 16′ 11″ : la latitude vraie de la lune 34′ 58″ boréale, son mouvement horaire dans l'écliptique 35′ 26″, & sur son orbite 35′ 34″, son demi-diametre horizontal 16′ 8″, sa parallaxe horizontale 58′ 49″, l'inclinaison de l'orbite apparente 84° 21′, & le mouvement horaire composé de la lune & du soleil 33′ 4″.

1124. Avec ces éléments, je construis une échelle GA, (fig. 101) de 60 minutes, dont chacune soit au moins égale à 2 lignes de pied de roi. Je fais un demi-cercle OXC, dont le rayon soit égal à la parallaxe horizontale de la lune prise sur l'échelle. Ce demi-cercle représente l'hémisphere boréal de la terre vu du soleil ; son diametre OC représente la section de cet hémisphere par le plan de l'écliptique. J'éleve sur le centre G la perpendiculaire GL, que je fais égale à la latitude de la lune 34′ 58″. Je fais l'angle GLQ de 84° 21′ à l'Occident ; j'ai l'orbite apparente de la lune que je divise en temps, de sorte que

$10^h\ 57'$ répondent au point L, & $11^h\ 57'$ au point K éloigné de L de $33'\ 4''$. Avec la déclinaiſon du ſoleil $12^o\ 35'\frac{1}{2}$ auſtrale, je détermine (911) la ſituation du pole boréal de la terre P qui eſt derriere le diſque, à cauſe que la déclinaiſon du ſoleil eſt auſtrale; je décris (932) la portion de l'ellipſe, qui eſt la projection orthographique de l'arc diurne du parallele de Paris pour ce jour-là, ſur laquelle les heures du jour doivent être marquées en-haut, à cauſe que la hauteur du pole & la déclinaiſon du ſoleil ſont de différente dénomination.

1125. Avec un compas je prends ſur l'échelle $32'\ 19''$ qui eſt la ſomme des demi-diametres du ſoleil & de la lune, & mettant toujours une pointe ſur l'arc de l'ellipſe, & l'autre ſur l'orbite de la lune, je cherche à l'Occident & à l'Orient, quels ſont les deux points Q, R, & E, F qui marquent les mêmes inſtants, & qui ſont éloignés de la ſomme des demi-diametres du ſoleil & de la lune. Les points Q, R donnent le commencement de l'éclipſe à $8^h\ 39'$, & les points E, F donnent la fin à $11^h\ 8'$. Car il eſt clair par la conſtruction, qu'à $8^h\ 39'$ la ville de Paris doit être vue du ſoleil au point R, tandis que le centre de la lune doit être vu en Q : & comme la ligne QR exprime la ſomme des demi-diametres du ſoleil & de la lune, en parties telles que GC exprime la parallaxe horizontale de la lune, il eſt évident que cette ligne repréſente la diſtance des centres du ſoleil & de la lune vus de la terre à l'inſtant du contact apparent de leurs bords.

1126. Pour avoir le milieu & la grandeur de l'éclipſe, je cherche deux points comme I, D, leſquels en marquant les mêmes inſtants, ſoient auſſi les plus proches qu'il ſoit poſſible. Ces points ſe trouvent vers $9^h\ 50'$. Du point I comme centre avec un rayon égal au demi-diametre du ſoleil $16'\ 11''$ priſes ſur l'échelle, je décris un cercle qui repréſente le ſoleil; je lui mene un diametre qui paſſe par le point D, que je diviſe en douze parties égales pour meſurer les doigts écliptiques. Du point D comme centre, avec un rayon égal au demi-diametre de la lune, je décris un autre cercle qui repréſente la lune au milieu de l'éclipſe,

& le nombre des doigts qui s'y trouvent renfermés détermine la grandeur de l'éclipſe, qui eſt ici de 8 doigts $\frac{1}{2}$.

1127. REMARQUE. Dans cette conſtruction on ſuppoſe que le ſoleil eſt à une diſtance comme infinie par rapport à la terre & à la lune, que les droites par leſquelles on projette le diametre de la lune ſur le plan de la figure ſont paralleles, que la trace de Paris vue du ſoleil eſt réellement un arc d'ellipſe, que le diametre de la lune vu de la terre eſt conſtant, que ſon mouvement eſt rectiligne & uniforme, &c. Toutes ces ſuppoſitions ne ſont pas exactement conformes à ce qui ſe paſſe dans le ciel. Ainſi, il eſt clair qu'en ſuppoſant les éléments tirés des Tables Aſtronomiques, parfaitement exacts, on ne pourroit en déduire les phaſes des éclipſes qu'à peu-près. Et quoique les erreurs qui réſultent de ces ſuppoſitions ſe compenſent aſſez ſouvent, cependant on peut eſtimer qu'elles jettent une incertitude de deux ou trois minutes ſur les temps déterminés par les opérations graphiques faites avec tout le ſoin poſſible. Mais la préciſion des temps trouvés de cette maniere eſt plus que ſuffiſante, lorſqu'on n'a beſoin de les ſavoir, que pour ſe préparer à l'obſervation d'une éclipſe : de ſorte que le problême qui ſuit n'eſt utile, que lorſqu'on veut ſavoir abſolument ce qui réſule des éléments des Tables, ſoit pour les vérifier, ſoit pour les corriger.

1128. PROBLEME III. *Déterminer par le calcul les circonſtances d'une éclipſe de ſoleil.*

1129. SOLUTION I. Sachant par quelques opérations graphiques, ou par quelque calcul groſſier, le temps du commencement & de la fin d'une éclipſe du ſoleil, j'en partage l'intervalle en ſix, ſept ou huit parties égales. (Si l'éclipſe doit durer environ une heure de temps, il ſuffira d'en partager la durée en cinq parties.) Par exemple, l'éclipſe du 26 Octobre 1753 devant commencer vers 8 heures $\frac{1}{2}$, & finir vers 11 heures, temps moyen du matin, je diviſe cette durée en intervalles de 30′, & je mets tous ces inſtants à la tête d'autant de colomnes, comme on le voit dans le diſpoſitif, qui eſt à la fin de ce problême.

1130. II. Je calcule par les Tables Aſtronomiques pour

les instants marqués dans trois des colonnes le vrai lieu du soleil, celui de la lune, sa latitude, d'où je conclus chaque distance de la lune au pole élevé de l'écliptique, & sa parallaxe horizontale, dont j'ai retranché 10'' pour compenser l'effet de la parallaxe du soleil. Par les parties proportionnelles je remplis les autres colonnes.

1131. III. Je réduis en degrés chaque instant de temps moyen, j'y ajoute le lieu moyen du soleil, la somme est (500) le point de l'équateur, qui passe au méridien à l'instant marqué en tête de la colonne. Je cherche dans les Tables Astronomiques, 1°, le point de l'écliptique qui répond à ce point de l'équateur, (on appelle ce point de l'écliptique, *le point culminant*, parce qu'il est aussi dans le méridien). 2°, L'angle à ce point culminant entre le méridien & l'écliptique. 3°, La déclinaison de ce point culminant, par le moyen de laquelle je calcule sa hauteur méridienne (416). Je fais ensuite : *Le rayon est au cosinus de la hauteur du point culminant, comme le sinus de l'angle de l'écliptique & du méridien est au cosinus de la hauteur du point nonagesime.* Puis : *Le rayon est à la cotangente de la hauteur du point culminant, comme le cosinus de l'angle de l'écliptique & du méridien est à la tangente d'un arc, que* (dans l'hémisphere boréal de la terre) *j'ajoute* (*i*) *à la longitude du point culminant, lorsque ce point est dans le premier & dans le dernier quart de l'écliptique, mais que je retranche dans le second & le troisieme quart*, (c'est le contraire dans l'hémisphere austral), *& j'ai le point nonagesime.* Tout le calcul de cet article se fait en degrés & minutes seulement, & en négligeant les secondes (*k*).

1132. Pour le démontrer : soit HER le méridien (fig. 106) HTR l'horizon, QT l'équateur, E le point

(*i*) Si l'on est dans la Zone-Torride, cette regle exige une exception comme je l'ai remarqué dans mon *Astronomie*, art. 1662.

(*k*) Il y a des Tables du Nonagesime pour tous les pays de la terre calculées par M. l'Evêque, Hydrographe du Roi, à Nantes, en 2 vol. in-8°. Avignon, 1776.

culminant.

culminant. Si par E on mene l'arc EIP, enſorte que l'angle HEP ſoit égal à celui de l'écliptique & du méridien, l'arc EIP ſera une portion de l'écliptique compriſe entre le méridien & l'horizon, & ſi cet arc eſt moindre que de 90°, il eſt le complément du point nonagéſime (*l*), lequel eſt toujours à 90° du point P. Or dans le triangle ſphérique HEP rectangle en H, j'ai l'angle HEP, & le côté HE, j'en conclus par la premiere analogie l'angle HPE de l'inclinaiſon de l'écliptique ſur l'horizon, laquelle eſt égale (Trig. 14) à la hauteur du nonagéſime. Par la ſeconde analogie, je trouve le complément de l'arc EIP, lequel eſt toujours moindre que de 90°, tant que HE & HEP ſont de même eſpece.

1133. IV. Je prends dans chaque colonne la différence entre le vrai lieu de la lune & le point nonagéſime, & j'ai la diſtance *vraie* de la lune au nonagéſime. Je fais : *Comme le quarré du rayon au produit du ſinus de la hauteur du nonagéſime par le ſinus de la diſtance* apparente *de la lune au nonagéſime ; ainſi la parallaxe horizontale corrigée, eſt à la parallaxe de la lune en longitude.* Or parce qu'il faut employer dans ce calcul la diſtance apparente au nonagéſime, (laquelle eſt toujours égale à la diſtance vraie, plus la parallaxe en longitude) pour m'épargner une partie du double calcul qu'il faudroit faire, je ne le fais à la rigueur que pour la premiere & la ſeconde colonne, j'emploie d'abord les diſtances vraies pour avoir les parallaxes à peu-près, je refais le calcul en y mettant ces diſtances vraies, plus les parallaxes trouvées ; & j'ai les vraies parallaxes des deux premieres colonnes : en les comparant, je vois aiſément quelle eſt celle qu'il faut ajouter à la diſtance vraie de la troiſieme colonne, pour en conclure d'un ſeul calcul la vraie parallaxe de longitude ; je vais ainſi de colonne en colonne juſqu'à la derniere.

1134. V. Je fais : *Le rayon eſt au coſinus de la hauteur du nonagéſime, comme la parallaxe horizontale corrigée de la lune, eſt à la parallaxe approchée en latitude.* En-

(*l*) C'eſt-à-dire de la diſtance du nonagéſime au méridien.

ſuite, *la tangente de la diſtance apparente de la lune au nonagéſime, eſt au coſinus de la diſtance vraie de la lune au pole élevé de l'écliptique plus la parallaxe approchée en latitude, comme la parallaxe en longitude, eſt à la quantité qu'il faut toujours ôter de la parallaxe approchée en latitude pour avoir la vraie*, à moins que la diſtance apparente de la lune au nonagéſime, & ſa diſtance apparente au pole élevé de l'écliptique ne ſoient l'une moindre, & l'autre plus grande que de 90°, auquel cas la correction eſt additive.

1135. REM. Les analogies de ces deux articles ſont tirées des formules rapportées, n° 658. On y a ſeulement ſupprimé le coſinus de la latitude de la lune, lequel eſt ſenſiblement égal au rayon dans les éclipſes de ſoleil. L'analogie qui donne la correction eſt le ſecond membre de la ſeconde formule, dans lequel on a ſubſtitué, pour abréger, la parallaxe en longitude à la parallaxe horizontale.

1136. VI. *J'ajoute chaque parallaxe en longitude à la longitude vraie de la lune, ſi la lune eſt plus avancée ſelon l'ordre des ſignes, que n'eſt le point nonagéſime; ou je les retranche, ſi la lune eſt moins avancée:* j'ai par ce moyen les longitudes apparentes de la lune. J'ajoute les parallaxes en latitude aux diſtances vraies de la lune au pole élevé de l'écliptique, & j'ai les diſtances apparentes, d'où je conclus les latitudes apparentes de la lune.

1137. Pour plus de préciſion, il faut calculer les parallaxes dans le ſphéroïde applati (659); cela ne peut qu'allonger un peu le calcul ſans rien changer au fond de la méthode; nous en ſupprimons le procédé, qui eſt détaillé n° 662 & 663, nous l'avons ſuivi dans l'exemple ou diſpoſitif qui eſt à la fin de cet article. Nous ajouterons ſeulement ici, que dans l'ellipſe où CQ & CP (fig. 77) ſont exprimés par deux nombres entiers, différents ſeulement d'une unité comme 215, 214, on a $KO = \frac{CQ + ſ^2 Latit.}{CP}$.

& $CK = \frac{2\, ſ\, Latit.}{CP}$ (*m*).

(*m*) Ces deux expreſſions ſont plus ſimples ſi l'on appelle β la frac-

1138. VII. Prenant chaque latitude apparente de la lune pour un côté de triangle rectiligne rectangle, & chaque différence entre les vrais lieux du soleil, & les longitudes apparentes de la lune pour un autre côté, j'en calcule l'hypoténuse, qui est la distance apparente des centres de la lune & du soleil.

1139. VIII. Je fais pour la premiere & pour la derniere colonne : *Le rayon est au cosinus de la distance apparente de la lune au nonagésime ; comme le sinus de la hauteur du nonagésime, est au sinus de la hauteur de la lune à peu-près*, laquelle n'a besoin d'être connue qu'à 2 ou 3 degrés près pour avoir la correction du demi-diametre horizontal de la lune, laquelle se trouve dans les Tables Astronomiques.

1140. IX. Je prends dans la premiere colonne la somme du demi-diametre du soleil & du demi-diametre de la lune ainsi corrigé ; j'interpole les trois distances apparentes des centres qui sont dans les trois premieres colonnes, pour trouver l'instant auquel la distance des centres s'est trouvée égale à cette somme : cet instant est celui du commencement de l'éclipse. Je prends de même dans la derniere colonne la somme des demi-diametres de la lune & du soleil ; puis j'interpole les trois distances apparentes des centres, qui sont dans les trois dernieres colonnes, pour trouver l'instant auquel la distance des centres s'est trouvée égale à cette somme, & cet instant est celui de la fin de l'éclipse. J'interpole encore les quatre distances qui sont dans les quatre colonnes les plus voisines du milieu, & par la formule du *maximum* (146), je trouve l'instant & la quantité de la plus petite distance des centres : j'ôte cette quantité de la somme des demi-diametres apparents qui est dans

---

tion $\frac{1}{215}$ & qu'on dise $KO = 1 + \beta f^2$ latit. & $CK = 2\,\beta f$ lat. On en peut tirer la démonstration de ce qui est démontré dans mon Astronomie, art. 2679 & 2680, car $CO = CQ - \beta f^2$ lat. & $CA = 2\,\beta f$ latit. cos. lat. donc $CK = \frac{CN}{\text{sin}\,K} = 2\,\beta f$ lat. & $KA = CK$ cos. K $= 2\,\beta f^2$ lat. donc $KO = 1 + \beta f^2$ lat.

la troisieme colonne, & je fais : *Comme le demi-diametre du soleil est au reste ; ainsi 6 doigts sont au nombre de doigts qui exprime la grandeur de l'éclipse* du côté où la latitude apparente porte la lune à cet instant, qui est celui du milieu de l'éclipse.

1141. On peut trouver les mêmes phases par le calcul des parallaxes d'ascension droite, & de déclinaison appliquées aux ascensions droites & déclinaisons vraies de la lune, ou par celui des azimuths du soleil & de la lune, & des parallaxes de hauteur de la lune ; mais nous n'entrerons pas dans ce détail ; il est bon de s'y exercer pour se former aux calculs astronomiques (*n*).

1142. REM. La même méthode peut servir à calculer les circonstances des passages des planetes inférieures sur le disque du soleil (*o*), lorsqu'on voudra avoir égard à l'effet de leur parallaxe, pour laquelle on prendra la différence entre la parallaxe horizontale de la planete & celle du soleil. On y peut employer la construction graphique des éclipses de soleil. Mais si on ne veut pas avoir égard à la parallaxe, on suivra la construction & le calcul des éclipses de lune, en employant le disque du soleil à la place de l'ombre de la terre.

(*n*) Le calcul par la méthode des hauteurs & des angles parallactiques est expliqué fort au long dans mon Astronomie.

(*o*) On a observé Mercure sur le soleil treize fois, & Vénus trois fois en 1639, 1761 & 1769 ; ces derniers passages ont été sur-tout importans pour connoître la parallaxe du soleil, en comparant entre elles des observations faites dans des pays très-éloignés ; tels que la Baie d'Hudson, la Californie, l'Isle de Taïti dans la mer du Sud, la Laponie, la Siberie ; on peut voir de très-grands détails à ce sujet dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, dans ceux de l'Académie de Pétersbourg, dans les Transactions philosophiques de la Société Royale de Londres, & dans le second Volume de mon Astronomie. Ces passages de Vénus sur le soleil sont les phénomenes les plus remarquables & les plus rares qu'on ait observés depuis longtemps : il y en aura encore le 6 Décembre 1882, le 8 Juin 2004, le 5 Juin 2012, le 11 Décembre 2117, le 8 Décembre 2125, le 11 Juin 2247, &c.

DISPOSITIF D'UN CALCUL D'ECLIPSE DE SOLEIL.

Pour le 25 Octobre 1753.

Temps moyen.	20h 20′	20h 50′	21h 20′	21h 50′	22h 20′	22h 50′
	S. D. M.	S. D. M.	S. D. M.	S. D. M.	S. D. M.	S. D. M.
Vrai lieu du ☉ (p).	213 4 32	213 5 47	213 7 2	213 8 17	213 9 32	213 10 48
Vrai lieu ☾	211 47 0	212 4 42	212 2 25	212 40 8	212 57 51	213 15 35
Dist. au Pole B.	89 32 43	89 31 5	89 29 27	89 27 49	89 26 11	89 24 33
Parall. corr. ☾...	58 31	58 31	58 30	58 30	58 29	58 29
T. moy. en deg.	305 0	312 30	320 0	327 30	335 0	342 30
Long. moy. ☉...	214 50	214 51	214 52	214 53	214 54	214 56
Pt. de l'Eq. au M.	159 50	167 21	174 52	182 23	189 54	197 26
Pt. culminant . . .	158 11	166 15	174 24	182 36	190 47	198 54
Angl. Éclipt. 1131.	68 2	67 7	66 37	66 32	66 53	67 39
Déclinais.	8 32 B	5 26 B	2 14 B	1 2 A	4 17 A	7 25 A
Haut. du Pt. C...	49 41	46 35	43 23	40 7	36 52	33 34
Haut. du Nonag.	53 7	50 43	48 9	45 27	42 38	39 43
Nonagésime. . . .	140 34	146 3	151 38	157 18	163 9	169 14
Dist. ☾ au Non.	71 13	66 2	60 44	55 22	49 49	44 2
Parallaxe Long....	44 50	41 54	38 32	34 48	30 42	26 23
Parallaxe Lat.	35 24	37 24	39 23	41 23	43 24	45 24
Longit. app ☾....	212 31 50	212 46 36	213 0 57	213 14 56	213 28 33	213 41 58
Latit. ☾ app. A.	8 7	8 29	8 50	9 12	9 35	9 57
Cor. de la Long.	— 8	— 8	— 8	— 8	— 8	— 8
Cor. de la Latit.	— 23	— 23	— 23	— 23	— 23	— 23
Long. app. red...	212 31 42	212 46 28	213 0 49	213 14 48	213 28 25	213 41 50
Latit. app. red. . .	7 44	8 6	8 27	8 49	9 12	9 34
Diff. ☉ & ☾ ...	+ 32 50	+ 19 19	+ 6 13	— 6 31	— 18 53	— 31 2
Dist. des cent. . .	33 44	20 57	10 29	10 58	21 1	32 28
Haut. ☾ env. . .	14 20					26 38
Demid. horiz. . .	16 8					16 8
Demid. app. ☾...	16 12		16 14			16 16
Demi-diam. ☉. . .	16 11		16 11			16 11
Som. des demid.	32 23		32 25			32 27

Donc	Temps moyen.	Temps vrai & civil.
Commencement. . . .	à 20h 23′ 1″ . . .	Le 26 Oct. à 8h 38′ 51″ matin.
Milieu.	à 21 33 26	à 9 49 16
Fin.	à 22 49 58	à 11 5 49

La grandeur 8 doigts 31 minutes de la partie australe du Soleil.

(p) Quand il ne s'agit que d'un exemple, l'exactitude des données est indifférente, aussi n'ai-je pas refait les calculs de l'Auteur; mais je dirai seulement que le lieu du soleil calculé rigoureusement sur les Tables est plus grand de 1′ 35″.

ARTICLE II.

De l'usage des Observations des Eclipses de Soleil & de Lune.

1143. Les observations des éclipses sont extrêmement utiles, sur-tout lorsqu'elles sont exactes. Elles servent premiérement à faire connoître si les Eléments de la théorie du soleil & de la lune sont bien ou mal établis dans les Tables Astronomiques, & à les confirmer, ou bien à les réformer.

1144. Leur principal usage est de servir à déterminer les longitudes géographiques des lieux où elles ont été faites, ou du moins les différences de leurs méridiens, ce qui est la partie de la Géographie la plus difficile, & en même-temps la plus importante. Mais comme les éclipses de lune ne s'emploient pas de même que les éclipses de soleil, nous en ferons deux articles séparés.

Usage des Observations des Eclipses de Lune pour trouver les Longitudes Géographiques.

1145. Les phases des éclipses de lune étant universelles, (966), il est clair (921) que si deux observateurs différents marquent le même instant lorsqu'ils voyent une même phase, ils sont situés sur le même méridien terrestre, & qu'ainsi la longitude d'un des deux lieux étant connue, on est assûré que la longitude de l'autre est précisément la même.

1146. Mais si ces deux observateurs marquent deux instants différents lorsqu'ils apperçoivent une même phase, il est évident qu'ils ne sont pas situés sur le même méridien; que la différence entre ces deux instants étant réduite en degrés à raison de 15° pour chaque heure, doit donner la différence des longitudes; qu'enfin, le lieu où l'instant marqué fait connoître que la phase est arrivée plus tard, est celui des deux lieux qui est le plus oriental, parce

que c'eſt celui qui a paſſé le premier par le méridien céleſte, & qui a par conſéquent compté midi avant l'autre.

1147. Par exemple, dans l'éclipſe du 8 Août 1729, l'immerſion totale de la lune dans l'ombre a été obſervée à Paris par M. Caſſini à $12^h\ 19'\ 13''$, & l'émerſion à $13^h\ 59'\ 0''$ (Mém. de l'Acad. 1729, page 345). A l'Iſle de la Barbade, (l'une des Antilles,) l'immerſion a été obſervée par M. Stevenſon, à $8^h\ 11'$, & l'émerſion à $9^h\ 51'$, (*voyez* les Tranſ. Philoſ. nº 416, page 441.). Les différences ſont $4^h\ 8'\ 13''$, & $4^h\ 8'\ 0''$. En prenant un milieu $4^h\ 8'\ 6''$, & le réduiſant en degrés, on voit que la Barbade, (où l'on comptoit moins de temps,) eſt plus occidentale que Paris de $62^o\ 1'\frac{1}{2}$. Et par conſéquent ſuppoſant la longitude de Paris de $19^o\ 53'\frac{1}{2}$ à l'égard de l'Iſle de Fer, celle de la Barbade ſera $317^o\ 52'$.

1148. Comme la pénombre rend fort incertaines les phaſes du commencement & de la fin d'une éclipſe, les Aſtronomes ont ſoin de marquer les inſtants auxquels les différentes taches qui ſont ſur la ſurface de la lune, entrent dans l'ombre & en ſortent, ce qui eſt facile à l'aide d'une carte de la lune, & d'une bonne lunete de quatre à cinq pieds de long. Par ce moyen on multiplie les obſervations, & on s'aſſure de la différence des Méridiens, par un plus grand nombre de comparaiſons.

1149. On emploie encore au même uſage les obſervations des éclipſes des ſatellites de Jupiter, (qui ſe calculent ſur les mêmes principes que celles de la lune, & ſur des Tables qu'on trouve parmi les Tables Aſtronomiques). On obſerve ces éclipſes avec des lunettes de 12 ou 15 pieds de longueur, & par la comparaiſon des inſtants des mêmes phaſes, on a la différence des méridiens, avec plus de préciſion que par les éclipſes de lune (*q*).

(*q*) Pour avoir les longitudes ſur mer, on obſerve à un inſtant connu la diſtance entre la lune & le ſoleil ou une étoile; on calcule par les Tables l'inſtant qu'il étoit ſous le premier méridien quand cette diſtance avoit lieu; la différence des temps eſt celle des méridiens. V. le Traité de Navigation de Bouguer, édition de M. de la Caille, & le Guide du Navigateur, par M. Levêque, à Nantes, 1779.

Usage des Observations des Eclipses de Soleil pour la détermination des Longitudes.

1150. LEs éclipses de soleil n'étant pas universelles, leurs observations ne peuvent servir à connoître la différence des méridiens, qu'en y employant des réductions telles que celles qu'on va voir.

1151. Supposé qu'on ait observé à Paris le commencement de l'éclipse de soleil du 26 Octobre 1753 à $8^h 41'$, & la fin à $11^h 11'$: & qu'à Bologne en Italie, dont la latitude géographique est $44^o 30'$, on en ait observé le commencement à $9^h 27'$, & la fin à $11^h 59'$, je cherche d'abord dans les tables astronomiques tous les éléments nécessaires pour le calcul & la détermination graphique des phases de cette éclipse. J'en construis la figure comme ci-dessus (1120), j'y trace de plus la projection du parallele de Bologne (*voyez* fig. 102), je prends sur l'échelle la somme des demi-diametres du soleil & de la lune, (déduite de leur observation immédiate faite pendant leur éclipse, s'il est possible, sinon, tirée des Tables) je mets une pointe de compas sur le point de $8^h 41'$ du parallele de Paris; & avec l'autre, je décris à l'occident un arc B H, qui coupe l'orbite apparente K Q. Je pose ensuite la premiere pointe sur le point de $11^h 11'$ du parallele de Paris; & avec l'autre, je décris vers l'orient un arc M N, qui coupe la même orbite K Q.

1152. Suivant l'observation faite à Paris, la durée de l'éclipse a été de $2^h 30'$. Avec un compas je prends sur les divisions de l'orbite apparente K Q un intervalle de $2^h 30'$. Je porte les deux pointes ouvertes de la sorte, l'une en T sur l'arc B H, & l'autre en S sur l'arc M N, ensorte que la droite T S qui joint ces deux points, soit parallele à K Q. Cette droite T S est la vraie position de l'orbite apparente de la lune déduite des observations; je l'appellerai l'*orbite corrigée*. Je porte sur T S les divisions de l'orbite K Q, ensorte que $8^h 41'$ répondent précisément au point T, & $11^h 11'$ au point S.

1053. Ayant ouvert le compas de la quantité de la

somme des demi-diametres du soleil & de la lune, j'en pose une pointe sur le parallele de Bologne au point C de 9^h 27', & je trouve que l'autre pointe portée vers la partie occidentale de l'orbite corrigée, tombe sur le point D marqué 8^h 51'. Cela me fait connoître qu'au véritable instant marqué à Bologne lors du commencement de l'éclipse, on comptoit à Paris 8^h 51' : ou, ce qui revient au même, à l'instant où le centre de la lune étoit en D, on comptoit 9^h 27' à Bologne, & 8^h 51' à Paris. Donc, suivant cette observation, Bologne est plus oriental que Paris de 36' de temps. De même, je pose une pointe du compas en E sur le parallele de Bologne au point de 11^h 59', & l'autre pointe tombant vers l'orient sur l'orbite corrigée au point F marqué 11^h 22', j'en conclus la différence des méridiens, 37'. Et en prenant un milieu entre ces deux résultats, je trouve que Bologne est plus oriental que Paris de $36'\frac{1}{2}$ de temps, ou de $9^o\ 7'\frac{1}{2}$, ce qui donne sa longitude 29° 1'.

1154. REMARQUE I. En comparant la position & les divisions de l'orbite corrigée FT avec celles de l'orbite KQ, tirée des Tables, on reconnoît les erreurs de ces Tables, tant en longitude qu'en latitude. Car la différence entre les instants marqués aux points où GL coupe ces deux orbites, fait voir de combien ces Tables avancent ou reculent le temps de la vraie conjonction du soleil & de la lune. Ici, par exemple, on voit que les Tables avancent la conjonction de 2' de temps. Et l'intervalle de ces deux orbites marque l'erreur des mêmes Tables en latitude. Ici on voit qu'elles feroient la latitude de la lune trop grande d'environ 2'.

1155. REMARQUE II. Quoique par les opérations graphiques on ne puisse se flatter de trouver la différence des méridiens avec une plus grande précision que de 2' de temps, cependant, comme la connoissance des longitudes géographiques est fort intéressante, on ne doit pas négliger ces opérations quand on pourra comparer des observations d'éclipses de soleil, parce qu'en prenant un milieu entre les différences des méridiens qu'on en déduira, on déterminera la véritable avec toute l'exactitude nécessaire. Mais on

peut le faire avec plus d'avantage par le calcul des parallaxes, sur-tout, lorsque par une bonne observation faite sous un méridien bien connu, on aura observé une position exacte de la lune, qui servira à trouver ses longitudes & latitudes corrigées. Le calcul est d'ailleurs entiérement semblable à celui que nous avons enseigné ci-dessus; il est à propos d'y employer les parallaxes dans le sphéroïde applati (659); une simple application de l'exemple précédent, suffira pour le faire comprendre.

1156. Soit donc supposé que le commencement de l'éclipse de soleil du 25 Octobre 1753 ait été observé à Bologne à $21^h\,27'\,6''$ temps vrai, ou à $21^h\,11'\,16''$ temps moyen : sachant que la différence des méridiens que je cherche est d'environ 36 minutes de temps, je fais deux hypotheses; l'une, où je suppose cette différence de 40', & l'autre de 30'. Voici le procédé.

	I. Hypoth.			II. Hypoth.		
Tems moyen de l'Obs. réd. au Mér. de Paris.	20h	31'	16"	20h	41'	16"
Tems moyen de l'Obs. à Bol. réduit en degrés	317°	49'	"	317°	49'	"
Long. moy. du Soleil au Mérid. de Paris....	214	50		214	50	
Point de l'Équat. au Mérid. hypoth. de Bol.	172	39		172	39	
Point culminant de l'Ecliptique........	172	0		172	0	
Angle de l'Ecliptique & du Méridien.....	66	43		66	43	
Déclinaison du point culminant........	3	11	B	3	11	B
Hauteur du point culminant à Bologne...	48	41		48	41	
Hauteur du nonagésime.........	52	40		52	40	
Nonagésime de l'Ecliptique........	152	50		152	50	
Long. vraie de la ☾ cor. au Mérid. de Paris.	211	51	39	211	57	32
Distance au Pole Boréal de l'Ecliptique...	89	33	7	89	32	34
Distance vraie de la Lune au nonagésime.	59	2		59	8	
Parallaxe de long. calculée dans le sphéroïde.		40	18		40	21
Parallaxe de latitude calculée de même...		35	28		35	28
Longit. appar. de la Lune.........	212	31	57	212	37	53
Dist. app. de la Lune au Pole Boréal de l'Ecl.	90	8	35	90	8	2
Latit Austr. app. de la Lune.......		8	35		8	2
Longit. vraie du Soleil..........	213	5	0	213	5	25
Differ. des long. app. du Soleil & de la Lune.		33	3		27	32
Distance appar. des centres de la ☾ & du ☉		34	10		28	42

1157. On voit par ces calculs, qu'en 10' 0" de temps, le soleil & la lune vus de Bologne se sont approchés de 5' 28".

Mais au moment de l'obſervation à Bologne, la diſtance apparente des centres étoit de 32′ 25″, ſomme des demi-diametres du ſoleil & de la lune ; je fais, 5′ 28″ ſont à 10′ 0″, comme 1′ 45″ (différence entre 34′ 10″, & 32′ 25″) ſont à 3′ 12″, qui eſt la quantité dont Bologne eſt moins oriental que Paris, qu'on ne l'a ſuppoſé dans la premiere hypotheſe. Donc la différence des méridiens cherchée eſt de 36′ 48″ (*r*).

1158. Faiſant le même calcul pour la fin, ou pour un nombre de doigts obſervé, ou même pour l'immerſion ou l'émerſion d'une tache du ſoleil, dont la poſition ſur cet aſtre ait été bien déterminée par obſervation, on aura autant de différences de méridiens, entre leſquelles on prend un réſultat moyen pour la vraie différence cherchée.

1159. Les obſervations des éclipſes des étoiles fixes par la lune, ſervent au même uſage que celles des éclipſes de ſoleil. Elles ſe calculent préciſément de même, excepté qu'il ſuffit de diviſer l'intervalle entre le commencement & la fin de ces éclipſes en quatre parties égales. La conſtruction graphique, tant pour les prédire, que pour en conclure la différence des méridiens, eſt auſſi préciſément la même que pour le ſoleil : un exemple ſuffira pour le faire voir.

ARTICLE III.

Détermination graphique des Eclipſes des Etoiles par la Lune.

1160. LES éclipſes des étoiles par la lune ſont ſujettes à la parallaxe comme celles du ſoleil, & ne ſont

---

(*r*) En effet avec cette différence des méridiens on trouveroit pour le temps moyen de l'obſervation, réduit au méridien de Paris 20h 34′ 28″, & recommençant le calcul pour cette heure-là, on trouveroit la diſtance apparente 32′ 25″ la même que donne l'obſervation ; d'où il ſuit que cette ſuppoſition ſeroit exacte. Mais la méthode la

pas universelles. Par rapport aux Européens, la lune n'éclipse que celles qui, dans leur conjonction avec la lune, ont un peu moins de latitude boréale, ou un peu plus de latitude australe que la lune, parce que l'effet del a parallaxe est (615) de porter vers l'horizon le lieu apparent de la lune, & par conséquent d'en diminuer la latitude boréale, & d'en augmenter la latitude australe.

1161. Soit proposé, par exemple, de déterminer l'éclipse de l'étoile nommée *Aldebaran*, ou α du ♉, arrivée le 2 Août 1736. Suivant les Tables de la lune construites sur les élémens de M. Newton, la conjonction de la lune & de l'étoile est arrivée à Paris à $4^h\ 56'$ de temps vrai du matin dans $6^o\ 6'\ 26''$ ♊, Aldebaran ayant $5^o\ 29'\ 0''$ de latitude australe, & $15^o\ 56'\frac{1}{2}$ de déclinaison boréale. Son passage au méridien est arrivé à $7^h\ 30'\ 36''$ du matin. La lune avoit $4^o\ 44'\ 21''$ de latitude australe. Son mouvement horaire en longitude étoit de $32'\ 52''$, & en latitude croissante de $1'\ 7''$. Son demi-diametre horizontal $15'\ 40''$, & sa parallaxe horizontale $57'\ 12''$.

1162. Ayant construit une échelle A G (fig. 103) je décris avec un rayon égal à la parallaxe horizontale $57'\ 12''$ un demi-cercle O X C, qui représente l'hémisphere boréal de la terre vu de l'étoile. Je regarde cette étoile comme si c'étoit le soleil, son passage par le méridien comme l'instant de midi; je fais usage de sa déclinaison, de même que de celle du soleil dans les éclipses. Ainsi je détermine (911) sur cet hémisphere la position du pole boréal P, qui est sur la surface antérieure, à cause que la déclinaison est boréale. Je décris ensuite la projection Elliptique de la partie du parallele de Paris, qui est visible par rapport

---

plus usitée actuellement pour trouver les différences des méridiens par des éclipses observées consiste à chercher le temps de la conjonction vraie pour chaque endroit par les observations qui y ont été faites, la différence des deux temps est celle des méridiens. M. Pingré, M. du Séjour, M. Méchain & moi avons calculé un grand nombre de longitudes en comparant ainsi des observations d'éclipses, de soleil ou d'étoiles, & ces résultats sont toujours les plus exacts.

à l'étoile, & qui répond à $15^{o}\ 56'\frac{1}{2}$ de déclinaiſon. Les diviſions horaires doivent être marquées dans la partie inférieure de l'ellipſe, à cauſe que cette déclinaiſon eſt boréale (932). J'écris $7^{h}\ 30'\frac{1}{2}$ ſur la premiere diviſion qui eſt dans la ligne GP, qui repréſente le méridien, & les autres heures précédentes ſur les diviſions qui ſont vers l'occident.

1163. Je prends ſur l'échelle $44'\ 39''$, différence entre la latitude $4^{o}\ 44'\ 21''$ de la lune, & celle de l'étoile $5^{o}\ 29'\ 0''$. J'éleve GL perpendiculaire à OC & égale à cette quantité. Je porte le mouvement horaire de la lune $32'\ 52''$ vers l'orient de G en B. J'éleve la perpendiculaire BD, que je fais égale à $43'\ 32''$, différence entre la latitude de l'étoile & celle de la lune à $5^{h}\ 56'$, une heure après la conjonction. Par les points L, D je tire l'orbite de la lune DLQ, que je diviſe en parties de temps, enſorte que le point L réponde à $4^{h}\ 56'$, & le point D à $5^{h}\ 56'$.

1164. Je prends ſur l'échelle le demi-diametre de la lune $15'\ 40''$, & tenant une pointe ſur l'ellipſe & l'autre ſur l'orbite de la lune, je cherche vers l'occident deux points R, Q marqués des mêmes inſtants. Je les trouve à $3^{h}\ 41'$. C'eſt le moment de l'immerſion de l'étoile derriere le diſque de la lune. Je cherche enſuite vers l'orient deux autres points E, F qui ayent les mêmes conditions, je les trouve à $4^{h}\ 47'$; c'eſt le moment de l'émerſion.

1165. Enfin, en meſurant par le moyen de l'échelle la diſtance des points de $4^{h}\ 14'$ ſur les deux orbites, je trouve que le centre de la lune a paſſé au nord de l'étoile, & qu'il en étoit éloigné d'environ ſix minutes.

ARTICLE IV.

Méthode pour conſtruire une figure univerſelle des Phaſes d'une Eclipſe de Soleil.

1166. RIEN n'eſt plus curieux que de voir ſur une Carte géographique, toutes les différentes phaſes d'une éclipſe de ſoleil tracées telles qu'elles y doivent paroître dans les divers pays qui ſont

représentés sur cette carte. Je vais décrire ici en peu de mots une méthode facile pour cela, sans en démontrer les pratiques; ceux qui auront bien compris ce qui a été dit dans la quatrieme Section, & dans les trois articles précédents, en trouveront facilement les raisons. Je prendrai pour exemple l'éclipse du 26 Octobre 1753.

1167. Ayant calculé tous les éléments nécessaires pour construire la projection ortographique de cette éclipse, je réduis le temps vrai de la conjonction au premier méridien de la carte dont je veux me servir, comme, par exemple, à celui de l'Isle de Fer. Ainsi la conjonction devant arriver à Paris à 10^h 57', elle arrivera sous le premier méridien à 9^h $37' \frac{1}{2}$, ou à 2^h $22' \frac{1}{2}$ avant midi, lesquelles réduites en parties de l'équateur valent 35° 37'.

1168. Dans un cercle O X C (fig. 104) dont le rayon soit d'environ un pied de Roi, & égal à la parallaxe horizontale de la lune 58' 30" prise sur une échelle A B, je trace l'orbite apparente K L du centre de la lune, comme dans les articles précédents, excepté qu'au lieu de diviser la partie L K (égale au mouvement horaire, composé de la lune & du soleil) en parties d'une heure, je la divise en 15 degrés, en sorte que le point L réponde à 35 degrés 37', & le point K à 20° 37'. Je continue cette division tout le long de l'orbite.

1169. Du centre G j'abaisse sur cette orbite la droite GE perpendiculaire en I, sur laquelle je prends de part & d'autre I D, I E égales à la somme des demi-diametres du soleil & de la lune 32' 14". Je divise le diametre du soleil 32' 22" en autant de parties égales, que je veux marquer de doigts sur ma figure; ici où je les veux marquer de trois en trois, & où par conséquent je dois avoir quatre intervalles, je divise 32' 22" par 4, & j'ai 8' $5'' \frac{1}{2}$, je prends cette quantité sur mon échelle, & en commençant depuis D & E, je marque en allant vers I des points éloignés de 8' $5'' \frac{1}{2}$, par lesquels je mene à l'orbite apparente K L autant de paralleles qu'il en peut tenir dans le cercle O X C. J'écris sur chacune la phase qu'elle doit donner, & je les divise toutes de la même maniere que l'orbite K L (quoique pour éviter la confusion dans une figure si petite, on n'en ait ici divisé qu'une pour servir d'exemple).

1170. Si en prenant ces intervalles le compas tombe sur le point I; comme ici, l'éclipse sera centrale sans demeure. Si le dernier point de ces intervalles n'atteint pas le point I, mais laisse de part & d'autre un petit espace, l'éclipse est totale avec demeure; l'intervalle entre les deux paralleles voisines de I de part & d'autre, sert à trouver tous les lieux où on la verra totale. Enfin si les derniers points passent un peu au-delà de I, l'éclipse sera annulaire par rapport aux pays qui se trouveront compris dans l'intervalle des deux paralleles voisines de part & d'autre du point I.

1171. Je place (607) le lieu du pole de l'équateur, & je tire G X qui représente un méridien fixe, sous lequel tous les méridiens terrestres passent successivement, & sous lequel le premier méridien se trouve, lorsqu'il est midi à l'Isle de Fer. Je trace ensuite (624) les

projections des arcs diurnes des paralleles terrestres. Pour éviter la confusion, je les décris seulement de 10 en 10 degrés, que je marque sur le méridien GX. Il est inutile d'en décrire plus qu'il n'en peut tenir dans l'espace compris entre les droites paralleles qui passent par D & E. Par les points horaires que je trouve en traçant ces ellipses, je fais passer des courbes, qui sont aussi des ellipses, & qui représentent les cercles horaires, ou les positions successives, du premier méridien (à chaque heure à l'Isle de Fer) à l'égard du méridien fixe GX. C'est pour cela que sur les divisions de l'ellipse qui représente l'équateur, j'écris de part & d'autre de GX, 15, 30, 45, &c, degrés, & au-dessus les heures du matin vers l'occident, celles du soir vers l'orient, parce que l'hémisphere de la terre vu du soleil tourne d'occident en orient.

1172. Cette préparation étant faite, je construis des Tables où je marque les longitudes & les latitudes de tous les lieux où l'éclipse sera centrale, ceux où elle ne sera que de neuf doigts, ceux où elle ne sera que de six doigts, &c. & ceux où il n'y aura qu'un simple attouchement des bords du soleil & de la lune. Pour faire ces Tables, par exemple, la premiere, on voit que tous les lieux qui sont sous l'orbite KL du centre de la lune, verront l'éclipse centrale. Or cette orbite rencontre d'abord (vers le milieu entre les projections des paralleles de 40° & 50°) le premier méridien au cercle horaire de 8 heures, ou éloigné de 60° du méridien fixe GX, & le point de la division où cette orbite coupe ce premier méridien est $58^\circ \frac{1}{2}$ donc l'éclipse sera centrale à 8 heures du matin sous le parallele de 45° en un lieu plus occidental que le premier méridien, de $1^\circ \frac{1}{2}$; ou en un lieu dont la longitude est $358^\circ \frac{1}{2}$. De même le point $56 \frac{1}{2}$ de la division de l'orbite KL rencontre le premier méridien au cercle horaire de 9 heures, ou à 45° du méridien fixe GX: & cette intersection tombe sur la projection du parallele de 40°. Donc l'éclipse sera centrale à 9 heures sous le parallele de 40°, & dans un lieu plus oriental de $11^\circ \frac{1}{2}$ que le premier méridien; c'est-à-dire, dans un lieu dont la longitude est $11^\circ \frac{1}{2}$. On trouve de même les lieux où la plus grande éclipse sera de 9, 6, 3 doigts, &c. & même ceux où les bords du soleil & de la lune ne sont que se toucher (*f*) Voici les Tables.

(*f*) L'Auteur suppose ici que la plus grande phase arrive sur la perpendiculaire à l'orbite, ce qui n'est pas absolument exact, comme M. du Séjour l'a démontré dans les Mémoires de l'Académie, pour 1765, page 306, & M. Goudin dans un Mémoire sur les éclipses de soleil à la suite de son Traité des propriétés communes à toutes les courbes, à Paris, chez Didot, 1778. Mais il ne s'agit ici que de construire une Carte de l'éclipse & la différence n'y est pas très-sensible. Au reste, on peut avoir égard à cette différence; même par la méthode précédente, comme je l'ai fait voir dans mon *Astronomie*, art. 1950 & suiv. soit en trraçant une orbite mobile sur un carton séparé, soit en cherchant un point sur l'orbite fixe, & un sur le parallele, dont la distance donnée pour la phase que l'on cherche soit sensiblement la même pendant cinq minutes.

Heures.	Centrale.		Plus grandes Phases Australes. de 9 doigts.		de 6 doigts.		de 3 doigts.		Attouchement	
	Long.	Lat.	Long.	Lat.	Long.	Lat.	Long.	Lat.	Long.	Lat.
7	*	*	346° ½	38° B.	348°	30° B.	348° ½	22° ½ B.	348° ⅔	14° B.
8	358° ½	45° B.	359 ½	35	1 ½	26	1 ½	17 ½	1 ½	9 ½
9	11 ½	40	12 ½	30	13	21	12 ⅓	13	12 ½	4
10	23	34 ½	23	25	23	16	22	7 ½	21 ½	1 A.
11	32 ½	29 ½	32	19 ½	31 ½	11	30 ¾	2 ½ B.	30	6
midi	41 ¼	24	40	15	39 ⅓	6	37 ¾	2 ½ A.	37 ½	10 ½
1	49 ⅓	20 ½	48	11 ½	47	3	46	6	45 ½	13 ½
2	58	18	56 ½	9	55 ¼	0	54 ½	8	54	15
3	67 ¼	17	65 ½	8	64 ⅓	1 ¼ A.	64	9	63 ½	16
4	78	18	76	8 ½	75	1 A.	74	9	74	16
5	90 ½	20	88 ½	9	87 ½	0 ¾ B.	86 ⅓	7 ½	86	15
6	*	*	*	*	101	3 B.	100 ⅓	5	100	12 ½

	Plus grandes Phaſes Boréales. de 9 doigts.		de 6 doigts.		de 3 doigts.	
Heures.	Longit.	Latit.	Longit.	Lat.	Longit.	Lat.
8	355° ½	55° Bor.	*	* Bor.	*	* Bor.
9	8	52	60	67	*	*
10	22	47	20	61	*	*
11	32 ½	41	32	56	*	*
midi	42	35	43	49 ½	*	*
1	51	31 ½	52 ¾	45	*	*
2	60	28	62 ½	42	68 ½	70
3	69 ½	26 ¾	73	40	*	*
4	80 ½	27	84 ½	40	*	*
5	93 ½	28	*	*	*	*

1173. Tous ces points étant ainſi déterminés, il eſt facile de tracer ſur une carte générale ou ſur un globe terreſtre, les courbes comme on les voit dans la fig. 105.

1174. Pour avoir les lieux où l'éclipſe étoit à ſon milieu à l'inſtant du lever ou du coucher du ſoleil, je remarque de quel parallele eſt la projection ou ellipſe qui vient ſe terminer au point où la circonférence OXC eſt coupée à l'orient & à l'occident par chaque ligne des phaſes. Je calcule (431) l'arc ſemi-diurne du ſoleil qui convient à ſa déclinaiſon auſtrale de 12° 35′, & à la latitude de ce parallele, & par la comparaiſon de cet arc avec le degré marqué ſur la ligne des phaſes au point où elle coupe la circonférence OXC, je trouve la longitude du lieu cherché.

1175. Par exemple, le point 59° ⅓ de l'orbite KL de la lune coupe à l'occident la circonférence OXC à l'extrêmité de la projection du parallele de 50°. Or l'arc ſemi-diurne de ce parallele eſt 74° ⅔; donc le lieu où l'éclipſe a été centrale au lever du ſoleil eſt à 50° de latitude boréale, & 15° ⅓ de longitude. A la partie orientale, le point 15° de la diviſion de l'orbite KL, coupe la circonférence OXC à l'extrêmité de la projection du parallele de 21° dont l'arc ſemi-diurne eſt de 85°.

Donc

Donc le lieu où l'éclipſe a été centrale au coucher du ſoleil, eſt à 21° de latitude boréale, & à 100° de longitude. C'eſt ainſi que la Table ſuivante a été conſtruite.

Phaſes	Milieu de l'Eclipſe.			
	Au lever du Soleil.		Au coucher du Soleil.	
	Longit.	Latit.	Longit.	Latit.
Attouchement.	337° $\frac{1}{3}$	17° $\frac{1}{2}$ Bor.	102° $\frac{3}{4}$	12° $\frac{1}{2}$ Auſ.
3 doigts Auſtr.	339$\frac{1}{2}$	25	101$\frac{1}{2}$	5
6 doigts Auſtr.	341	32 $\frac{1}{2}$	101	3 Bor.
9 doigts Auſtr.	342$\frac{1}{4}$	41	100	12
Centrale	344$\frac{2}{3}$	50	100	21
9 doigts Bor.	349	61	100	31 $\frac{1}{2}$
6 doigts Bor.	7	73	100$\frac{1}{2}$	44
3 doigts Bor.	*	*	88	68

Avec cette Table je trace la courbe qui termine toutes celles qui marquent les plus grandes phaſes.

1176. Pour avoir les lieux où l'éclipſe a commencé & a fini, tant au lever qu'au coucher du ſoleil, je prends ſur l'échelle AB la ſomme des demi-diametres du ſoleil & de la lune 32′ 19″, & poſant une pointe ſucceſſivement ſur les extrêmités des projections des paralleles ſur le cercle OXC, je poſe l'autre à l'occident & à l'orient ſur l'orbite KL, & je trouve la longitude des lieux, en comparant l'arc ſemi-diurne du parallele avec le degré de l'orbite KL où tombe cette pointe. Ainſi pour ſavoir où l'éclipſe commencera, finira, au lever, au coucher du ſoleil ſous le parallele de 40°, je poſe une pointe du compas au point où l'ellipſe du parallele de 40° ſe termine à la partie occidentale du cercle OXC, & l'autre pointe tombe à l'occident ſur KL au point marqué 76°, & à l'orient au point de 47°. Or l'arc ſemi-diurne du parallele de 40°, eſt de 79°. Donc ſous ce parallele, l'éclipſe commence au lever du ſoleil en un lieu plus occidental que l'Iſle de Fer de 3°, & dont par conſéquent la longitude eſt 357° : & elle finit au lever du ſoleil en un lieu plus occidental que l'Iſle de Fer de 32°, & dont par conſéquent la longitude eſt 328°. En poſant maintenant la pointe du compas ſur le point où cette même ellipſe ſe termine à la partie orientale du cercle OXC, l'autre pointe tombe ſur KL au point 9°. & au point 35°. Donc au coucher du ſoleil, ſous le parallele de 40°, l'éclipſe finit en un lieu dont la longitude eſt 88°, & commence en un lieu dont la longitude eſt 114°. C'eſt ainſi que la Table ſuivante a été conſtruite.

Sous le parallele de	Au lever du Soleil.		Au coucher du Soleil.	
	Commenc. Longit.	Fin. Longit.	Commenc. Longit.	Fin. Longit.
70° Bor.	12°	346°	97° ½	77°
60	2 ½	334	108	88
50	359	329	113	90
40	357	328	114	88
30	353	328	115	86
20	346	332	115	85
17 ½	338 ½	338 ½		
10			113 ½	86
0			112 ½	89 ½
10 Auſt.			108	96
12 ½			100	100

1177. En poſant tous ces points ſur la carte ou ſur le Globe, on aura une courbe rentrante, qui ſe coupera elle-même au point où le ſoleil ne fait que paroître un inſtant à midi, ce qui arrive ſous le parallele de 77° 25′, complément de la déclinaiſon du ſoleil, & à la longitude de 37°, où tombe le point I ſur l'orbite KL.

1178. Toutes ces courbes ont des figures différentes ſuivant les différents cas; mais on ne pourra manquer de les décrire aſſez exactement, en prenant ainſi des points de proche en proche.

CONCLUSION.

Réflexions ſur le Syſtême Phyſique de l'Aſtronomie.

1179. LA néceſſité d'être court dans ces Leçons, nous a empêché d'y rapporter tous les faits qu'il faudroit détailler pour prouver que toutes les théories que nous y avons expliquées, ſont parfaitement conformes à toutes les obſervations aſtronomiques qui ont été faites depuis plus de vingt ſiecles. Nous nous ſommes moins propoſé de démontrer de cette maniere la vérité de ces théories, que d'en faire un expoſé ſimple, mais aſſez étendu pour faire comprendre tout ce qui fait maintenant l'objet de l'Aſtronomie théorique & pratique.

1180. C'eſt pour cela que nous n'avons parlé ni des différents ſyſtêmes du monde connus ſous les noms de *Ptolemée*, de *Tycho*, &c. parce qu'ils ne méritent plus aujourd'hui de trouver place ailleurs que dans un Traité de l'Hiſtoire des différentes opinions des hommes; ni des hypotheſes phyſiques, imaginées par différents Philoſophes,

pour expliquer méchaniquement les mouvements célestes. Nous nous en sommes tenus sur ce dernier article, à la simple combinaison d'une force centrale variable en raison inverse du quarré de la distance au point où elle tend, jointe à une force uniforme d'impulsion primitivement imprimée. L'existence de ces deux forces est si palpable, & se prouve par tant d'inductions évidentes, que s'il y a quelque systême général de physique à rechercher, il faut que la combinaison de ces deux forces soit la premiere conséquence du principe qu'on établira. Il faut donc que dans ce systême, on développe l'origine de la loi générale qui suit, ou du moins d'une loi qui lui soit parfaitement analogue.

1181. *Chaque corps céleste est le centre d'une espece de sphere infiniment étendue, dont chaque rayon est la direction d'une force constante & uniforme dans toute la longueur de ce rayon, laquelle force pousse ou tire vers ce centre, chaque autre corps qui se trouve dans ce rayon: ensorte que l'effort de cette force est toujours en raison inverse du quarré de la distance du centre de ce corps au centre de la sphere.*

1182. On conçoit que cette loi étant générale pour chaque corps céleste, deux corps quelconques sont réciproquement engagés dans leur sphere d'activité : de sorte que si ces deux corps sont égaux en masse, la tendance à l'union est égale & réciproque de part & d'autre : mais si un corps est composé de deux, trois, quatre, &c., parties égales chacune en masse à un autre corps éloigné, la tendance réciproque entre ce dernier corps, & chaque partie du premier est encore égale ; mais à cause de l'union des parties qui composent le premier corps, la tendance du second corps vers le premier est double, triple, quadruple, &c. de la tendance du premier corps entier vers le second, &c.

1183. D'où il suit que *pour établir un systême d'Astronomie-Physique, il faut déduire du principe qu'on posera pour fondement, une loi générale, suivant laquelle deux corps célestes quelconques tendent à s'unir avec une force qui soit*

toujours en raison directe de leur masse, & *en raison inverse du quarré de leur distance.* Ensorte que cette tendance se modifie en autant de manieres qu'il y aura de corps célestes qu'ils auront de différentes masses, & de différentes positions respectives.

1184. La conformité étonnante qui se trouve entre tous les phénomenes célestes & les calculs déduits de cette loi, (865) a obligé les Astronomes de l'admettre comme loi fondamentale. Il n'y a plus maintenant de dispute sur son existence, ensorte que tout ce qui reste à desirer pour la perfection de l'Astronomie, c'est une longue suite d'observations plus exactes que celles que les Anciens nous ont laissées, & auxquelles on puisse appliquer plus sûrement les regles tirées de cette loi générale, afin d'en déduire les vrais Eléments Astronomiques de la théorie de chacun des corps célestes.

1185. On voit donc que tous les astres étant assujettis à cette loi, ils doivent être dans une agitation perpétuelle pour s'y conformer, autant qu'il leur est possible. Le soleil lui-même est contraint de changer de place à chaque instant, pour prendre une situation telle qu'il soit le plus près qu'il est possible de chacune des planetes & des cometes qui tournent autour de lui dans des orbites excentriques. Mais sa masse énorme & sa distance immense rendent ce mouvement insensible, du moins à notre égard. Il pourroit se faire aussi que le soleil eût de plus un mouvement de translation dans l'espace absolu, ce que les mouvements particuliers qu'on observe dans les étoiles les plus brillantes donnent à soupçonner, mais c'est une conjecture (*t*) qui demande encore du temps pour être confirmée ou détruite par une longue suite d'observations très-délicates.

1186. La même conformité entre la loi des forces centrales & les phénomenes célestes, mene encore à une proposition qui doit nécessairement entrer dans le systême

(*t*) Je crois que cela est démontré par le mouvement de rotation du soleil, qui ne sauroit avoir lieu sans un mouvement de translation, V. *Mémoires de l'Académie* 1776, page 513.

physique : c'est que *le milieu dans lequel les corps célestes se meuvent, ne leur fait aucune résistance qui altere sensiblement leurs mouvements dans l'espace d'un siecle* (*u*). On seroit plus certain sur cet article, si les anciens Astronomes nous avoient transmis des observations aussi exactes que celles qu'on fait maintenant. Ainsi c'est encore aux siecles futurs qu'est réservée une connoissance plus précise sur cet article.

1187. La difficulté d'assigner à cette loi un principe vraiment physique, ou même de la concilier avec l'idée qu'on a naturellement que tout mouvement se fait en vertu d'une impulsion, a été cause que les Philosophes se sont partagés de sentiments à son égard. Quelques-uns voudroient la trouver dans le mouvement des fluides, & dans le systême du plein ; d'autres, en admettant le vide, la regardent comme une loi primordiale que Dieu a établie en créant la matiere, ils l'appellent l'*Attraction*. Le parti le plus sage pour un Astronome, est de profiter des avantages immenses qu'offre cette loi, en l'admettant comme une induction tirée sans aucune contradiction de tous les phénomenes célestes, jusqu'à ce qu'on en ait trouvé la véritable cause physique, ou qu'on ait découvert la vraie loi, à laquelle celle-ci est si parfaitement analogue.

(*u*) On peut voir sur cet article les Recherches de M. d'Alembert, seconde partie, la piece de M. l'Abbé Bossut, qui a remporté le prix de l'Académie, en 1762, & celle de M. J. A. Euler, qui est dans le huitieme volume des pieces des prix.

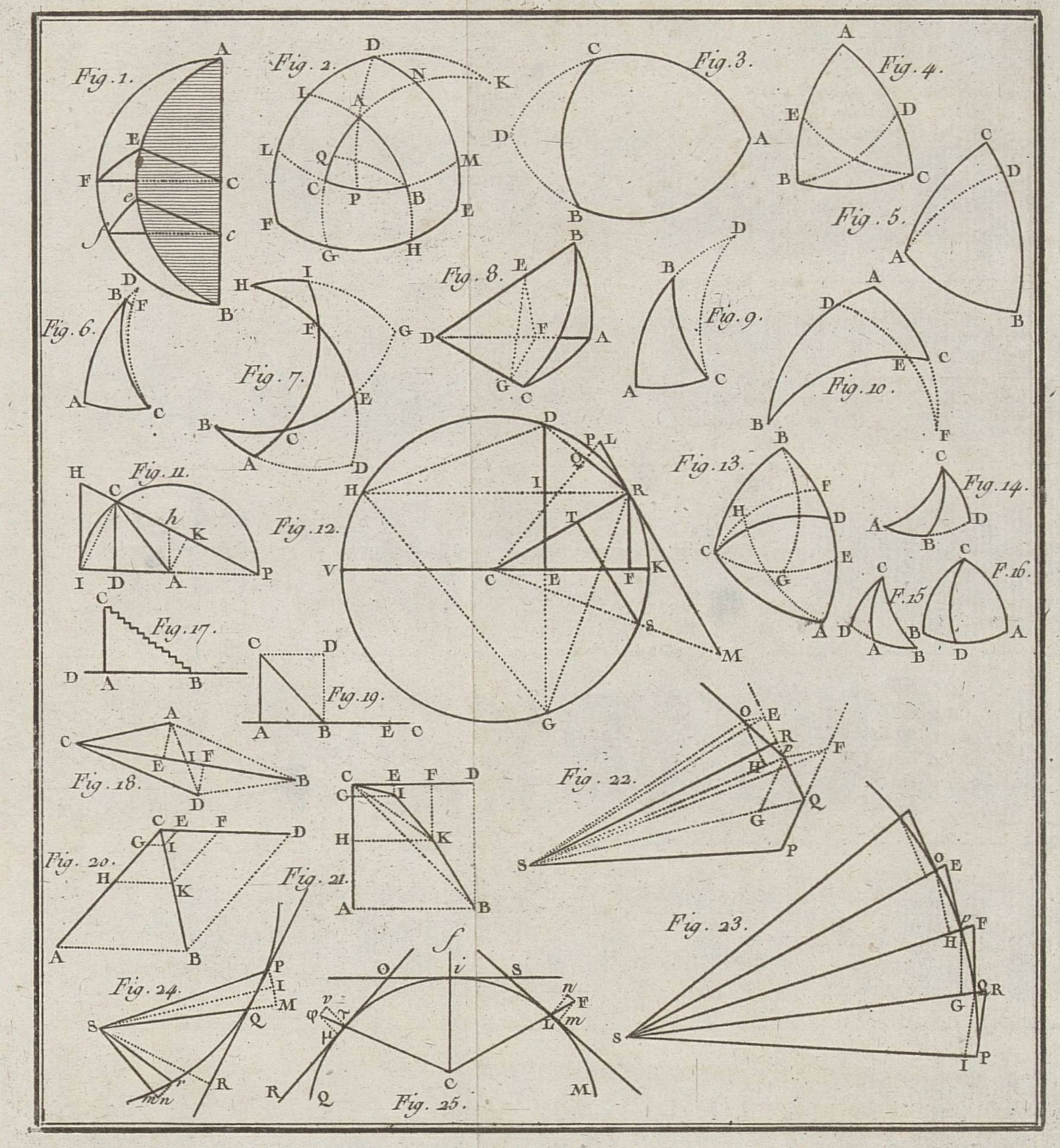
FIN.

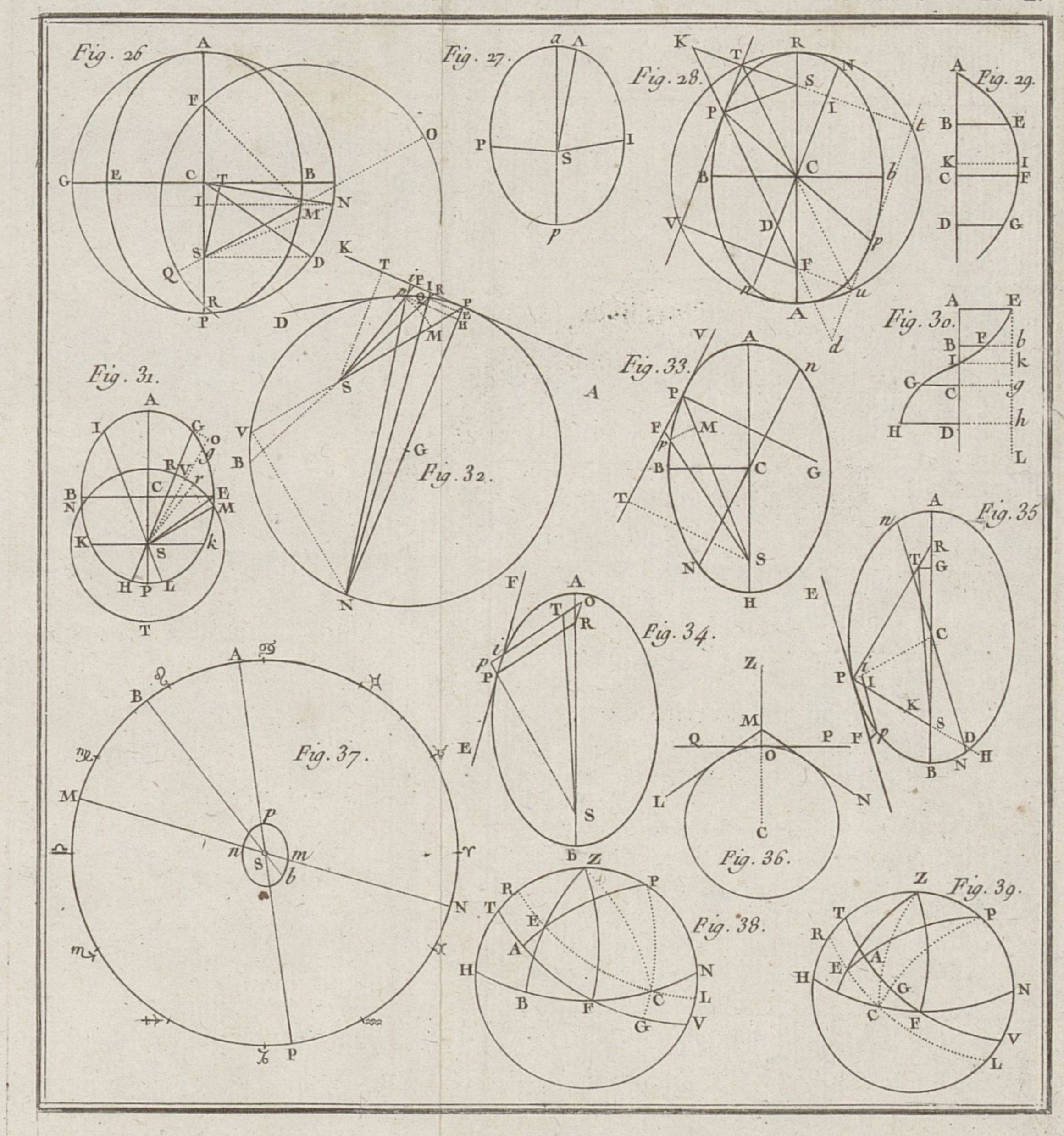
TABLE DES MATIERES.

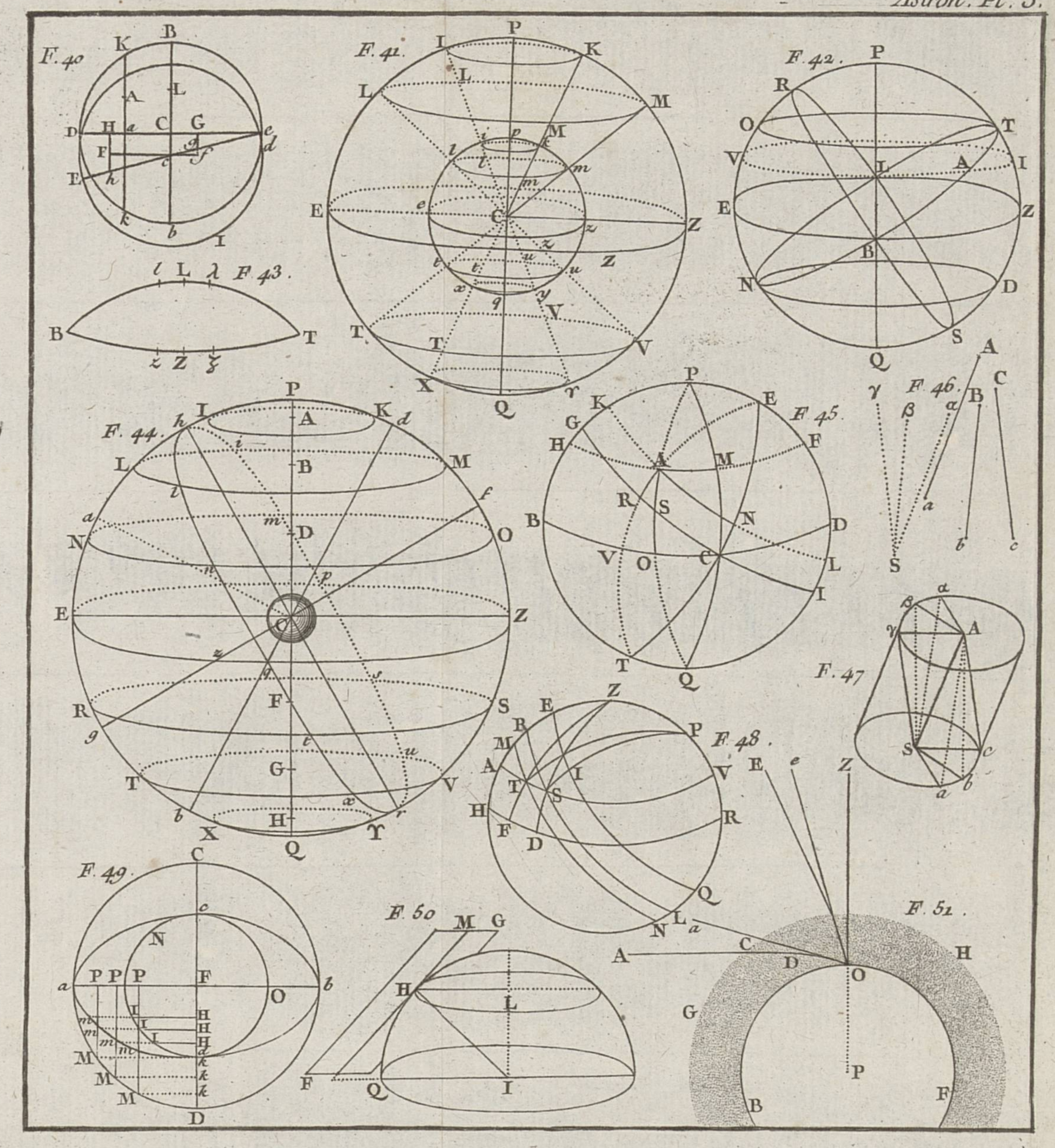
Les Chifres marquent les numeros, & non les pages.

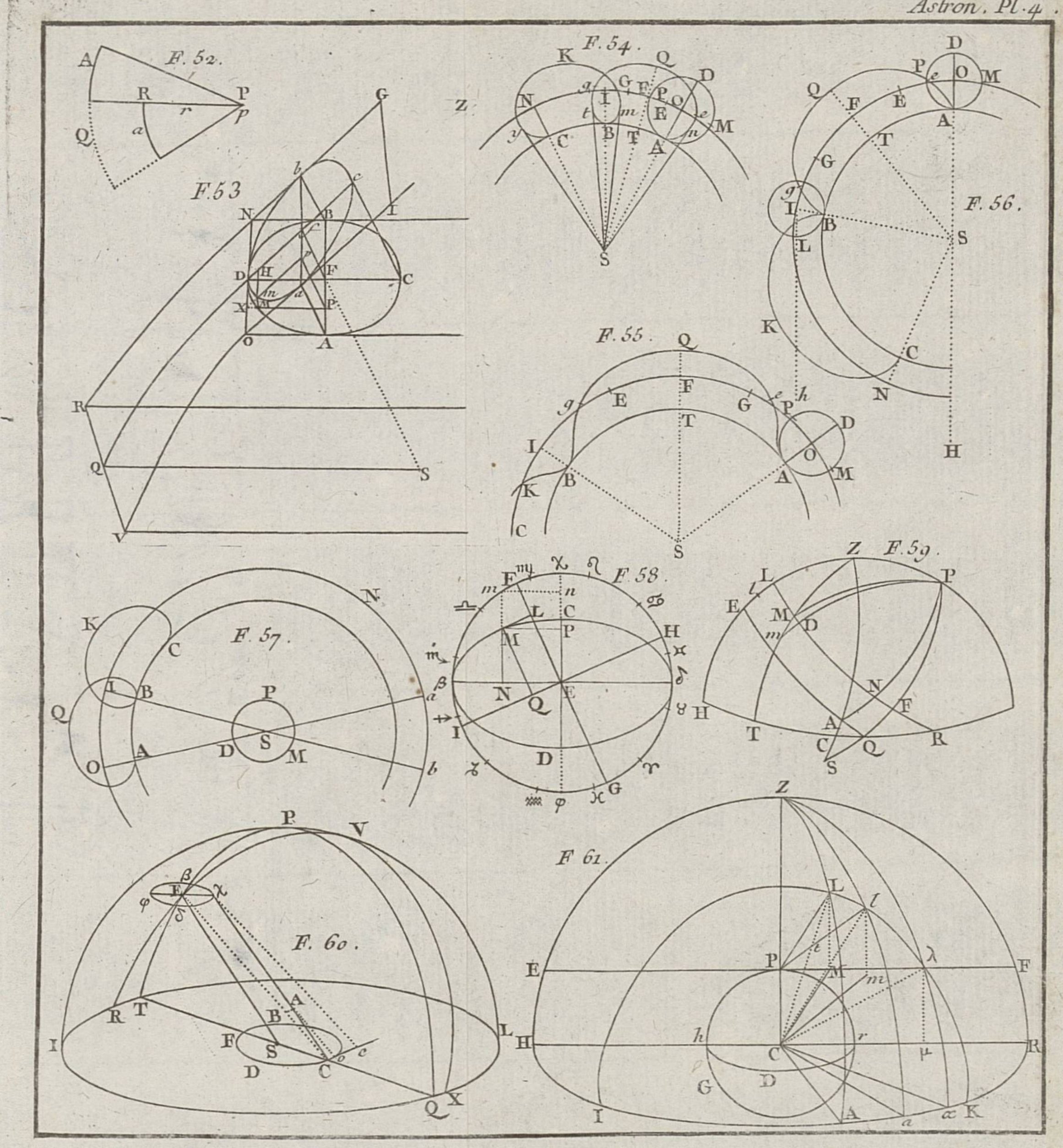
Fin de la Table des Matieres.

DE L'IMPRIMERIE DE J. CH. DESAINT,
RUE SAINT-JACQUES.

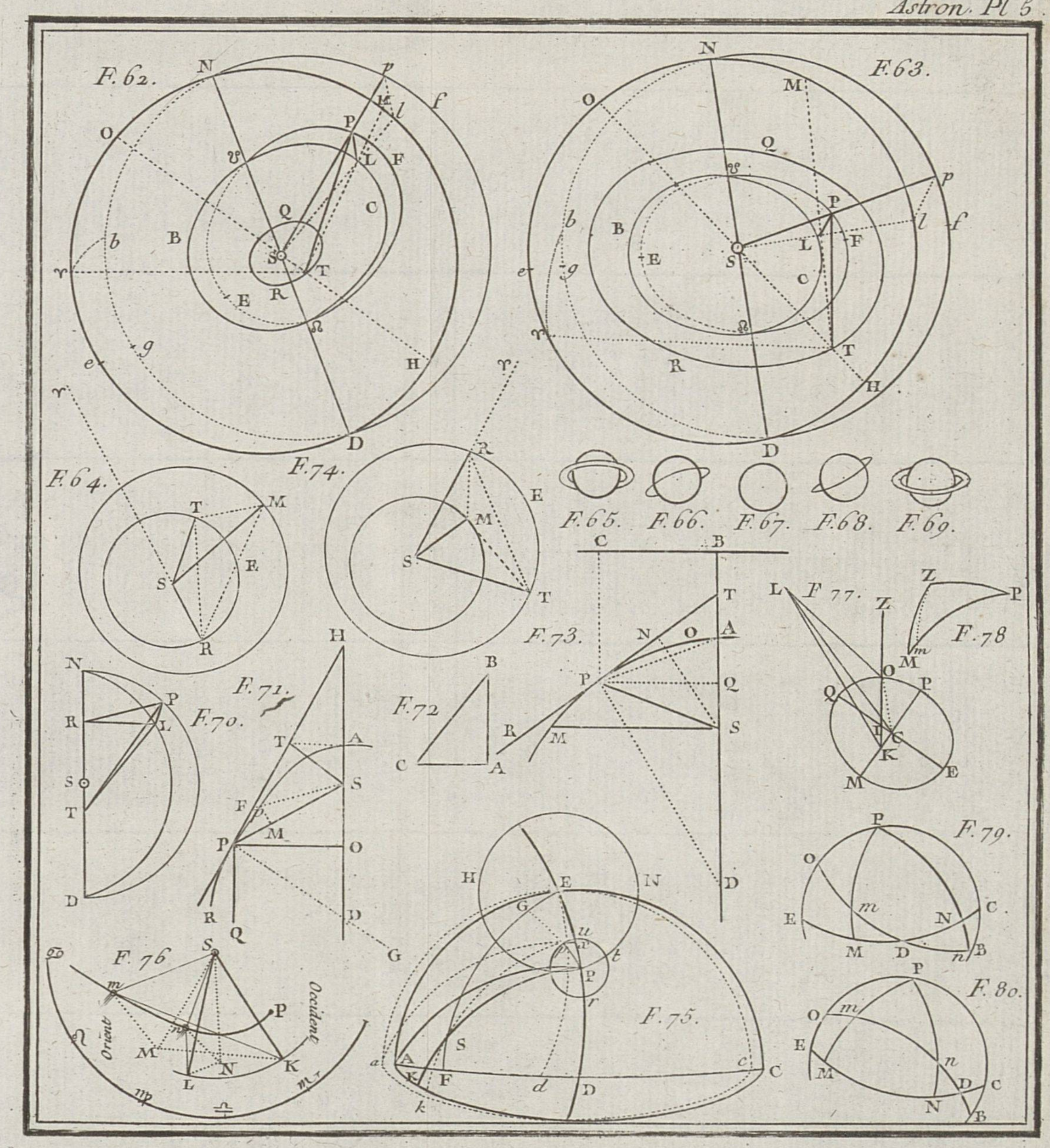

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
F. 15
F. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.

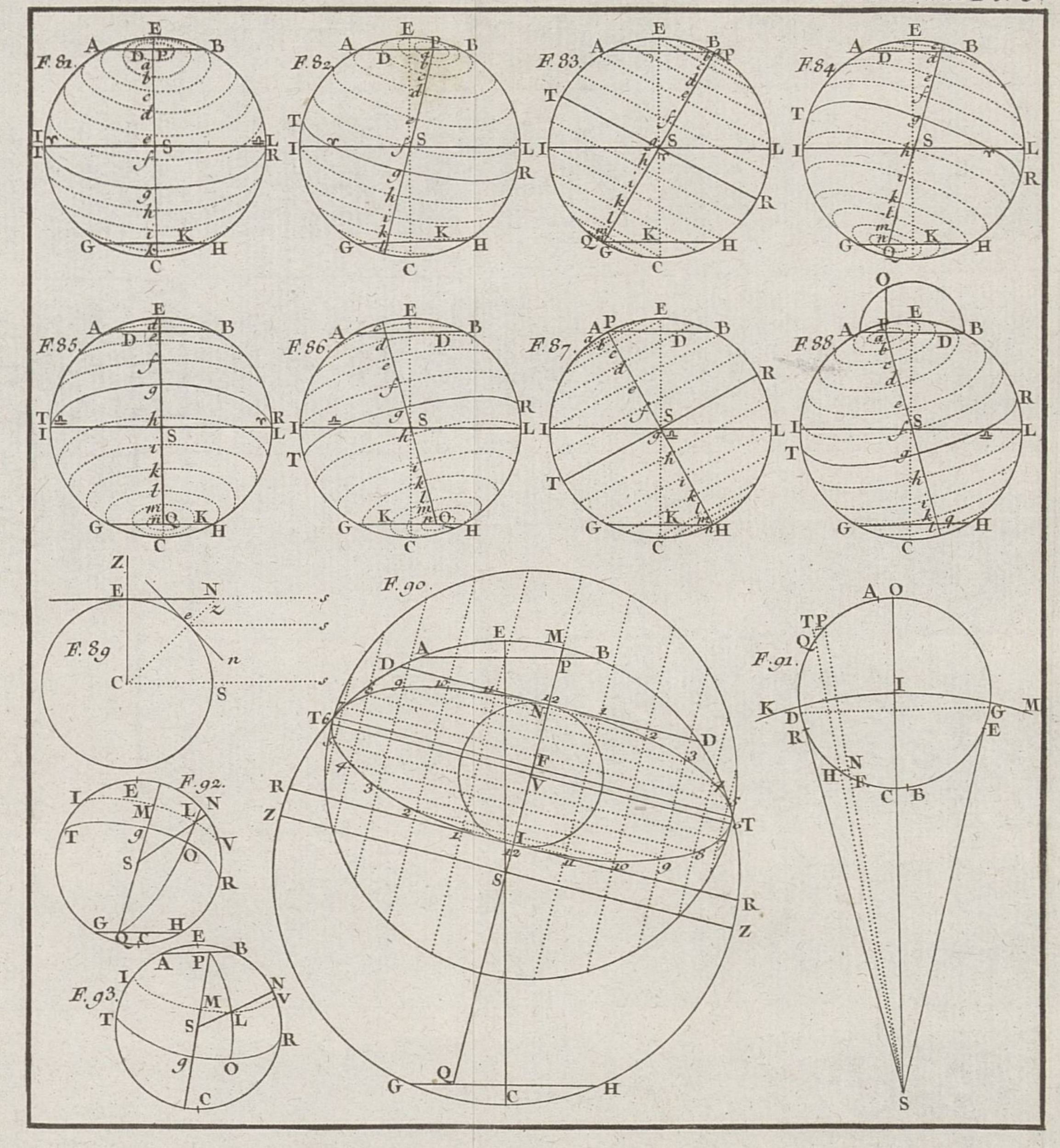

Fig. 26
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.

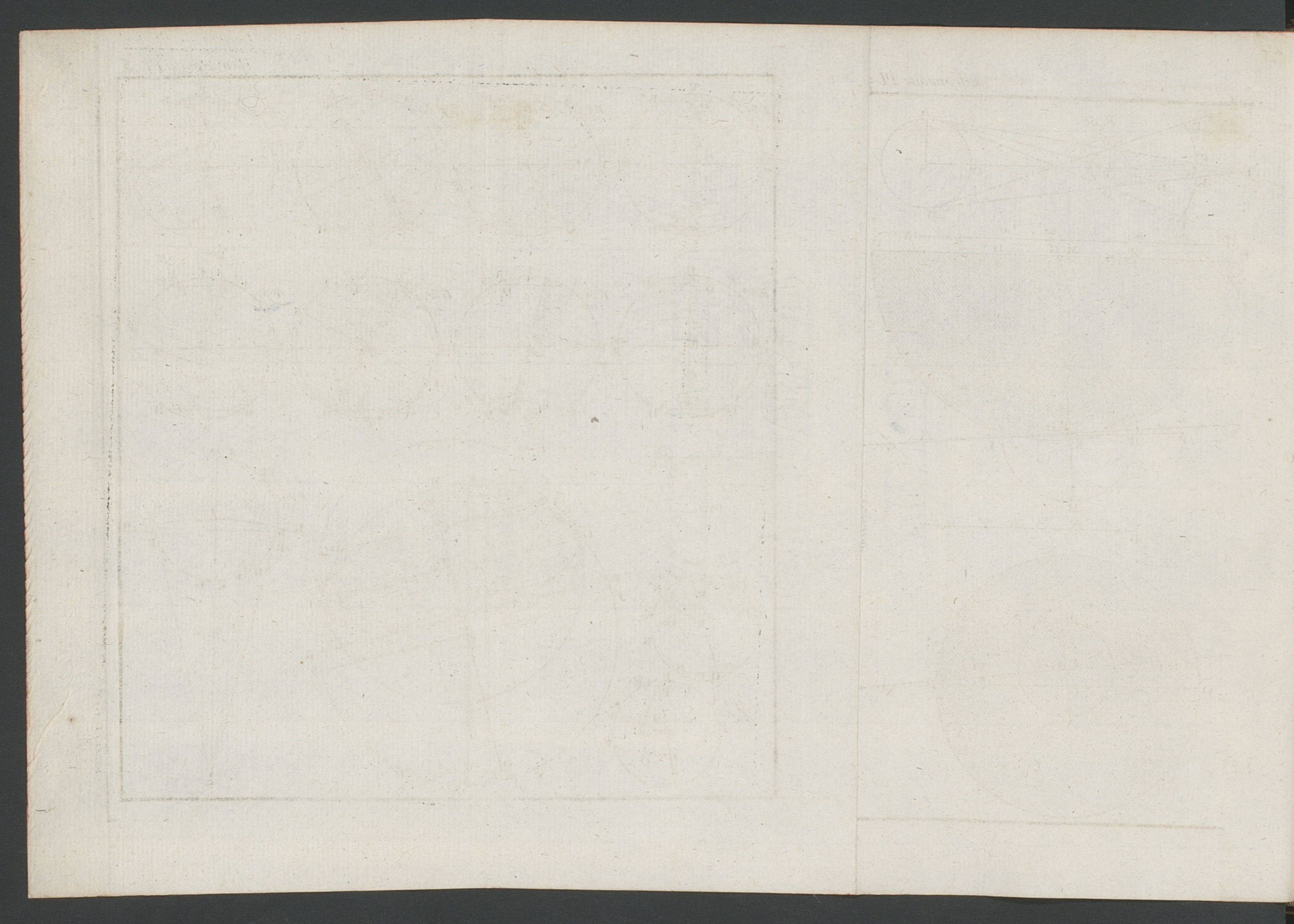

F. 40
F. 41
F. 42
F. 43
F. 44
F. 45
F. 46
F. 47
F. 48
F. 49
F. 50
F. 51

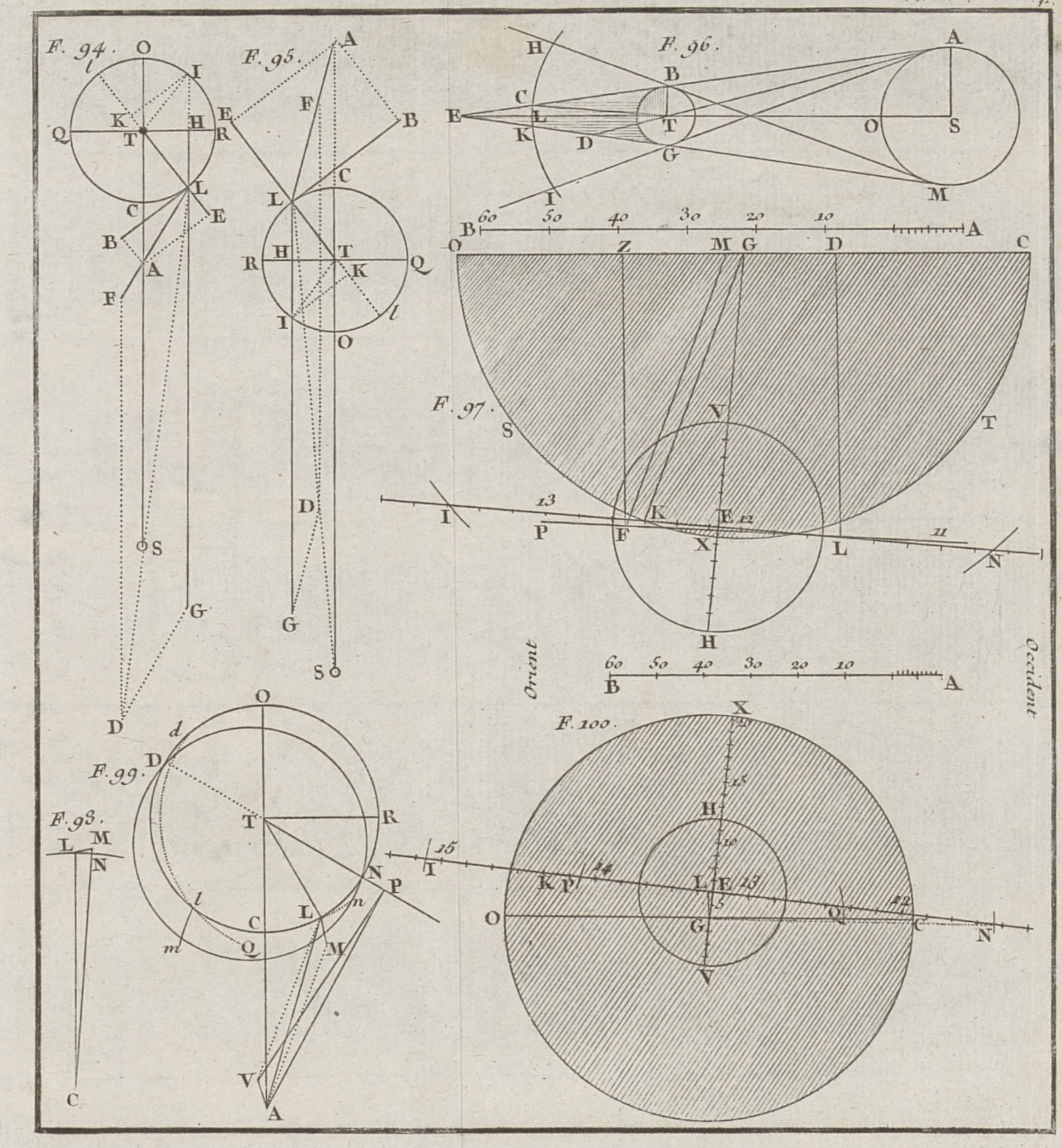


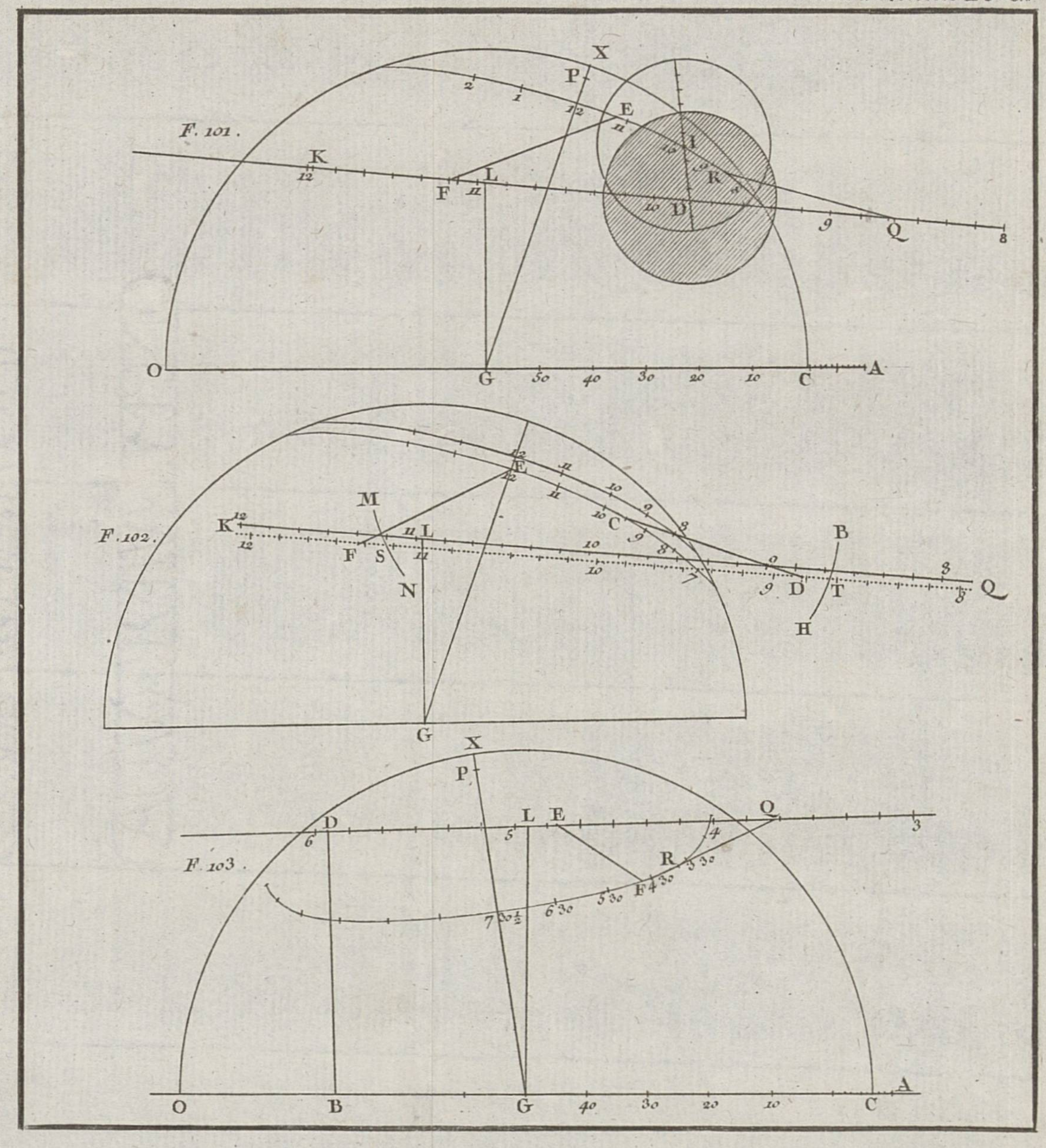
F. 52.
F. 53
F. 54.
F. 55.
F. 56.
F. 57.
F. 58.
F. 59.
F. 60.
F. 61.

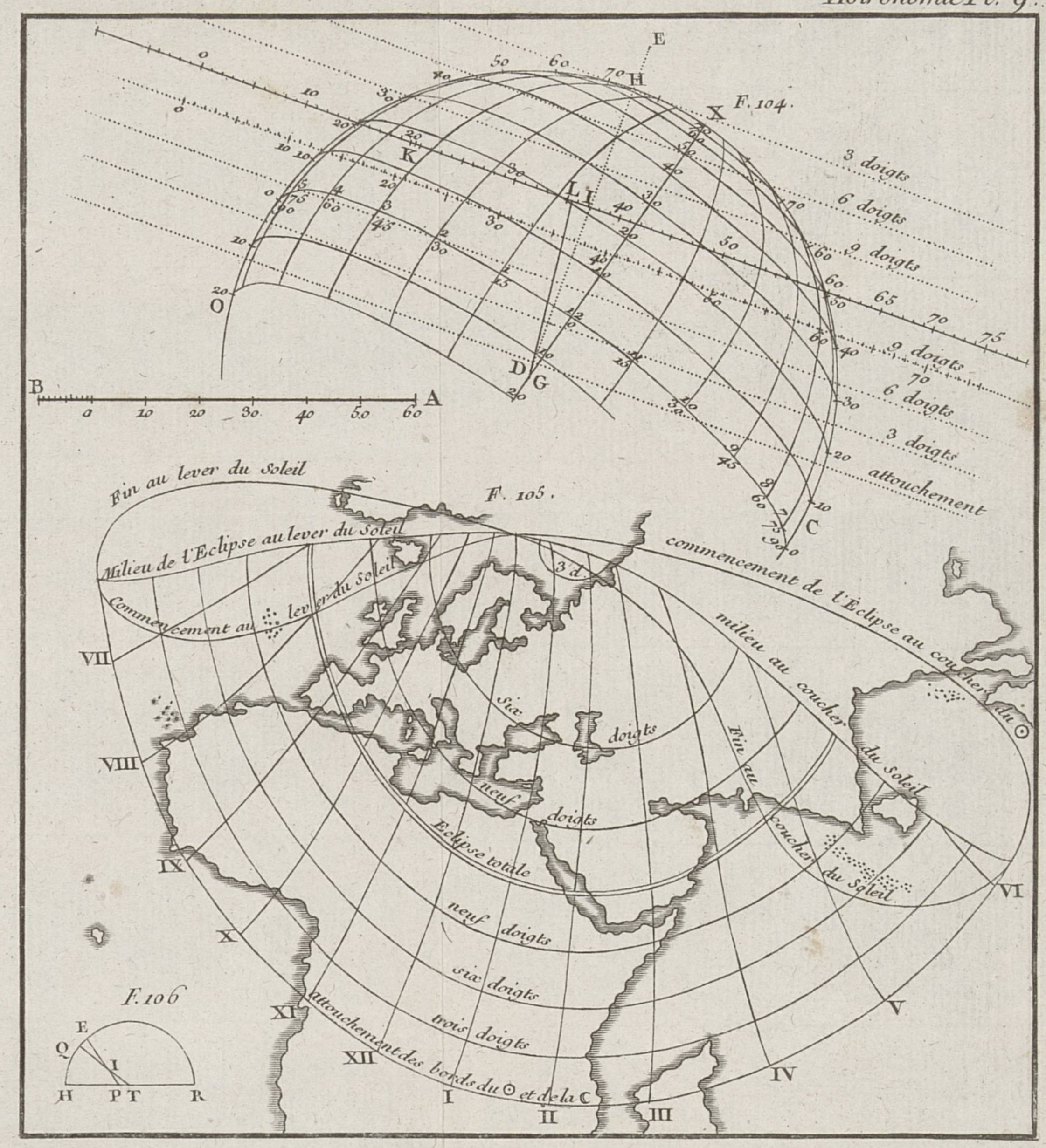

F. 62.
F. 63.
F. 64.
F. 65.
F. 66.
F. 67.
F. 68.
F. 69.
F. 70.
F. 71.
F. 72.
F. 73.
F. 74.
F. 75.
F. 76.
F. 77.
F. 78
F. 79.
F. 80.
Orient
Occident

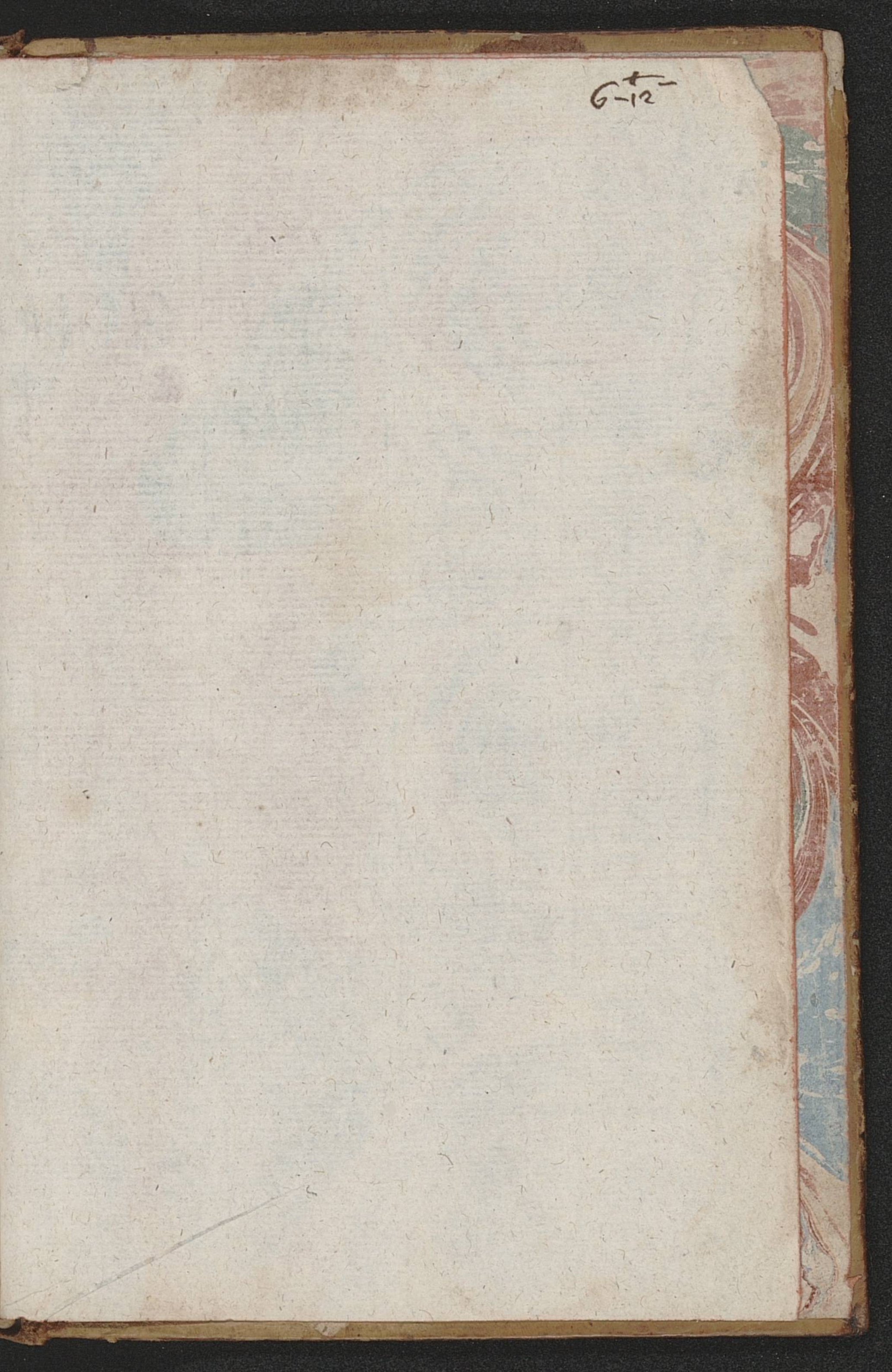

F. 81.
F. 82.
F. 83.
F. 84.
F. 85.
F. 86.
F. 87.
F. 88.
F. 89
F. 90.
F. 91.
F. 92.
F. 93.




F. 94.
F. 95.
F. 96.
F. 97.
F. 98.
F. 99.
F. 100.
Orient
Occident

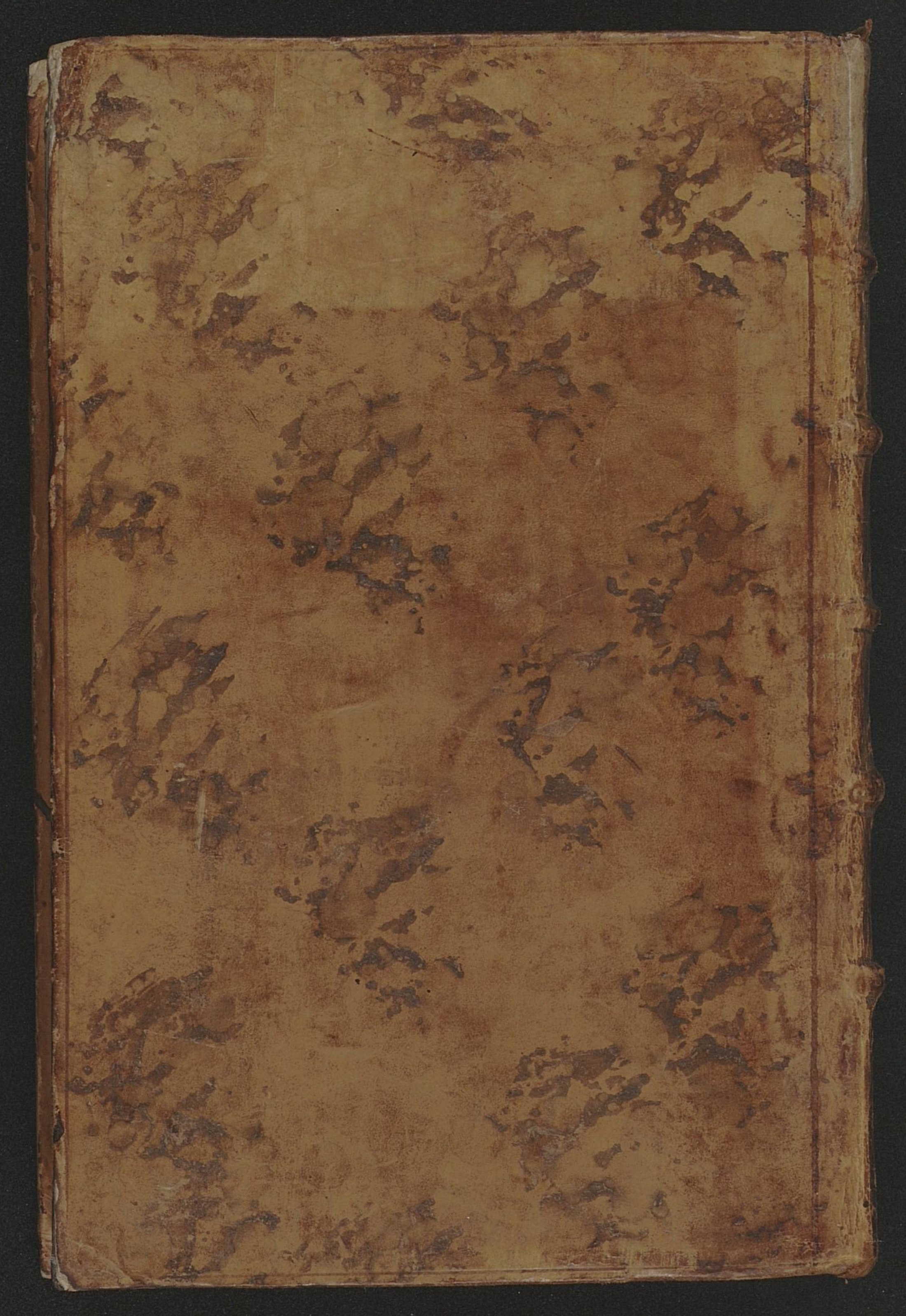

F. 101.
X
P
E
I
K
L
F
D
Q
O
G
C
A
F. 102.
M
K
L
F
S
N
E
C
B
D
T
Q
H
G
F. 103.
X
P
D
L
E
Q
R
F
O
B
G
C
A

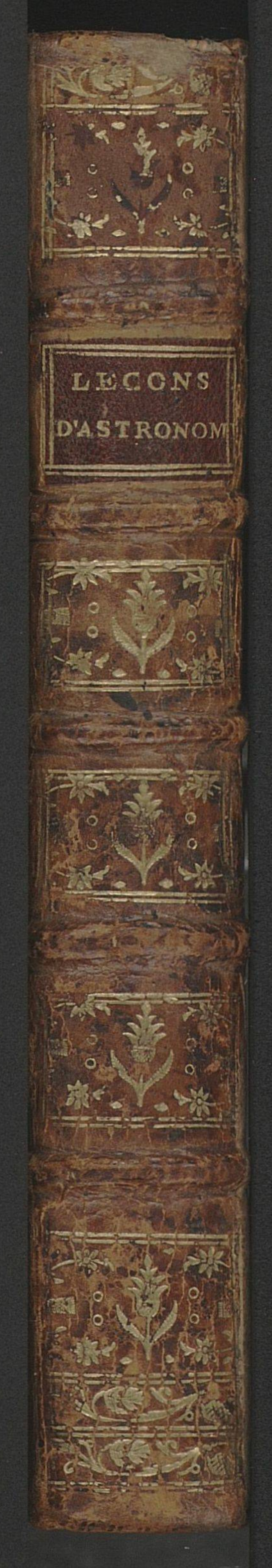

F. 104.
3 doigts
6 doigts
9 doigts
9 doigts
6 doigts
3 doigts
attouchement
F. 105.
Fin au lever du Soleil
Milieu de l'Eclipse au lever du Soleil
Commencement au lever du Soleil
commencement de l'Eclipse au coucher du ☉
milieu au coucher du Soleil
Fin au coucher du Soleil
Six doigts
neuf doigts
Eclipse totale
neuf doigts
six doigts
trois doigts
attouchement des bords du ☉ et de la ☾
3 d.
F. 106










LECONS
D'ASTRONOM



inches 4 3 2 1 0

centimeters 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density →										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87	L*
	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17	a*
	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46	b*
	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42										

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams